АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 5

УДК 534.2
© 1991 г.

Л.А. Френкель

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК КРУГЛЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ С УЧЕТОМ ПОТЕРЬ

Разработан алгоритм расчета характеристик акустических колебаний произвольного типа, распространяющихся вдоль круглого многослойного волновода, однородного по угловой и продольной координатам. Алгоритм, основанный на перемножении матриц, описывающих свойства каждого слоя, позволяет обходиться без вычисления определителя высокого порядка, как это имеет место в случае классического подхода. Трение учитывается в приближении Фохта, т.е. коэффициенты Ламе материалов волновода считаются комплексными. Приведены результаты модельных вычислений, иллюстрирующие возможности алгоритма.

Методам расчета характеристик акустических волноводов круглого сечения посвящен ряд работ, например [1–4] и т.д. Интерес к этим направляющим системам обусловлен тем, что они могут использоваться в акустических линиях задержки на большие времена [1, 5]. Позднее появились сообщения о том, что для тех же целей могут использоваться известные из волоконной оптики кварцевые волокна [5], механические свойства которых зависят от радиальной координаты цилиндрической (r, φ, z) системы координат, соответствующей волноводу [1]. В связи с этим актуальной становится разработка методов расчета многослойных акустических волноводов, так как подбором материалов слоев можно решать задачи оптимизации конструкций волноводов по различным критериям, например: уменьшать искажения сигналов, снижать потери на нерегулярностях, фильтровать различные типы мод и т.д. Учитывая свойства реальных материалов, математическая модель волновода должна учитывать потери на трение, т.е. необходимо рассматривать комплексные значения постоянных Ламе λ и μ (модель Фохта [6]).

Рассмотрим бесконечный и однородный вдоль оси z многослойный волновод круглого сечения. Радиусы слоев обозначим $a_1, a_2, \ldots, a_N$, где N – число слоев. Каждый слой характеризуется тремя величинами: плотностью ρ_k и постоянными Ламе λ_k и μ_k, где $k = 1 \ldots N$.

Ставится задача на заданной частоте ω определить структуру поля и постоянную распространения γ волны произвольного типа, распространяющейся в положительном направлении вдоль оси z.

Следуя [1, 2], выразим вектор смещения $\bar{U}$ через скалярную ψ и векторную $\bar{\mathbf{h}}$ потенциальные функции и предположим, что решения имеют вид

$$\psi = f(r)\cos n\varphi e^{i(\gamma z - \omega t)},$$

$$\bar{\mathbf{h}} = [\bar{\mathbf{r}}_0 h_r(r)\sin n\varphi + \bar{\varphi}_0 h_\varphi(r)\cos n\varphi + \bar{\mathbf{z}}_0 h_z(r)\sin n\varphi]\, e^{i(\gamma z - \omega t)},$$

где $\bar{\mathbf{r}}_0$, $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_0$, $\bar{\mathbf{z}}_0$ – орт цилиндрической системы координат. Согласно [2], для цилиндрического слоя имеем

$$f(r) = b_1^k J_n(\alpha_k r) + b_4^k Y_n(\alpha_k r), \tag{1}$$

$$h_z(r) = b_2^k J_n(\beta_k r) + b_5^k Y_n(\beta_k r), \tag{2}$$

$$h_r(r) = -h_\varphi(r) = b_3^k J_{n+1}(\beta_k r) + b_6^k Y_{n+1}(\beta_k r), \tag{3}$$

где $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ – функции Бесселя и Неймана соответственно, $\alpha_k^2 = \omega^2/V_D^{k^2} - \gamma^2$, $\beta_k^2 = \omega^2/V_S^{k^2} - \gamma^2$, V_D^k и V_S^k – скорости волны расширения и сдвиговой волны в соответствующем материале, $b_1^k \ldots b_6^k$ – неизвестные константы.

