АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 38 1992 Вып. 1

УДК 539.6.013.42
© 1992 г.

В.Г. Савин

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Рассмотрена задача о действии плоской нестационарной волны давления на бесконечно длинную круговую пьезокерамическую цилиндрическую оболочку, окруженную и заполненную жидкостями. При описании движения пьезокерамической оболочки и контактирующих с ней жидкостей используются соотношения линейной теории электроупругих оболочек и акустического приближения.

Предложенная методика решения основана на использовании интегрального преобразования Лапласа по времени.

При этом искомые величины определяются из интегральных уравнений Вольтера, которые решаются численно. Разработанный подход иллюстрируется числовым примером.

Подавляющее большинство исследований рассеяния звука пьезокерамическими оболочками проводились в предположении, что волновые поля изменяются по времени по гармоническому закону [1–4]. В нестационарной постановке такие задачи ранее не решались. В работе в акустическом приближении рассматривается падение нестационарной плоской волны давления на бесконечно длинную круговую пьезокерамическую цилиндрическую оболочку, которая окружена и заполнена идеальными сжимаемыми жидкостями. Фронт волны параллелен оси цилиндра. Оболочка поляризована в радиальном направлении электродами, нанесенными на внутреннюю и наружную поверхности. Один из электродов может быть разделен вертикальными разрезами.

В этом случае электрический сигнал, обусловленный деформированием оболочки, снимается с каждой секции отдельно.

Движение цилиндрического преобразователя описывается в рамках модели прикладной теории тонких пьезокерамических оболочек [5] и при этом накладывается условие равенства нулю нормальной составляющей вектора электрической индукции (режим "холостого хода").

С учетом сделанных допущений рассматриваемый переходной процесс описывается следующей системой уравнений:

$$(1+l)\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{\partial W}{\partial\theta} - l\frac{\partial^3 W}{\partial\theta^3} = a\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} - l\frac{\partial^3 U}{\partial\theta^3} + W + l\frac{\partial^4 W}{\partial\theta^4} = bq - a\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\theta^2} = \alpha_i\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Здесь W, U – радиальные и окружные перемещения точек серединной поверхности оболочки, r, θ – полярные координаты, t – время, $q = (P_2 - P_1)$ – действующая на оболочку гидродинамическая нагрузка, P_i, φ_i – давления и волновые потенциалы акустических сред во внешнем пространстве ($i = 1$) и во внутреннем объеме ($i = 2$),

$P_i = -\kappa_i \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t}$, a, b, l, α_i, d – постоянные

$$a = \frac{c_1^2 \gamma}{C_{11} d}, \quad b = \frac{\rho_1 c_1^2}{h C_{11} d}, \quad d = 1 + \frac{e_{13}^2}{C_{11} \epsilon_{33}}, \quad l = \frac{h^2}{12}; \quad \alpha_i = \frac{c_1}{c_i}, \quad \kappa_i = \frac{\rho_i}{\rho_1},$$

где C_{11}, e_{13}, ϵ_{33}, γ – модуль упругости, пьезомодуль, диэлектрическая проницаемость и плотность керамики, h – толщина оболочки, c_i, ρ_i – скорость распространения звука в i-й акустической среде и ее плотность.

На поверхности оболочки ($r = 1$) принимаются граничные условия, обеспечивающие ее безотрывный контакт с жидкостями

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial t} (i = 1, 2). \tag{3}$$

Представим потенциал φ_1 в виде суммы двух функций $\varphi_1 = \Phi_0 + \Phi_1$, где Φ_0 – потенциал падающей, а Φ_1 – отраженной и излученной упругой оболочками волн. В случае действия на оболочку плоской нестационарной волны давления, которая касается ее поверхности в момент времени $t = 0$, Φ_0 имеет вид

$$\Phi_0 = -\int\limits_{1 - r\cos\theta}^{t} Q(x - 1 + r\cos\theta)\, dx\, H(t - 1 + r\cos\theta), \tag{4}$$

где Q – функция, определяющая характер изменения давления за фронтом волны, H – единичная функция Хевисайда.

Отметим, что каждый из потенциалов Φ_0 и Φ_1 удовлетворяет волновому уравнению (2) ($i = 1$).

