АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 38 1992 Вып. 1

УДК 534.222:533.951
© 1992 г.

С.В. Корсунский

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

Рассматривается распространение ограниченных акустических возмущений конечной амплитуды в электропроводящей газожидкостной среде, подверженной действию постоянного магнитного поля. В квазиоптическом приближении получено нелинейное уравнение типа Хохлова–Заболотской–Кузнецова, дополненное членами, описывающими эффекты МГД-взаимодействия и дисперсии волн. В рамках такой модели анализируется влияние эффектов дисперсии и диссипации на параметры и структуру слабых ударных волн.

Исследование нелинейных волновых процессов в проводящих газожидкостных средах, подверженных действию магнитного поля, представляет значительный интерес при разработке бесконтактных методов диагностики и способов управления динамическими процессами в двухфазных гидродинамических системах. Теория звуковых пучков применительно к непроводящим однофазным средам рассматривалась в [1–3]. В [4] некоторые результаты этой теории были обобщены на случай электропроводящих жидкостей, подверженных действию магнитного поля. Распространение возмущений конечной амплитуды в газо- и парожидкостных непроводящих средах исследовалось в [5, 6]. В [7] численно анализировалось распространение коротких волн в электропроводной жидкости с пузырьками газа.

В настоящей работе рассматривается распространение ограниченных звуковых пучков конечной амплитуды в электропроводящей несжимаемой жидкости с пузырьками газа при действии постоянного магнитного поля. Анализ проводится на основе уравнений магнитной гидродинамики гомогенной изотропной газожидкостной среды. Методом медленно меняющегося профиля получено уравнение типа Хохлова–Заболотской–Кузнецова (ХЗК), дополненное членами, описывающими эффекты МГД-взаимодействия и дисперсии волн. Исследуется влияние газосодержания и электропроводности жидкой фазы на эволюцию акустических возмущений.

Уравнения магнитной гидродинамики гомогенной газожидкостной среды записываются в виде [4, 7, 8]

$$\rho(\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}) = -\nabla p + \mu(\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{H} + \eta\Delta\boldsymbol{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}), \tag{1}$$

$$\mathbf{H}_t = \nu_m\Delta\mathbf{H} + \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H}), \tag{2}$$

$$\rho_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\rho + \rho(\nabla\cdot\mathbf{v}) = 0, \tag{3}$$

$$p = p_g - \rho_f\left(R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right) - 4\eta R^{-1}\frac{dR}{dt}, \tag{4}$$

$$\rho = \rho_f(1-\beta) + \rho_g\beta, \tag{5}$$

$$\frac{\rho_g\rho}{\rho_f(1-\beta)} = \mathrm{const}, \tag{6}$$

$$p_g = p_0 \left(\frac{\rho_g}{\rho_{0g}} \right)^{\gamma}, \tag{7}$$

$$\rho_g R^3 = \text{const}. \tag{8}$$

Здесь ρ, $\mathbf{v} = (u, v, w)$, p – плотность, скорость и давление смеси, $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля, η – динамическая вязкость, ζ – объемная вязкость, $\nu_m = 1/\mu\sigma$, μ – магнитная проницаемость, σ – электропроводность жидкости, ρ_f, ρ_g – плотность жидкости и газа соответственно, p_g – давление в газе, R – радиус пузырька, β – объемное газосодержание ($\beta = 4\pi R^3 n/3$, n – количество пузырьков газа в единице объема смеси), p_0, ρ_{0g} – давление в смеси и плотность газа в невозмущенном состоянии. Соотношения (1)–(8) получены при целом ряде упрощающих предположений. Так, жидкость полагается несжимаемой (ρ_f = const) ненамагничиваемой, электрически- и магнитоизотропной, эффектом Холла и токами смещения Максвелла пренебрегаем. Предполагается, что пузырьки газа распределены в жидкости равномерно, газ является непроводящим, процесс сжатия газа – адиабатическим, магнитные проницаемости жидкости и газа равны между собой. Уравнения (6), (8) отражают предположения о том, что масса газа на единицу массы жидкости и масса единичного изолированного пузырька остаются постоянными.