На границах разделов между отдельными слоями должны выполняться условия непрерывности компонент вектора смещения u_r, u_φ, u_z и компонент тензора деформации σ_{rr}, $\sigma_{r\varphi}$ и σ_{rz}, величины которых могут быть выражены через (1)–(3) с использованием соотношений на [1–3]. Образуем вектор-столбец $F(r)$ из непрерывных на границах разделов величин и выразим его через произведения двух матриц

$$F(r) = A_k(r) B_k, \tag{4}$$

где

$$F = (u_r u_\varphi u_z \sigma_{rr} \sigma_{r\varphi} \sigma_{rz})^T, \tag{5}$$

$$B_k = (b_1^k \ldots b_6^k)^T, \tag{6}$$

а элементы матрицы $A_k(r)$ равны

$$a_{11} = \alpha_k J_n'(\alpha_k r), \quad a_{12} = \frac{n}{r} J_n(\beta_k r), \quad a_{13} = i\gamma J_{n+1}(\beta_k r),$$

$$a_{21} = -\frac{n}{r} J_n(\alpha_k r), \quad a_{22} = -\beta_k J_n'(\beta_k r), \quad a_{23} = a_{13}, \quad a_{31} = i\gamma J_n(\alpha_k r), \quad a_{32} = 0,$$

$$a_{33} = -\beta_k J_n(\beta_k r), \tag{7}$$

$$a_{41} = -\lambda(\alpha_k^2 + \gamma^2) J_n(\alpha_k r) + 2\mu_k \alpha_k^2 J_n''(\alpha_k r),$$

$$a_{42} = -2\mu_k \beta_k \frac{n}{r} J_{n+1}(\beta_k r), \quad a_{43} = 2\mu_k i\gamma\beta_k J_{n+1}'(\beta_k r),$$

$$a_{51} = \frac{2n\mu_k\alpha_k}{r}\left[\frac{1}{\alpha_k r} J_n(\alpha_k r) - J_n'(\alpha_k r)\right],$$

$$a_{52} = \beta_k^2 \mu_k \left[\frac{2}{\beta_k r} J_n'(\beta_k r) + \left(1 - \frac{2n^2}{\beta_k^2 r^2}\right) J_n(\beta_k r)\right],$$

$$a_{53} = -i\gamma\beta_k\mu_k J_{n+2}(\beta_k r), \quad a_{61} = 2i\gamma\alpha_k\mu_k J_n'(\alpha_k r), \quad a_{62} = i\gamma\mu_k \frac{n}{r} J_n(\beta_k r),$$

$$a_{63} = -\mu_k[\gamma^2 J_{n+1}(\beta_k r) + \beta_k^2 J_n'(\beta_k r)],$$

где штрих означает дифференцирование по всему аргументу. Элементы a_{j4}, a_{j5}, a_{j6} получаются из элементов a_{j1}, a_{j2}, a_{j3} соответственно путем замены функции J_n на Y_n. При этом $j = 1 \ldots 6$.

Таким образом, в точке $r = a_k$ должно выполняться условие непрерывности $F(a_k - 0) = F(a_k + 0)$ или с учетом (4)

$$A_k(a_k - 0) B_k = A_{k+1}(a_k + 0) B_{k+1}.$$

Следовательно,

$$A_{k+1}^{-1}(a_k + 0) A_k(a_k - 0) B_k = B_{k+1}.$$

Продолжая эти рассуждения, получаем, что

$$B_N = C B_1, \tag{8}$$

где

$$C = \prod_{j=1}^{N-1} A_{j+1}^{-1}(a_j + 0) A_j(a_j - 0), \tag{9}$$

а вектор F слева от N-й границы раздела равен

$$F(a_N - 0) = DB_1, \tag{10}$$

где

$$D = A_N(a_N - 0)C. \tag{11}$$

Из выражений (8) – (11) следуют дисперсионные уравнения для волноводов с различными типами граничных условий на последней N-й границе раздела.

1. Свободная граница раздела.

На этой границе

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0, \tag{12}$$

т.е. в столбце $F(a_N - 0)$, а следовательно, согласно (10), и в столбце DB_1 три последние строки приравниваются к нулю. Так как элементы $b_4^1 \ldots b_6^1$ столбца B_1 стоят перед функциями Наймана (1) – (3), обращающимися в бесконечность в точке $r = 0$, то это означает, что в столбце B_1 элементы $b_4^1 = b_5^1 = b_6^1 = 0$. Следовательно, система однородных линейных уравнений (12) имеет нетривиальное решение лишь при условии

$$\tilde{d} = \begin{vmatrix} d_{41} & d_{42} & d_{43} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

2. Последний слой – бесконечный:

В этом случае в столбце B_N элементы

$$b_1^N = b_2^N = b_3^N = 0, \tag{14}$$

так как из условия излучения в выражениях (1) – (3) должны остаться только функции Макдональда при соответствующем выборе знаков величин α_N^2 и β_N^2. Согласно (8), это означает, что три первые строки столбца CB_1 следует приравнять к нулю. Как было показано выше, в матрице B_1 элементы $b_4^1 = b_5^1 = b_6^1 = 0$, следовательно, для существования нетривиального решения системы линейных однородных уравнений (14) необходимо, чтобы

$$\tilde{C} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Постоянная распространения γ может быть найдена численно из уравнения (13) или (15) в зависимости от типа волновода. Таким образом, получены дисперсионные уравнения для круглых многослойных акустических волноводов двух различных типов. Заметим, что из уравнений (13) и (15) могут быть также определены значения частот отсечки ω_c соответствующих мод. Для этого необходимо положить $\gamma = 0$ и решать дисперсионное уравнение относительно частоты ω.

В случае комплексных значений постоянных Ламе λ_k и μ_k каждое из соотношений (13) и (15) представляет собой два нелинейных уравнения относительно действительной и мнимой частей постоянной распространения $\gamma = \gamma_R + i\gamma_I$. Численный алгоритм решения уравнений (13) и (15) может быть разбит на ряд шагов.

Шаг 1. Из тех или иных (часто физических) соображений отделяются корни по аргументу γ_R. Методом деления отрезка пополам решается уравнение $\operatorname{Re}\tilde{d} = 0$ или $\operatorname{Re}\tilde{c} = 0$ в зависимости от типа волновода.

Шаг 2. Если

$$\operatorname{Im}\lambda_k = \operatorname{Im}\mu_k = 0 \quad (k = 1 \ldots N), \tag{16}$$

то процесс прекращается. Если условия (16) не выполнены, то к уравнению $\operatorname{Re}\tilde{d} = 0$ добавляется уравнение $\operatorname{Im}\tilde{d} = 0$ (соответственно к $\operatorname{Re}\tilde{c} = 0$ $\operatorname{Im}\tilde{c} = 0$).

Шаг 3. Система уравнений

$$\operatorname{Re}\tilde{d} = 0, \qquad \operatorname{Im}\tilde{d} = 0$$

или

$$\operatorname{Re}\tilde{c} = 0, \qquad \operatorname{Im}\tilde{c} = 0$$

решается относительно γ_R и γ_I с помощью комбинации методов условной минимизации и методов Ньютона, аналогично тому как это было сделано в [7]. При этом в качестве начального приближения используется решение, найденное на шаге 1.

Рассмотрим одно-, двух- и трехслойные круглые акустические волноводы со свободной последней границей раздела с потерями и без, параметры которых представлены в табл. 1. Буквой E обозначен модуль Юнга материала внутреннего слоя. С помощью описанного выше алгоритма были вычислены характеристики крутильных колебаний ($n = 0, u_r = u_z = 0, u_\varphi \neq 0$), распространяющихся по этим волноводам в положительном направлении оси z. Значения нормированных частот отсечки первых пяти типов колебаний приведены в табл. 2.

Таблица 1

№ слоя	a_k, мм	$\operatorname{Re}\mu/E$	$\rho/E \cdot 10^{-8}$, с^2/м^2
1	1	0	2,99
2	2	0,431	2,99
3	3	0,438	2,99

Таблица 2

Количество слоев	1	2	3
Нормированная частота отсечки $\omega_c a_1 / V_S^1$	0	0	0
	5,136	2,577	1,722
	8,417	4,217	2,821
	11,620	5,824	3,889
	14,796	7,413	4,954

На рис. 1–3 приведены дисперсионные характеристики первых трех типов крутильных колебаний, распространяющихся по одно-, двух- и трехслойным волноводам. Номер рисунка равен числу слоев в волноводе с параметрами из табл. 1. На этих рисунках сплошной линией показана зависимость от частоты действительной части постоянной распространения (левая ось ординат), пунктирной – мнимая часть (правая ось ординат). При этом полагалось, что во всех слоях волноводов $\operatorname{Im}\mu_k/E = -0{,}001$, $k = 1 \ldots 3$. Из этих результатов следует, что, меняя конструкцию волновода, можно добиваться изменения как частот отсечки различных типов мод, так и вида зависимостей $\gamma_R(\omega)$ и $\gamma_I(\omega)$. При выбранном масштабе рассмотренные зависимости $\gamma_R(\omega)$ практически совпадают с аналогичными зависимостями для волноводов без потерь. Поэтому точки пересечения линий $\gamma_R(\omega)$ и оси абсцисс соответствуют частотам отсечки соответствующих типов колебаний.

