УДК 532.529


В.Г. Ковалев, В.Б. Фридлендер

# ВЫНУЖДЕННОЕ РАССЕЯНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ

В ряде работ, выполненных в последнее время, рассмотрены механизмы резонансного нелинейного рассеяния звука на свободной поверхности: параметрическое [1], комбинационное [2], вынужденное комбинационное в присутствии пузырьков газа [3].

В реальном океане всегда присутствуют как низкочастотные, так и высокочастотные шумы [4]. В связи с этим повышенная нелинейность приповерхностного слоя океана, обусловленная наличием большого количества пузырьков газа, может привести к затуханию звука на шумах большей либо меньшей частоты. В этом случае возможно появление распадной неустойчивости первого порядка (вынужденное рассеяние Мандельштама – Бриллюэна) звукового сигнала, обусловливающей нарастание шумовых волн, рассеянных на значительный угол.

В данной работе исследуются подобного рода неустойчивости звука высокой частоты (порядка резонансной частоты пузырьков) на звуковых шумах низкой частоты.

В силу определяющего вклада пузырьковой нелинейности [5, 6], гидродинамической нелинейностью можно пренебречь, при этом система уравнений, описывающая звуковые волны в газожидкостной среде, имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_0^2\,\Delta\varphi + c_0^2 n\,\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

$$\ddot V + \omega_0^2 V - 4\pi R_0\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{(\gamma+1)\,\omega_0^2}{2V_0}\,V^2 + \frac{1}{6V_0}\,(\ddot V V + \dot V^2), \tag{1}$$

где $\varphi$ – гидродинамический потенциал скоростей; $V$ – возмущенный объем пузырька; $R_0$ и $V_0$ – равновесные значения радиуса и объема пузырька соответственно; $c_0$ – невозмущенная скорость звука в жидкости; $n$ – количество пузырьков газа в единице объема; $\omega_0$ – резонансная частота пузырька; $\gamma$ – показатель адиабаты в уравнении состояния газа.

Преобразование системы (1) к гидродинамическому типу

$$\dot\varphi - \psi = 0,\quad \dot\psi - c_0^2\,\Delta\varphi + c_0^2 nU = 0,\quad \dot V - U = 0,$$

$$\dot U + \omega_0^2 V - 4\pi R_0\,\psi = \frac{2\pi R_0}{3V_0}\,V\psi + \frac{U^2}{6V_0} + \frac{(3\gamma+2)\omega_0^2}{6V_0}\,V^2$$

позволяет ввести нормальные переменные $a_{\mathbf k}$ и $b_{\mathbf k}$

$$\psi = \frac{\omega_0^2-\Omega^2}{4\pi R_0}\,(b_{\mathbf k} + b^*_{-\mathbf k}) + \frac{\omega_0^2-\omega^2}{4\pi R_0}\,(a_{\mathbf k} + a^*_{-\mathbf k}),$$

$$\varphi \approx \frac{i(\omega_0^2-\Omega^2)}{4\pi R_0\,\Omega}\,(b_{\mathbf k} - b^*_{-\mathbf k}) + \frac{i(\omega_0^2-\omega^2)}{4\pi R_0\,\omega}\,(a_{\mathbf k} - a^*_{-\mathbf k}),$$

$$V = (b_{\mathbf k} + b^*_{-\mathbf k}) + (a_{\mathbf k} + a^*_{-\mathbf k}),\qquad U = -i\Omega(b_{\mathbf k} - b^*_{-\mathbf k}) - i\omega(a_{\mathbf k} - a^*_{-\mathbf k}),$$