Уравнения (4)–(8) с учетом соотношений $\rho_g \ll \rho_f$, $\rho \approx \rho_f(1-\beta)$, которые выполняются для большинства реальных газожидкостных сред, приводятся к двум уравнениям для плотности и давления смеси

$$\rho = \frac{\rho_0}{1-\beta_0} \left[1 + \frac{\beta_0}{1-\beta_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 \right]^{-1}, \tag{9}$$

$$p = p_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \frac{\rho_0}{1-\beta_0} \left(R \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right) - 4\eta R^{-1} \frac{dR}{dt},$$

где $\rho_0 = \rho_f(1-\beta_0)$ – плотность смеси в невозмущенном состоянии, β_0 – начальное газосодержание. Следует отметить, что соотношения (4)–(8), (9) справедливы при условиях [9]

$$R_0 \ll L_b \ll \lambda, \qquad \beta_0 \ll 1,$$

где λ – характерная длина звуковой волны, L_b – характерное расстояние между пузырьками, R_0 – начальный радиус пузырька.

Предполагая в дальнейшем, что движение жидкости является безвихревым ($\Delta \times \mathbf{v} = 0$), представим функции $\mathbf{v}$, ρ, $\mathbf{H}$, R, p в виде суммы невозмущенной и возмущенной составляющих

$$\mathbf{v} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{v}', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}',$$

$$p = p_0 + p', \quad R = R_0 + R'$$

и полагаем $|f'|/|f| \ll 1$, $\mathbf{U}_0 = 0$, $\mathbf{H}_0 = (H_0\cos\theta, H_0\cos\psi\sin\theta, \mathbf{H}_0\sin\psi\sin\theta)$, $\theta = (\mathbf{H}_0, Ox) \neq 0$, $\psi = (\mathbf{H}_0, Oy)$.

Тогда из уравнений (1)–(3), (9) с точностью до величин второго порядка малости получаем

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}_t = -\nabla p + P_H(\nabla \times \mathbf{h}) \times \mathbf{H}_0 + \nu\Delta\mathbf{v},$$

$$\rho_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\rho + \nabla\cdot\mathbf{v} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0,$$

$$\mathbf{h}_t = \nu_m\Delta\mathbf{h} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0), \quad \rho = -3\beta_0 R + 3\beta_0(3\beta_0 - 1)R^2, \tag{10}$$

$$p = -3\beta_0 R - 6\alpha\beta_0 \frac{d^2R}{dt^2} - \nu_0 \frac{dR}{dt} + \frac{3\beta_0(3\gamma+1)}{2} R^2 -$$

$$- 6\alpha\beta_0 \left(R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \right) + \nu_0 R \frac{dR}{dt}.$$

Здесь введены безразмерные величины по формулам (звездочки опущены)

$$\rho^* = \rho'/\rho_0,\ \ \mathbf{h}^* = \mathbf{h}'/H_0,\ \ x^* = x/L,\ \ R^* = R'/R_0,\ p^* = p'/\rho_0 c_0^2,\ \ \mathbf{v}^* = \mathbf{v}'/c_0,\ t^* = tc_0/L$$

и обозначено $\nu_m = R_m^{-1}$, $R_m = \mu\sigma c_0 L$; $c_0^2 = \gamma p_0/\rho_0\beta_0$, $\nu_0 = 4\eta/\rho_0 c_0 L$, $\nu = R_e^{-1}$; $R_e = \rho_0 c_0 L/(\zeta + 4\eta/3)$; $\alpha = R_0^2/6L^2(1-\beta_0)\beta_0$, $P_H = \mu H_0^2/\rho_0 c_0^2$, где L – характерный масштаб плановых координат.

Известно, что при распространении ограниченных акустических возмущений конечной амплитуды эффекты нелинейности и дифракции приводят к медленным изменениям формы и амплитуды волны как вдоль направления ее распространения, так и поперек [1–3]. Полагая, что изменение характеристик магнитозвукового поля поперек пучка происходит быстрее, чем вдоль, представим решения уравнений (10) в виде [2–4]

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}(\epsilon x,\ \sqrt{\epsilon}\, y,\ \sqrt{\epsilon}\, z,\ \tau = t - x),$$