В качестве следующего примера рассмотрим распространение продольных нормальных волн ($n = 0$) по волноводам, параметры которых приведены в табл. 3. Здесь σ_k – коэффициент Пуассона соответствующего слоя, параметры первого волновода совпадают с рассмотренными в [1].

В табл. 4 приведены значения нормированных частот отсечки $\Omega_{ck} = \omega_{ck}/\omega_S$ этих волноводов, где ω_{ck} – частота отсечки, $\omega_S = (\delta/a_N) V_S^N$, δ – наименьший, отличный от нуля корень уравнения $J_1(\delta) = 0$, k – номер волновода из табл. 3.

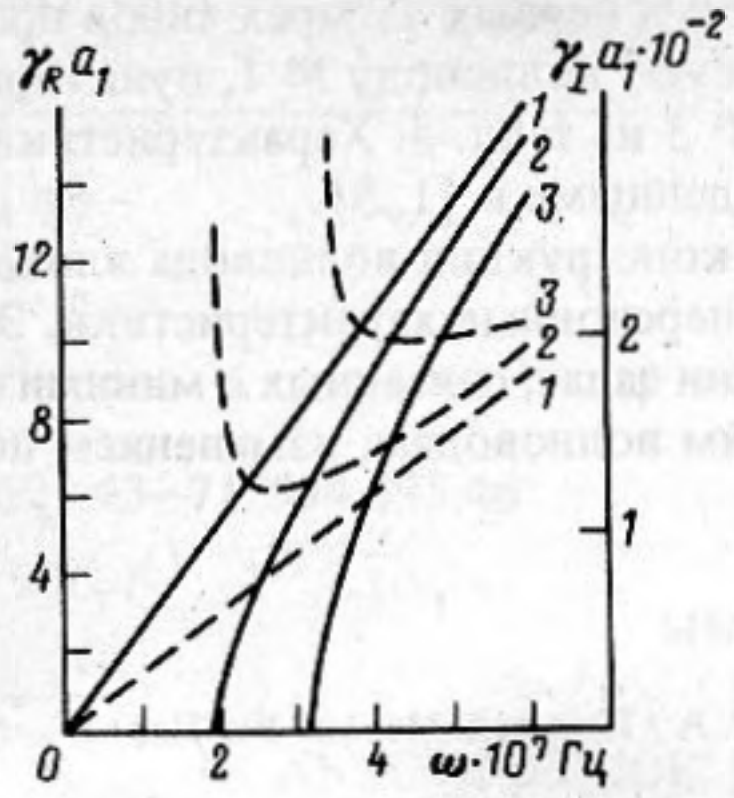

Рис. 1

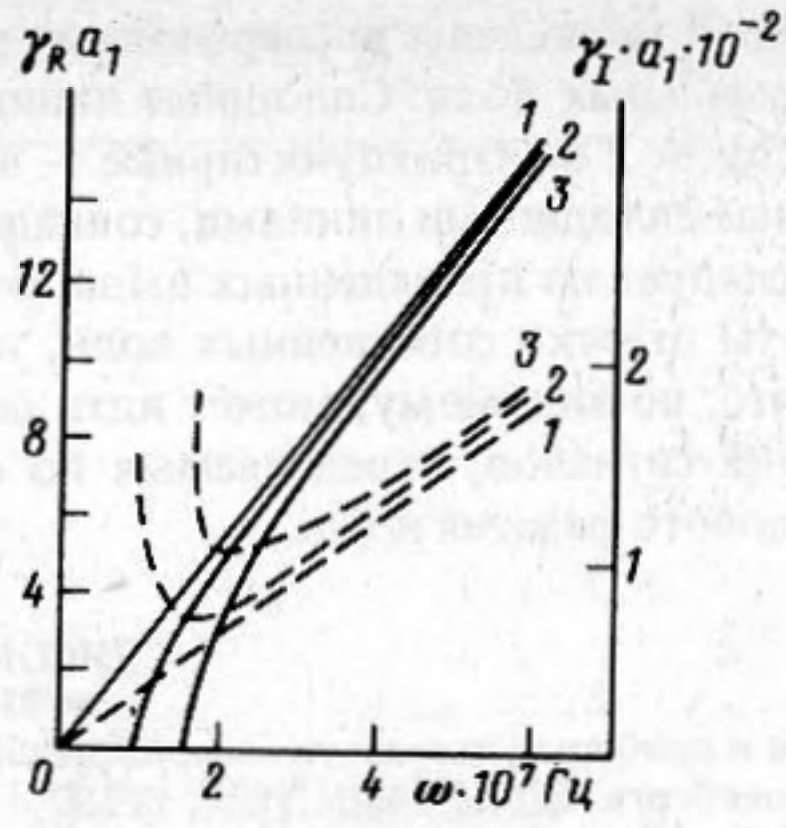

Рис. 2

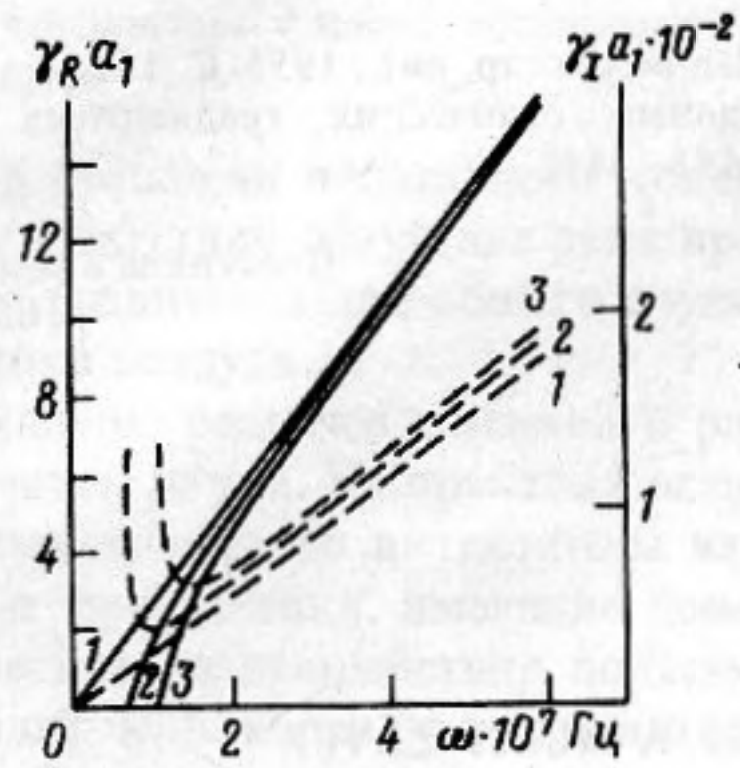

Рис. 3

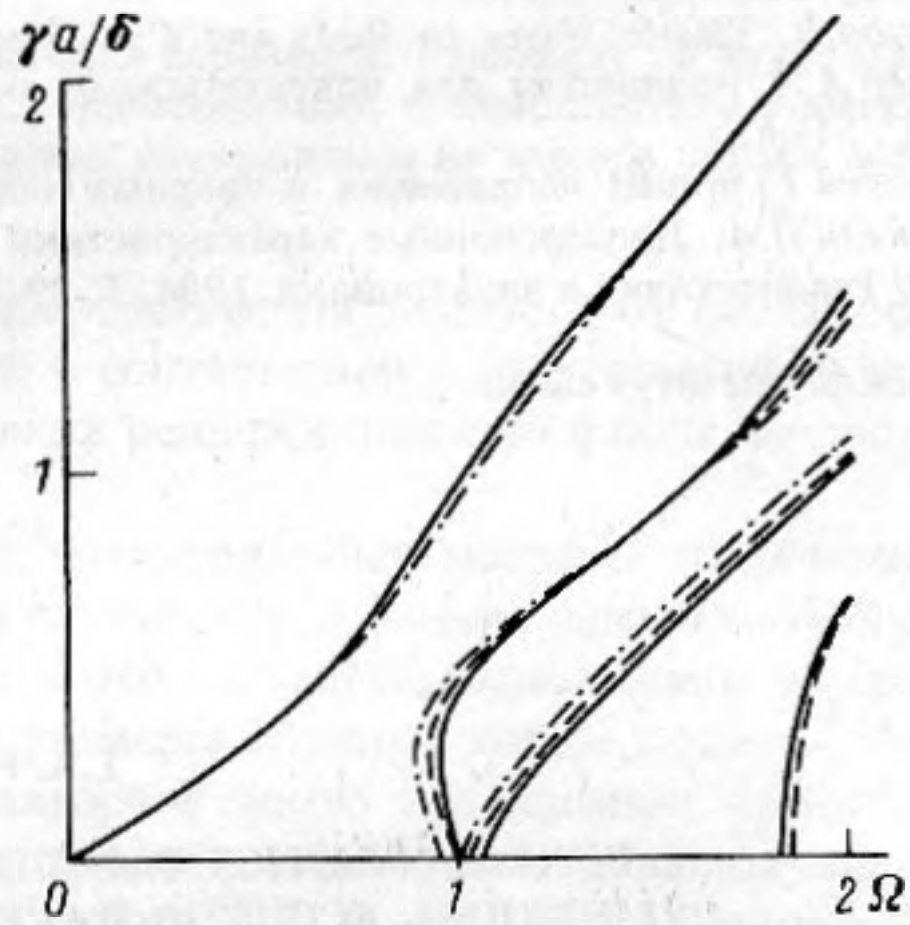

Рис. 4

Таблица 3

№ волновода	a_1, мм	a_2, мм	a_3, мм	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	–	–	0,31	–	–
2	0,5	1	–	0,25	0,31	–
3	0,333	0,667	1	0,2	0,25	0,31

Таблица 4

№ моды	Ω_{c1}	Ω_{c2}	Ω_{c3}	№ моды	Ω_{c1}	Ω_{c2}	Ω_{c3}
0	0	0	0	4	2,6551	2,6032	2,5204
1	1,0000	1,0015	0,9595	5	2,6945	2,6836	2,7185
2	1,0631	1,0088	1,0192	6	3,4772	3,5201	3,5538
3	1,8309	1,8541	1,8683	7	4,2719	4,1007	4,0279
				8	4,2985	4,3462	4,3914

На рис. 4 приведены дисперсионные характеристики первых четырех типов продольных нормальных волн. Сплошные линии соответствуют волноводу № 1, пунктирные – волноводу № 2 и штрихпунктирные – волноводу № 3 из табл. 3. Характеристики, изображенные сплошными линиями, совпадают с приведенными в [1, 3].