где $\omega$ соответствует высокочастотной части спектра, $\Omega$ – низкочастотной, что приводит к уравнениям взаимодействия высокочастотной волны с низкочастотной [7]

$$\frac{\partial a_{\mathbf k}}{\partial t} + i\omega_{\mathbf k} a_{\mathbf k} = -i\int (\Gamma_{\mathbf k_1\mathbf k\mathbf k_2} b_{\mathbf k_1} + \Gamma_{\mathbf k_1^*\mathbf k_2\mathbf k} b^*_{-\mathbf k_1})\, a_{\mathbf k_2}\,\delta_{\mathbf k-\mathbf k_1-\mathbf k_2}\, d\mathbf k_1\, d\mathbf k_2 -$$

$$- i\int W_{\mathbf k\mathbf k_1\mathbf k_2\mathbf k_3} a^*_{\mathbf k_1} a_{\mathbf k_2} a_{\mathbf k_3}\,\delta_{\mathbf k+\mathbf k_1-\mathbf k_2-\mathbf k_3}\, d\mathbf k_1\, d\mathbf k_2\, d\mathbf k_3, \tag{2}$$

$$\frac{\partial b_{\mathbf k}}{\partial t} + i\Omega_{\mathbf k} b_{\mathbf k} = -i\int \Gamma^*_{\mathbf k\mathbf k_1\mathbf k_2} a_{\mathbf k_1} a_{\mathbf k_2}\,\delta_{\mathbf k-\mathbf k_1-\mathbf k_2}\, d\mathbf k_1\, d\mathbf k_2 .$$

Здесь $\Gamma$ и $W$ – коэффициенты трех- и четырехволнового взаимодействия

$$\Gamma_{\mathbf k\mathbf k_1\mathbf k_2} = \frac{1}{6V_0}\,\frac{\Omega_{\mathbf k}}{\omega_0^2}\,\frac{\omega_0^2-\omega_{\mathbf k}^2}{\omega_{\mathbf k}^2-\Omega_{\mathbf k}^2}\,\Big[3(\gamma+1)\,\omega_0^2 + \omega_{\mathbf k_1}\omega_{\mathbf k_2} - \frac{1}{2}\,(\omega_{\mathbf k_1}^2 + \omega_{\mathbf k_2}^2)\Big],$$

$$U_{\mathbf k\mathbf k_1\mathbf k_2} = \frac{1}{12V_0}\,\frac{\omega_{\mathbf k}}{\omega_0^2}\,\frac{\omega_0^2-\Omega_{\mathbf k}^2}{\Omega_{\mathbf k}^2-\omega_{\mathbf k}^2}\,\Big[3(\gamma+1)\,\omega_0^2 - \omega_{\mathbf k_1}\omega_{\mathbf k_2} - \frac{1}{2}\,(\omega_{\mathbf k_1}^2 + \omega_{\mathbf k_2}^2)\Big],$$

$$U_{\mathbf k\mathbf k_1\mathbf k_2} = \frac{i}{3}\,(U_{\mathbf k\mathbf k_1\mathbf k_2} + U_{\mathbf k_1\mathbf k\mathbf k_2} + U_{\mathbf k_2\mathbf k_1\mathbf k}),$$

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \frac{1}{12V_0}\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_0^2}\frac{\omega_0^2-\Omega_{\mathbf{k}}^2}{\Omega_{\mathbf{k}}^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\left[3(\gamma+1)\,\omega_0^2+\omega_{\mathbf{k}_1}\omega_{\mathbf{k}_2}-\frac{1}{2}(\omega_{\mathbf{k}_1}^2+\omega_{\mathbf{k}_2}^2)\right],$$

Общий вид коэффициента $W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$ через $U$ и $V$ выписан в [8], для спектрально узкого волнового пакета $(k_i \sim k_0)W$ примет вид

$$W_{\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0} = -2\left[\frac{U^2_{2\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0}}{\omega_{2\mathbf{k}_0}+2\omega_{\mathbf{k}_0}}+\frac{V^2_{2\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0}}{\omega_{2\mathbf{k}_0}-2\omega_{\mathbf{k}_0}}+4\frac{V^2_{\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0 0}}{\omega(0)}\right],$$

$$\omega(0)=\omega_1=\sqrt{\omega_0^2+4\pi R_0 c_0^2 n}.$$

В дальнейшем нас будет интересовать только коэффициент $\Gamma$, который в случае спектрально узкого высокочастотного волнового пакета $(k_i \sim k_0)$ принимает вид

$$\Gamma_{\mathbf{k}\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0} = (\gamma+1)/(2)\,(\Omega_{\mathbf{k}})/(V_0)\,(\omega_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2)/(\omega_{\mathbf{k}}^2-\Omega_{\mathbf{k}}^2).$$