где $\mathbf{G} = (u,\ v,\ w,\ \rho,\ p,\ \mathbf{h},\ R)$ – вектор искомых функций, ϵ – малый параметр, характеризующий амплитуду возмущений поля: $\rho,\ u,\ \mathbf{h},\ p,\ R \sim \epsilon$. Кроме того, в дальнейшем предполагается, что $v,\ w \sim \epsilon\sqrt{\epsilon},\ P_H,\ \nu,\ \nu_0,\ \nu_m,\ \alpha \sim \epsilon$. Представим искомые функции в виде разложения по степеням ϵ

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \epsilon\mathbf{G}_1 + \ldots. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10) и приравнивая члены при одинаковых степенях ϵ, в двух низших порядках получаем определяющие уравнения для величин нулевого и первого приближений, которые приводятся к разрешающей системе уравнений относительно $\rho_0,\ h_{20},\ h_{30}$ (нулевой индекс для простоты записи опускается)

$$(\rho_x - \frac{\gamma+1}{2\beta_0}\rho\rho_\tau - \delta\rho_{\tau\tau} - \alpha\rho_{\tau\tau\tau})_\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta_\perp\rho + \frac{P_H}{2}(H_{02}h_{2\tau} + H_{03}h_{3\tau})_\tau, \tag{12}$$

$$(h_2 + H_{02}\rho)_\tau = \nu_m h_{2\tau\tau},\ \ (h_3 - H_{03}\rho)_\tau = \nu_m h_{3\tau\tau}. \tag{13}$$

Здесь $\Delta_\perp = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, $H_{02},\ H_{03}$ – нормированные компоненты невозмущенного магнитного поля $\mathbf{H}_0$ по осям y и z соответственно ($H_{02} = \cos\psi\sin\theta$, $H_{03} = \sin\psi\sin\theta$), $\delta = \nu/2 + \nu_0/6\beta_0$. При отсутствии магнитного поля ($P_H = 0$) из (12) получаем уравнение типа ХЗК для газожидкостной среды

$$(\rho_x - \frac{\gamma+1}{2\beta_0}\rho\rho_\tau - \delta\rho_{\tau\tau} - \alpha\rho_{\tau\tau\tau})_\tau = \frac{1}{2}\Delta_\perp\rho. \tag{14}$$

Уравнение (14) отличается от известного уравнения ХЗК величиной параметров нелинейности и диссипации, а также наличием дополнительного члена, описывающего дисперсию акустических возмущений, связанную с конечными размерами пузырьков газа. В одномерном случае уравнение (14) сводится к уравнению Бюргерса – КдВ, полученному в работе [6], а при дополнительном предположении $\delta = 0$ – к уравнению КдВ, выведенному в [5, 8]. Отметим также, что параметры нелинейности, дисперсии и диссипации волн в уравнении (14) обратно пропорциональны величине объемного газосодержания. Этот результат объясняется специфическим механизмом передачи акустических возмущений в газожидкостной среде за счет радиальных колебаний пузырьков газа [5–9].

При наличии внешнего магнитного поля ($P_H \neq 0$) система уравнений (12), (13) может быть сведена к одному уравнению типа ХЗК в двух предельных случаях, связанных с величиной магнитного числа Рейнольдса R_m [4]. При $R_m \gg 1$ ($\nu_m \ll 1$, приближение идеальной проводимости жидкости) из (13) находим

$$h_2 = H_{02}(\rho + \nu_m\rho_\tau) + O(\nu_m^2),\qquad h_3 = H_{03}(\rho + \nu_m\rho_\tau) + O(\nu_m^2)$$

и, таким образом,

$$(\rho_x - c_H\rho_\tau - \frac{\gamma+1}{2\beta_0}\rho\rho_\tau - \delta_m\rho_{\tau\tau} - \alpha\rho_{\tau\tau\tau})_\tau = \frac{1}{2}\Delta_\perp\rho, \tag{15}$$

где $c_H = P_H\sin^2\theta/2$, $\delta_m = \delta + \nu_m P_H\sin^2\theta/2$. Отсюда видно, что в случае сильной проводимости жидкой фазы смеси наличие магнитного поля приводит к увеличению скорости распространения возмущений и дополнительной диссипации волн за счет магнитогидродинамических эффектов. При $R_m \ll 1$ (приближение слабой проводимости) из (13) получаем

$$h_{2\tau} = R_m H_{02}\rho + O(R_m^2), \qquad h_{3\tau} = R_m H_{03}\rho + O(R_m^2).$$

Следовательно, с точностью до величин $O(R_m^2)$ имеем

$$(\rho_x - \frac{\gamma+1}{2\beta_0}\rho\rho_\tau - \delta\rho_{\tau\tau} - \alpha\rho_{\tau\tau\tau} + S\rho)_\tau = \frac{1}{2}\Delta_\perp\rho, \tag{16}$$

где $S = P_H R_m\sin^2\theta/2$ – приведенное число Стюарта (параметр МГД-взаимодействия). Проанализируем полученные приближения.