Как следует из приведенных выше результатов, конструкция волновода влияет как на частоты отсечки собственных волн, так и на дисперсионные характеристики. Это означает, что, по-видимому, может идти речь о решении задач, связанных с минимизацией искажений сигналов, передаваемых по акустическим волноводам, изменением полосы одномодового режима и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Т. 1. Ч. А / Под ред. Мэзона У.: Пер. с англ. под ред. Розенберга Л.Д. М.: Мир, 1966. С. 592.
2. *Gasiz D.C.* Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves Hollow Circular Cylinders// J. Acoust. Soc. Amer. 1959. V. 31. № 5. P. 568–573.
3. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. С. 284.
4. *Thurston R.* Elastic Waves in Rods and Clad Rods // J. Acoust. Soc. Amer. 1978. V. 64. № 1. P. 1–37.
5. *Олинер А.А.* Волноводы для поверхностных акустических волн. Обзор // ТИИР. 1976. Т. 64. № 5. С. 51–65.
6. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. С. 152.
7. *Френкель Л.А.* Дисперсионные характеристики маломодовых оптических градиентных волокон // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 8. С. 1451–1456.

Московский институт связи

Поступила в редакцию
06.07.90

L.A. Frenkel

CHARACTERISTICS CALCULATION OF A MULTI–LAYER CYLINDRICAL ACOUSTIC WAVEGUIDE TAKING INTO ACCOUNT FRICTION PHENOMENA

The algorithm for characteristics calculation of a cylindrical waveguide is presented. The waveguide is homogeneous through axial and angle coordinates. The algorithm is based on layer matrix multiple and does not require calcualtion of a high–level determinant as in the classical case. The algorithm variants are presented for rod and clad rod. The mathematical model takes into account friction phenomena in a waveguide materials. The Lame coefficients are complex, like in the Foight model. The numerical calculation algorithm is presented for solving the dispersion equation. The complex value of a propagation constant is found by means of a minimization methods. The model calculation results are presented for one, two and three–layer rods. The characteristics of torsion waves and long normal waves are calculated. It's showed that wavegiude characteristics are depended on waveguide design. For example, the size of one–mode band are depended on a number of layer and their mechanical parameters. The calculation for a long–normal waves shows that a dispersion of a low–mode is depended on a wadeguide design. The calculations results demonstrate possibilities of presented algorithm.