До взаимодействия падающей волны с оболочкой гидроэлектроупругая система находится в состоянии покоя и начальные условия принимаются нулевыми при $t = 0$

$$W = \frac{\partial W}{\partial t} = U = \frac{\partial U}{\partial t} = \varphi_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0.$$

Постановка задачи приведена в безразмерных обозначениях, согласно которым величины W, U, r, h отнесены к радиусу оболочки R, t – к R/c_1, P_i – к $\rho_1 c_1^2$, φ_i – к Rc_1.

При решении применяется интегральное преобразование Лапласа по времени. Изображения неизвестных функций ищутся в виде рядов по собственным формам колебаний

$$W^L = \sum_{n=0}^{\infty} W_n^L(s) \cos n\theta, \qquad U^L = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^L(s) \sin n\theta,$$
$$\Phi_1^L = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{n1}^L(s, r) \cos n\theta, \qquad \varphi_2^L = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n2}^L(s, r) \cos n\theta. \tag{5}$$

Здесь индексом L обозначены соответствующие трансформанты, s – параметр преобразования Лапласа.

В пространстве изображений общее решение уравнения (2) выражается через модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Далее, разложив Φ_0^L в ряд по $\cos n\theta$ с учетом условий затухания волн, отраженных и излученных оболочкой на бесконечности ($r \to \infty$) и ограниченности возмущений в начале координат ($r \to 0$), получим выражения для потенциалов φ_1^L и φ_2^L в виде

$$\varphi_1^L = -Q^L(s) \frac{2}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{-s\alpha_1} I_n(s, \alpha_1 r) \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^L(s) \frac{1}{s} e^{s\alpha_1} K_n(s, \alpha_1 r) \cos n\theta,$$

$$\varphi_2^L = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^L(s) \frac{1}{s} e^{-s\alpha_2} I_n(s, \alpha_2 r) \cos n\theta, \tag{6}$$

в которых A_n^L, B_n^L суть функции параметра преобразования s, определяемые из граничных условий (3), $\epsilon_0 = 1/2$, $\epsilon_n = 1$ $(n \geqslant 1)$. Подставляя (5) в преобразованные по Лапласу уравнения движения оболочки (1) и трансформированные граничные условия (3), получим систему двух алгебраических уравнений относительно $A_n^L(s)$, $B_n^L(s)$. После инверсии этих уравнений, которая выполнена с использованием теоремы о свертке функций, неизвестные $A_n(t)$, $B_n(t)$ находятся из решения следующей системы интегральных уравнений Вольтера 1 рода:

$$\int_0^t A_n(x)\,G_{n,\,i}(t-x)\,dx - \int_0^t B_n(x)\,F_{n,\,i}(t-x)\,dx = 2\,\epsilon_n \int_0^t Q(x)\,M_{n,\,i}(t-x)\,dx, \qquad (7)$$

где

$$G_{n,\,1} = (\beta_1\kappa_1 - n)g_{1n}(t,z_1) + (\beta_{n2}\kappa_1 - \lambda_{n1}n)g_{3n}(t,z_1) - \lambda_{n2}\,n g_{5n}(t,z_1) +$$
$$+ g_{0,\,n+1}(t,z_1) + \lambda_{n1}g_{2,\,n+1}(t,z_1) + \lambda_{n2}g_{4,\,n+1}(t,z_1),$$

$$G_{n,\,2} = \beta_1\kappa_1 g_{1n}(t,z_1) + \beta_{n2}\kappa_1 g_{3n}(t,z_1),$$

$$F_{n,\,1} = \beta_1\kappa_2 f_{1n}(t,z_2) + \beta_{n2}\kappa_2 f_{3n}(t,z_2),$$

$$F_{n,\,2} = (\beta_1\kappa_2 + n)f_{1n}(t,z_2) + (\beta_{n2}\kappa_2 + \lambda_{n1}n)f_{3n}(t,z_2) + \lambda_{n2}\,n f_{5n}(t,z_2) +$$
$$+ \alpha_2 f_{0,\,n+1}(t,z_2) + \lambda_{n1}\alpha_2 f_{2,\,n+1}(t,z_2) + \lambda_{n2}\alpha_2 f_{4,\,n+1}(t,z_2),$$