Уравнение (15) представляет собой обобщение на многомерный случай уравнения Бюргерса – Кортевега – де Вриза (БКдВ). В одномерном приближении (без учета поперечной дифракции в пучке) оно приводится к стандартному уравнению БКдВ

$$\varphi_x - \varphi\varphi_\xi - \delta_m\varphi_{\xi\xi} - \alpha\varphi_{\xi\xi\xi} = 0,$$

где $\varphi = (\gamma+1)\rho/2\beta_0$, $\xi = \tau + c_H x$. Решения этого уравнения исследованы достаточно подробно [6, 10]. В зависимости от соотношения параметров δ_m и α оно описывает слабые ударные волны с монотонной (при $\delta_m^2 > 2\alpha\varphi_0$, $\varphi_0 = \varphi(-\infty)$) или осциллирующей (при $\delta_m^2 < 2\alpha\varphi_0$) структурой. Преобразование Бэклунда для уравнения БКдВ и его точное стационарное решение типа "кинк" было установлено в работе [11] и представляется в виде

$$\varphi = -\frac{3\alpha}{25\delta_m}\exp(-\chi)\,\mathrm{sech}^2(\chi/2),$$

$$\chi = \frac{\alpha}{5\delta_m}(\xi - \frac{6\alpha^2}{25\delta_m}x).$$

Точное решение двумерного уравнения БКдВ

$$(\varphi_x - \varphi\varphi_\xi - \delta_m\varphi_{\xi\xi} - \alpha\varphi_{\xi\xi\xi})_\xi = \frac{1}{2}\varphi_{yy}$$

записывается аналогичным образом [12], но при этом

$$\chi = \frac{\alpha}{5\delta_m}(\xi - ax - by),$$

где $a + b^2/2 = 6\alpha^2/25\delta_m$, $b = \mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь распространение двумерного гауссового пучка в слабопроводящей газожидкостной среде. Постановка задачи сводится к решению уравнения