Анализ уравнений (2) с позиций [7] показывает, что неустойчивость исходной высокочастотной волны связана с возникновением пары высокочастотных волн с волновыми векторами $\mathbf{k}_0 \pm \mathbf{p}$ и двумя низкочастотными волнами с волновыми векторами $\pm\,\mathbf{p}$. В фурье-пространстве вблизи поверхности $\omega_{\mathbf{k}_0} = \omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}} + \Omega_{\mathbf{p}}$ в пределе $A^2 \to 0$, где $A$ – амплитуда основной волны высокочастотного пакета, можно получить условие неустойчивости пакета по отношению к данному возмущению [7]

$$(\omega_{\mathbf{k}_0}-\omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}}+\Omega_{\mathbf{p}})^2 < 4|A|^2\,|\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{k}_0-\mathbf{p},\mathbf{k}_0}|^2.$$

Максимум инкремента возникающей неустойчивости

$$\gamma_{\max} = |A|\,|\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{k}_0-\mathbf{p},\mathbf{k}_0}| = \frac{3}{2}\frac{A}{V_0}\frac{c_0^2\epsilon_0(\gamma+1)p}{R_0^2(\omega_1^2-c_0^2p^2)}, \tag{3}$$

где

$$\epsilon_0 = nV_0,\quad \omega_1^2=\omega_0^2+\frac{3\epsilon_0 c_0^2}{R_0^2}.$$

Численные оценки (3) показывают, что для реальных условий (приповерхностный слой океана)

$$\epsilon_0 \sim 10^{-6},\quad \omega_1, \omega_0 \sim 10^5\ \text{с}^{-1},\quad c_0 = 1500\ \text{м/с},$$

$$R_0 \sim 10^{-4}\ \text{м},\quad \gamma = 1{,}4,\quad A/V_0 = 0{,}1,\quad \lambda = \frac{2\pi}{p} \sim 10^2\ \text{м},$$

$$\gamma_{\max} \approx 0{,}6\ \text{с}^{-1}.$$

Учитывая, что основной вклад в механизм нелинейного взаимодействия вносят резонансные пузырьки, а также распределение пузырьков по размерам, полученную оценку (4) необходимо уменьшить, по меньшей мере, на один порядок.

Таким образом, времена рассеяния звука на пузырьках и на поверхности жидкости могут оказаться соизмеримыми, что требует учета обоих процессов при исследованиях вынужденного комбинационного рассеяния звука на поверхности океана [2] и генерации низкочастотного звука при возбуждении поверхностных возмущений ультразвуковыми пучками [9].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Гончаров В.В., Наугольных К.А., Рыбак С.А.* О возбуждении поверхностных волн звуком // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15. № 5. С. 431–434.
2. *Варавин В.Ю., Наугольных К.А., Рыбак С.А.* О генерации поверхностных волн при комбинационном рассеянии звука // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1970. Т. 16. № 15. С. 510–516.
3. *Ковалев В.Г., Наугольных К.А., Рыбак С.А., Фридлендер В.Б.* О возбуждении поверхностных волн звуком в жидкости с пузырьками газа // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 542 – 543.
4. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 264 с.
5. *Заболотская Е.А., Солуян С.И.* Излучение гармоник и комбинационных частот воздушными пузырьками // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 3. С. 472–474.
6. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1974. 287 с.
7. *Захаров В.Е., Рубенчик А.М.* О нелинейном взаимодействии высокочастотных и низкочастотных волн // ЖПМТФ. 1972. № 5. С. 84–98.

8. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Гамильтоновский формализм для систем гидродинамического типа: Препринт № 186. Новосибирск.: ИАЭ СО АН СССР, 1982. 50 с.
9. *Наугольных К.А., Рыбак С.А., Третьякова С.Ю.* Генерация низкочастотного звука при возбуждении поверхностных возмущений ультразвуковыми пучками // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 6. С. 1100–1103.