$$M_{n,\,1} = (\beta_1\kappa_1 - n)f_{1n}(t,z_1) + (\beta_{n2}\kappa_1 - \lambda_{n1}n)f_{3n}(t,z_1) - \lambda_{n2}\,n f_{5n}(t,z_1) -$$
$$- f_{0,\,n+1}(t,z_1) - \lambda_{n1}f_{2,\,n+1}(t,z_1) - \lambda_{n2}f_{4,\,n+1}(t,z_1),$$

$$M_{n,\,2} = \beta_1\kappa_1 f_{1n}(t,z_1) + \beta_{n2}\kappa_1 f_{3n}(t,z_1),$$

$$\beta_1 = \frac{b}{a},\quad \beta_{n2} = \frac{b(1+l)n^2}{a^2},\quad \beta_{n3} = \frac{bn(1+ln^2)}{a^2},$$

$$\lambda_{n1} = \frac{(1+n^2)(1+ln^2)}{a},\quad \lambda_{n2} = \frac{n^2(1-n^2)^2 l}{a^2},$$

$$z_1 = 1,\quad z_2 = \alpha_2 \quad (i = 1, 2).$$

Вид функций $g_{mn}(t, z_i)$, $f_{mn}(t, z_i)$ можно определить после m-кратного интегрирования функций g_{0n}, f_{0n} соответственно:

$$g_{0n}(t,z_i) = \frac{\operatorname{ch} n \operatorname{arch}\dfrac{z_i+t}{z_i}}{z_i\sqrt{\left(\dfrac{z_i+t}{z_i}\right)^2 - 1}},\qquad f_{0n}(t,z_i) = \frac{\cos n \arccos\dfrac{z_i-t}{z_i}}{\pi z_i\sqrt{1-\left(\dfrac{z_i-t}{z_i}\right)^2}}\,H(2z_i - t).$$

Интегральные уравнения (6) решались численно методом квадратных формул, в результате чего они сводятся к эквивалентным алгебраическим системам с матрицами треугольного вида. После вычисления $A_n(t)$, $B_n(t)$ определяются все интересующие физические характеристики переходного процесса.

Ниже приведены формулы, позволяющие рассчитывать акустические давления P_i, перемещения пьезокерамической оболочки W, U, ее смещение как "жесткого тела" V, разность потенциалов между электродами для случая, когда электроды сплошные U_0, и когда один из электродов имеет два разреза по линиям $\theta = \pm\theta_0$ в меридиальном