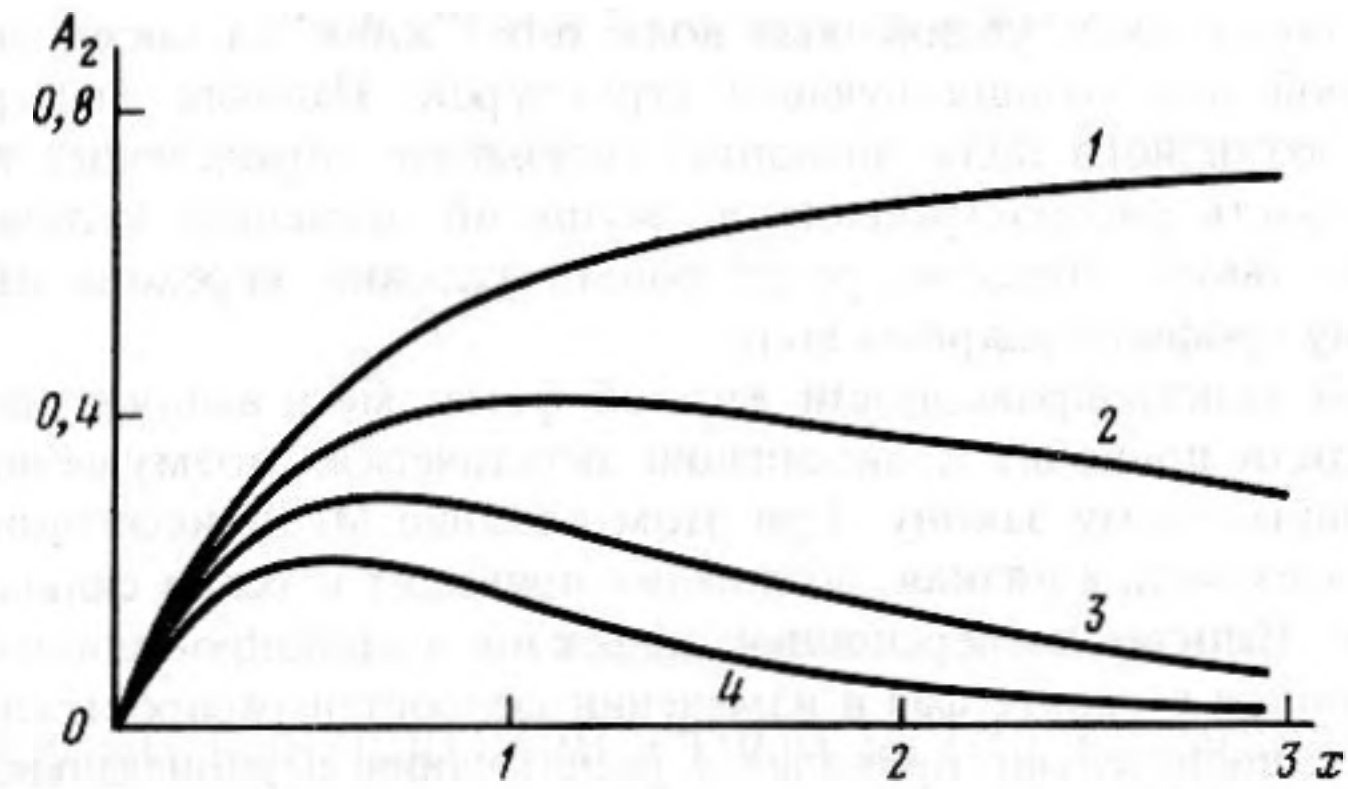
$$(\varphi_x - \varphi\varphi_\tau - \delta\varphi_{\tau\tau} - \alpha\varphi_{\tau\tau\tau} + S\varphi)_\tau = \frac{1}{2}\varphi_{yy} \tag{17}$$

с граничным условием

$$\varphi = \epsilon e^{-y^2}\sin\tau, \qquad x = 0. \tag{18}$$

Решение задачи (17), (18) будем искать в виде асимптотического разложения

$$\varphi = \epsilon\varphi_1 + \epsilon^2\varphi_2 + \ldots \tag{19}$$



Амплитуда второй гармоники на оси пучка при: *1* – $\alpha = \delta = S = 0$, *2* – $\alpha = \delta = 0{,}05$, $S = 0{,}1$, *3* – $\alpha = 0{,}05$, $\delta = 0{,}03$, $S = 0{,}4$, *4* – $\alpha = 0{,}05$, $\delta = 0{,}03$, $S = 0{,}6$

Подставляя (19) в (17), (18) и группируя члены при одинаковых степенях ϵ, получаем уравнения и граничные условия для функций первого и второго приближений

$$(\varphi_{1x} - \delta\varphi_{1\tau\tau} - \alpha\varphi_{1\tau\tau\tau} + S\varphi_1)_\tau = \frac{1}{2}\varphi_{1yy},$$

$$\varphi_1 = e^{-y^2}\sin\tau, \quad x = 0, \tag{20}$$

$$(\varphi_{2x} - \delta\varphi_{2\tau\tau} - \alpha\varphi_{2\tau\tau\tau} + S\varphi_2)_\tau - \frac{1}{2}\varphi_{2yy} = \frac{1}{2}(\varphi^2)_{\tau\tau}, \quad \varphi_2 = 0, \quad x = 0. \tag{21}$$

Решения задач (20), (21) находятся с помощью интегрального преобразования Фурье [1] и записываются в виде

$$\varphi_1 = (1 + 4x^2)^{-1/4}\exp\left[-(\delta + S)x - \frac{y^2}{1 + 4x^2}\right]\sin\left(\tau - \right.$$

$$\left. - \alpha x - \frac{2xy^2}{1 + 4x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x\right), \tag{22}$$

$$\varphi_2 = \operatorname{Re}\left\{\exp\left(2i\tau - \frac{2y^2}{1 - 2ix} - (4\delta + S + 8i\alpha)x + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \omega\right)\sqrt{\frac{\pi}{4\omega(1 - 2ix)}}\left[\operatorname{erf}(\sqrt{\omega}) - \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(1 - 2ix)})\right]\right\}, \tag{23}$$