Институт импульсных процессов и технологий
Академии наук УССР

Поступило в редакцию
09.11.88
После исправления
02.03.90

УДК 534.26


**С.И. Ковинская, Г.И. Меделян**

# О ПРОДОЛЬНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТОРЦЕВЫМИ ПЛАСТИНАМИ

Большое число инженерных конструкций представляет собой цилиндрические оболочки с торцевыми пластинами, возбуждаемыми силами, действующими в одной из пластин и направленными параллельно оси оболочки. Рассмотрим механическую проводимость такой конструкции с целью определения резонансных частот продольных колебаний и конструктивных возможностей изменения положений резонансов и уровней этих колебаний. Введем упрощения, которые позволят сократить вычисления и получить аналитическое решение задачи: оболочка рассматривается как полая цилиндрическая балка; возбуждение одной из пластин обладает центральной симметрией; пластины, контактирующие с оболочкой, неограничены (рис. 1, *а*). Положение, альтернативное по отношению к каждому из предложенных упрощений, приведет лишь к некоторому изменению характеристик, не меняя сути результатов. Система уравнений, описывающая колебания пластин и балки, имеет вид:

$$\nabla^2 w_1 - k_1^4 w_1 = \frac{f_0}{D_1 2\pi r}\,\delta(r),$$

$$\nabla^4 w_2 - k_2^4 w_2 = 0, \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = 0 \tag{1}$$

и решается при следующих условиях контакта:

$$u|_{x=0} = w_1|_{r=a}, \qquad u|_{x=l} = w_2|_{r=a},$$

$$q_1 = -ES\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0}\frac{1}{2\pi a}, \qquad q_2 = ES\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=l}\frac{1}{2\pi a}. \tag{2}$$

При этом обозначено: $w_i$ – поперечные перемещения пластины ($i = 1;\ 2$), $u(x)$ – продольные перемещения балки, расположенной при $0 \leqslant x \leqslant l$, $k_i$ – волновые числа колебаний пластины ($k_i^4 = \omega^2 m_i/D_i$, $m_i$, $D_i$ – поверхностная масса и изгибная жесткость пластин), $S$ – площадь сечения балки, $a$ – ее радиус, (при этом считается, что толщина балки $\delta \ll a$), $q_i$ – плотность силы, действующей со стороны пластины на балку, $k$ – волновое число продольных колебаний балки.

Представим решение для колебаний балки и пластин в виде [1]:

$$u(x) = A\cos kx + B\sin kx,$$

$$w_1(r) = \frac{if_0}{8\sqrt{m_1 D_1}\,\omega}\left[H_0^{(1)}(k_1 r) + \frac{2i}{\pi}K_0(k_1 r)\right] +$$

$$+\begin{cases} i\,\dfrac{\pi a q_1}{4\sqrt{m_1 D_1}\,\omega}\left[J_0(ak_1)H_0^{(1)}(k_1 r) + \dfrac{2i}{\pi}K_0(k_1 r)I_0(k_1 a)\right], & r \geqslant a,\\[2ex] i\,\dfrac{\pi a q_1}{4\sqrt{m_1 D_1}\,\omega}\left[J_0(k_1 r)H_0^{(1)}(k_1 a) + \dfrac{2i}{\pi}I_0(k_1 r)K_0(k_1 a)\right], & r \leqslant a,\end{cases} \tag{3}$$

$$w_2(r) = \begin{cases} i\,\dfrac{\pi a q_2}{4\sqrt{m_2 D_2}\,\omega}\left[J_0(ak_2)H_0^{(1)}(k_2 r) + \dfrac{2i}{\pi}K_0(k_2 r)I_0(k_2 a)\right], & r \geqslant a,\\[2ex] i\,\dfrac{\pi a q_2}{4\sqrt{m_2 D_2}\,\omega}\left[J_0(rk_2)H_0^{(1)}(ak_2) + \dfrac{2i}{\pi}I_0(k_2 r)K_0(k_2 a)\right], & r \leqslant a.\end{cases}$$