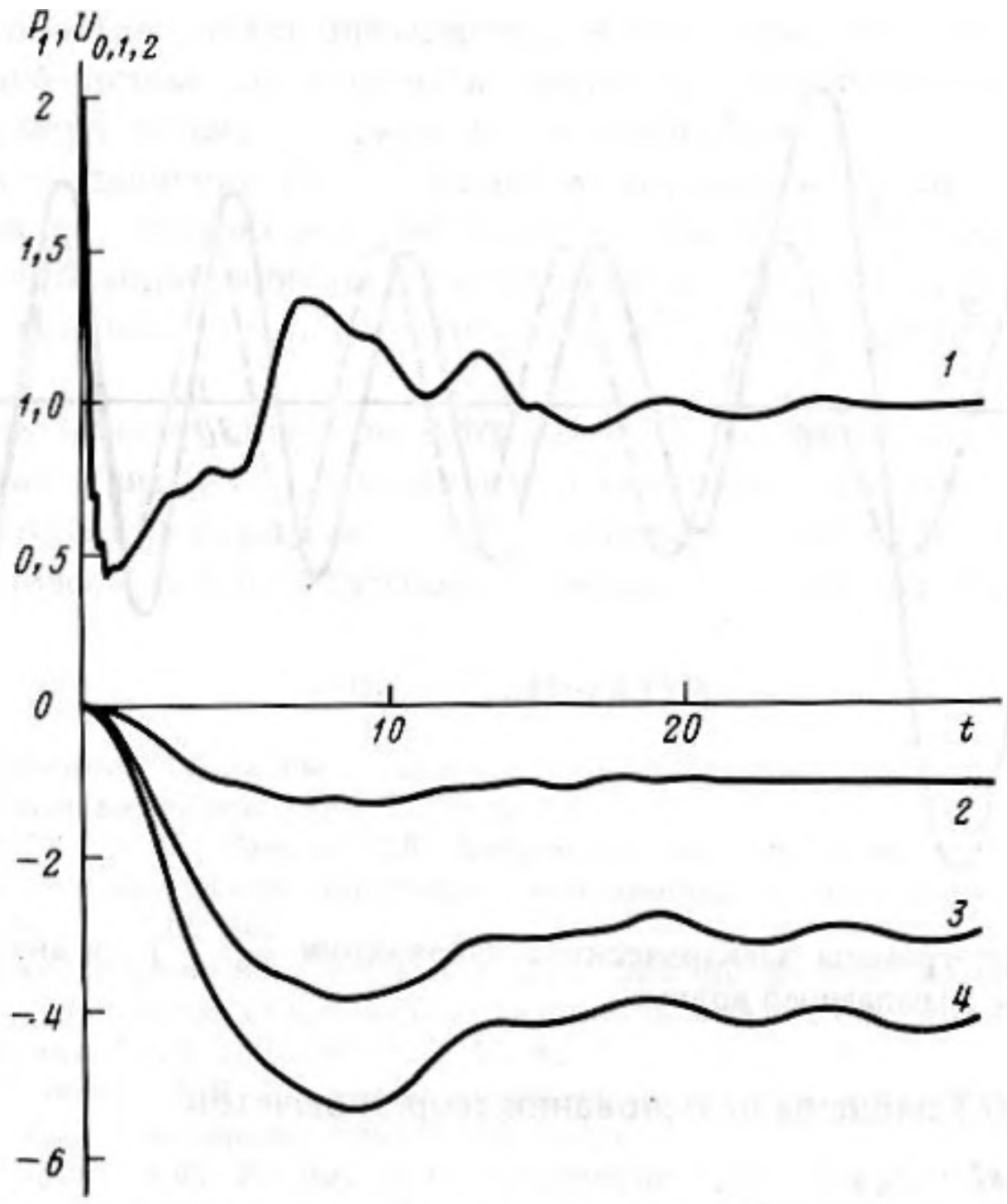

Рис. 1. Осциллограммы акустического давления P_1 – *1* на внешней поверхности оболочки ($h = 0{,}04$; $\theta = 0$) и электрических напряжений U_1 – *2*; U_2 – *3*; U_0 – *4* при падении плоской ступенчатой волны давления единичной амплитуды

направлении $U_1(|\theta| < \theta_0)$ и $U_2(|\theta| > \theta_0)$.

$$P_1(t, r, \theta) = \kappa_1 \sum_{n=0}^{\infty} \{ 2\epsilon_n \int_{r-1}^{t} Q(x - r + 1) f_{0n}(t - x, \alpha_1 r)\, dx -$$

$$- \int_{r-1}^{t} A_n (x - r + 1) g_{0n}(t - x, \alpha_1 r)\, dx \} \cos n\theta,$$

$$P_2(t, r, \theta) = -\kappa_2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha_2(1-r)}^{t} B_n [x - \alpha_2 (1 - r)]\, f_{0n}(t - x, \alpha_2 r)\, dx \cos n\theta,$$

$$W(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{t} q_n(x)\, X_n(t - x)\, dx \cos n\theta,$$

$$U(t, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{t} q_n(x)\, Y_n(t - x)\, dx \cos n\theta, \qquad V(t) = \frac{\kappa_1}{2h} \int_{0}^{t} (t - x)\, q_1(x)\, dx,$$

$q_n = (P_{n_2} - P_{n_1})_{r=1}$ – n-е составляющие разложения гидродинамической нагрузки q в ряд по собственным формам колебаний

$$U_0(t) = 2b_0 h \pi W_0, \; U_0(t) = U_1(t) - U_2(t),$$

$$U_1(t) = 2b_0 h \theta_0 W_0 - 4hb_0 V \sin\theta_0 + 2b_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (nU_n + W_n) \sin n\theta_0,$$

$$U_2(t) = 2b_0 h (\pi - \theta_0) W_0 + 4hb_0 V \sin\theta_0 - 2b_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (nU_n + W_n) \sin n\theta_0.$$