где $\omega = i(S - 2\delta - 6i\alpha)/2$, erf – интеграл вероятностей. На оси пучка амплитуда второй гармоники определяется выражением

$$A_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 + 4x^2)^{-1/4}\exp\left[-(4\delta + S)x + 3\alpha\right] \cdot$$

$$\cdot\left|\frac{\operatorname{erf}(\sqrt{\omega}) - \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(1 - 2ix)})}{\sqrt{\omega}}\right|. \tag{24}$$

Результаты расчетов по формуле (24) приведены на рисунке. Видно, что увеличение вязкости или электропроводности жидкости приводит к существенному уменьшению амплитуды второй гармоники.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. Баланс нелинейных, диссипативных и дисперсионных эффектов при распространении акустических возмущений в сильно проводящей жидкости с пузырьками газа обусловливает

формирование в такой среде уединенных волн типа "кинк", а также слабых ударных волн с монотонной или осциллирующей структурой. Наличие электропроводности и приложенного магнитного поля позволяет оказывать управляющее воздействие на амплитуду и скорость распространения возмущений, изменять величину параметра диссипации δ_m и, таким образом, регулировать условия перехода от монотонного к осциллирующему профилю ударных волн.

В случае слабой электропроводности жидкой фазы смеси наличие магнитного поля и эффектов вязкости приводит к диссипации акустических возмущений и затуханию волн по экспоненциальному закону. При этом влияние МГД-диссипации проявляется равномерно для всех мод, а вязкая диссипация приводит к более сильному затуханию высших гармоник. Наличие дисперсионных эффектов в слабопроводящей газожидкостной среде проявляется в сдвиге фаз и изменении скоростей распространения волн различных частот и, следовательно, приводит к расплыванию первоначально локализованных возмущений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
2. *Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А.* Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982. 176 с.
3. *Зарембо Л.К., Тимошенко В.И.* Нелинейная акустика. М.: Изд-во МГУ, 1984. 103 с.
4. *Корсунский С.В.* Распространение звуковых пучков конечной амплитуды в электропроводящих средах // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 1. С. 48–52.
5. *Ван Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа // Геология суспензий. М.: Мир, 1975. С. 68–103.
6. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Изд-во Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1983. 238 с.
7. *Манукян С.М.* Исследование нелинейных узких пучков в электропроводящей жидкости с пузырьками газа // Изв. АН АрмССР. Сер. Мех. 1988. Т. 41. № 3. С. 37–46.
8. *Van Wijngaarden L.* On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles // J. Fluid Mech. 1968. V. 33. № 3. P. 465–474.
9. *Caflisch R.E., Miksis M.J., Papanicolaou G.C., Fing Lu.* Effective equations for wave propagation in bubbly liquids // J. Fluid Mech. 1985. V. 153. № 1. P. 259–273.
10. *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
11. *Кудряшов Н.А.* Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. № 3. С. 465–470.
12. *Chen Y., Wen S.-L.* Traveling wave solutions to the two-dimensional Korteweg – de Vries equation // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 127. P. 226–236.

Институт гидромеханики
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
04.10.89

S.V. Korsunskii

PROPAGATION OF NONLINEAR ACOUSTIC BEAMS IN ELECTRICALLY CONDUCTING LIQUID CONTAINING GAS BUBBLES

The propagation of space-bounded acoustic disturbances of small but finite amplitude in the electrically conducting gasliquid mixture under action of constant ambient magnetic field is investigated. In quasi-optic approximation the generalized nonlinear evolution equation of Chochlov–Zabolotskaya–Kuznetsov type is derived taking into account dissipation, dispersion and MHD – interactions effects. In such approximation the influence of dispersion due to gas-containing and dissipation due to viscosity, heat and electrical conductivity of media on the parameters and structure of weak shock waves is studied. It is shown that in the electrically conducting uncompressible liquid containing bubbles of non-conducting gas two types of magnetosonic waves exist – slow and fast, and in the limit of high electroconductivity of media MHD-effects lead to increasing of waves speed and decrement of waves dissipation. In the limit of small electroconductivity of media MHD – interactions lead to exponentially decreasing of wave amplitude. If dispersion and dissipation effects in the media is balanced the propagation of initial disturbances lead to formation of shock waves with monotonic or oscillatory structure.