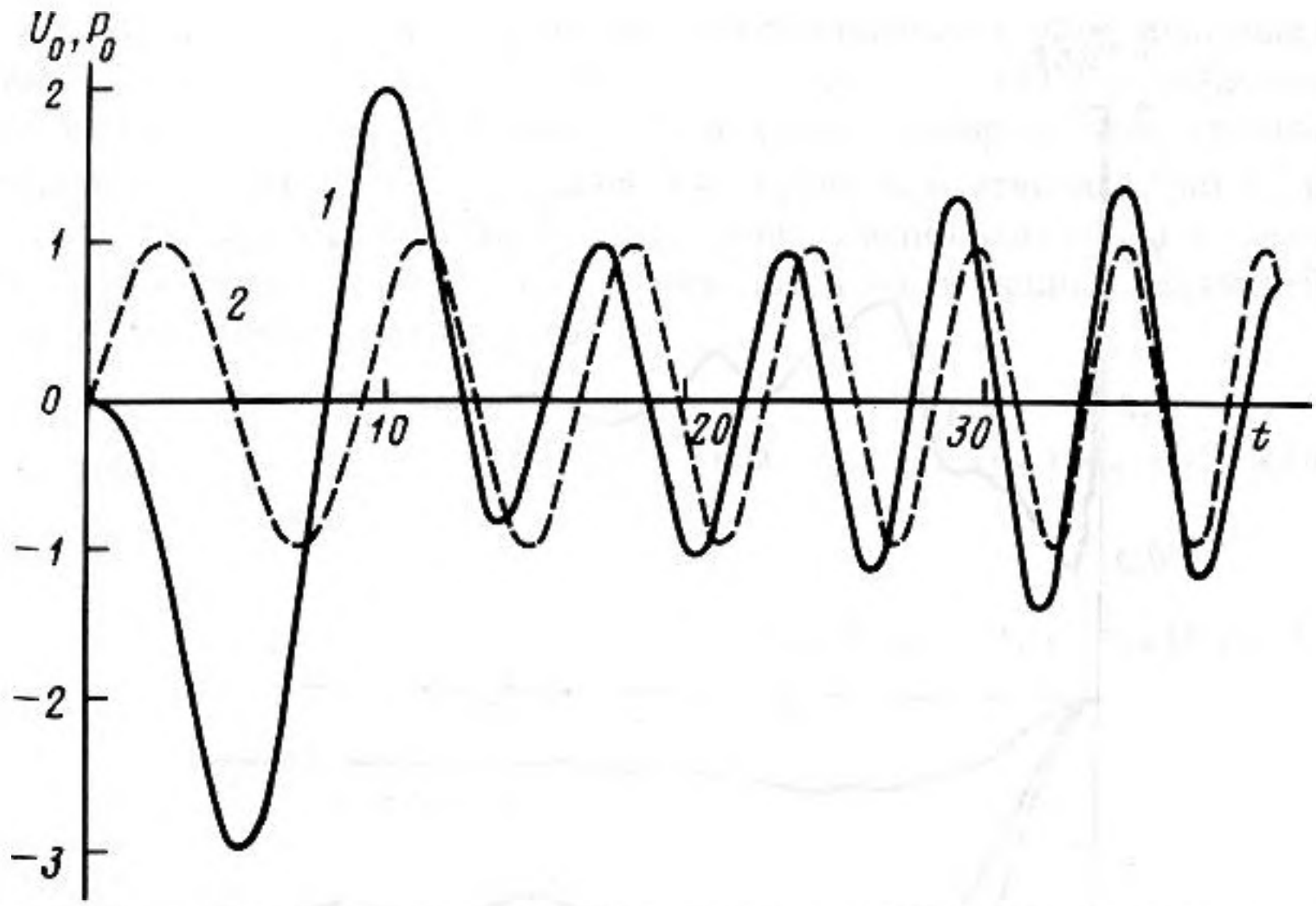

Рис. 2. Осциллограммы электрического напряжения U_0 – *1* и акустического давления P_0 – *2* падающей волны

Функции $X_n(t)$; $Y_n(t)$ найдены на основании теории вычетов

$$X_n(t) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\beta_1 s_i^2 + \beta_{n2}}{4 s_i^3 + 2\lambda_{n1} s_i} e^{s_i t},$$

$$Y_n(t) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\beta_{n3}}{4 s_i^3 + 2\lambda_{n1} s_i} e^{s_i t},$$

$$s_i = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_{n1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_{n1}}{2}\right)^2 - \lambda_{n2}}}, \qquad b_0 = \frac{e_{13} d_{33}}{\epsilon_{33}},$$

где d_{33} – пьезомодуль керамики.

Приведенные соотношения были положены в основу программы расчета на ЭВМ переходных режимов работы находящейся в воде пустотелой пьезокерамической оболочки из материала ЦТБС-3 [6].

На рис. 1 изображена осциллограмма P_1 в точке соприкосновения с оболочкой ($\theta = 0$) плоской ступенчатой волны давления единичной амплитуды.

Для этой же акустической нагрузки на рис. 1 построены осциллограммы электрического напряжения U_0, возникающего на сплошных электродах и напряжений U_1, U_2 для случая, когда один из электродов разделен двумя разрезами ($|\theta_0| = 0{,}25\pi$). Проанализируем полученные результаты.

Прежде всего отметим, что в случае действия импульса прямоугольной формы (рис. 1) вблизи его переднего фронта имеет место резкий всплеск гидродинамического давления, равный удвоенной амплитуде падающей волны.

В последующие промежутки времени возникновение в оболочке изгибных форм колебаний приводит к появлению вторичных всплесков давлений, убывающих по амплитуде по мере затухания механических возмущений в пьезоприемнике, вызванных переходными режимами его работы.

Для временных интервалов, когда передний фронт акустического импульса удалится от оболочки на расстояние, равное 15 радиусам ($t = 17$), давление P_1 становится равным единице. Это вызывает установление на электродах электрических напряжений, величины которых пропорциональны площадям электродов, с которых они снимаются.

Следует отметить, что кривые, приведенные на рис. 1, являются переходными характеристиками соответствующих физических величин для выбранной гидроэлектроупру-

гой системы. Располагая этими значениями, можно при помощи интеграла Дюамеля определять реакцию системы на воздействие импульса любой формы.

В качестве примера на рис. 2 приведена осциллограмма U_0 для этой же оболочки, когда акустическое давление P_0 за фронтом падающей волны в рассматриваемом временном интервале линейно изменяется в полосе частот $0{,}3\,\omega_0 \leqslant \omega \leqslant 0{,}5\,\omega_0$, где ω_0 – частота нулевой моды радиальных колебаний оболочки ($\omega_0 = 2{,}1$).

Как видно из рисунка, осциллограммы U_0 и P_0 существенно отличаются друг от друга.

Эту особенность приема сигналов сложной формы цилиндрическими преобразователями необходимо учитывать, поскольку переходные режимы работы пьезоприемника могут изменять электрическое напряжение, возникающее на его электродах, и не отражать фактическую конфигурацию падающего акустического импульса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сенченко И.В.* Рассеяние звука пьезокерамической цилиндрической оболочкой вблизи жесткой поверхности // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 7. С. 111–114.
2. *Кубенко В.Д., Рябуха Ю.Н., Савина И.В.* Дифракция акустических волн на коаксиальных цилиндрических пьезокерамических оболочках, заполненных вязкой жидкостью // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 10. С. 28–34.
3. *Савина И.В.* Взаимодействие акустических волн с электроупругой системой коаксиальных цилиндрических оболочек содержащей вязкую жидкость и расположенной вблизи плоской границы // Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 10. С. 36–45.
4. *Гринченко В.Т., Сенченко И.В.* Излучение звука частично экранированными пьезокерамическими оболочками // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 2. С. 15–19.
5. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 277 с.
6. Пьезокерамические преобразователи / Под ред. Пугачева С.И. Л.: Судостроение, 1984. 256 с.

Киевский научно-исследовательский институт гидроприборов

Поступила в редакцию 31.01.91

V.G. Savin

TRANSFORMATION OF ACOUSTIC IMPULSES IN ELECTRICAL ONES BY A CYLINDRICAL PIEZOELECTRICAL SHELL

Transient processes in an infinitely long cylindrical piezoelectrical shell with a circular cross-section filled and surrounded by ideal compressible liquids, which are cased by plane unstationary pressure wave are considered. The method of solution of such problems based on using of the Laplas integral transformation in time and subsequant satisfaction of the boundary conditions in the space of originals is suggested. Unknown values are determined on the basis of numerical solutions of the Voltera integral equations. The method developed is illustrated by numerical examples.