Сравнение кривых *2* из рис. 2 с кривой *1* рис. 5 в [5] показывает, что относительное сечение обратного рассеяния σ_0 не дает иногда полной информации о резонансных свойствах упругого рассеивателя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильменков С.Л., Клещев А.А.* Излучение упругими телами сфероидальной формы и связь его с дифракцией звука на них // Судовая акустика: Сб. научн. тр. Л.: ЛКИ, 1989. С. 15–21.
2. *Клещев А.А., Клюкин И.И.* Основы гидроакустики. Л.: Судостроение, 1987.
3. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
4. *Клещев А.А., Клюкин И.И.* Экспериментальный способ получения характеристик дальнего поля рассеивателей // Тр. ЛКИ. Л.; ЛКИ, 1972, № 77. С. 37–40.
5. *Клещев А.А.* Резонансные эффекты в характеристиках рассеяния звука упругими телами сфероидальной формы // Судовая акустика: Сб. научн. тр. Л.: ЛКИ, 1989. С. 21–28.

Санкт-Петербургский кораблестроительный институт

Поступило в редакцию 01.03.91

УДК 534.222

Ю.Р. Лапидус, О.В. Руденко

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ХОХЛОВА – ЗАБОЛОТСКОЙ

Нелинейно-дифракционную трансформацию акустической волны удобно описывать на основе модельного уравнения Хохлова – Заболотской. В цилиндрических координатах это уравнение имеет вид [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\epsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}(rv), \qquad \frac{\partial v}{\partial \tau} + c_0 \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \tag{1}$$

Здесь u, v – компоненты колебательной скорости вдоль и поперек оси пучка, ϵ – нелинейный параметр, c_0 – скорость звука, $\tau = t - x/c_0$, x, r – осевая и поперечная координаты. В безразмерных переменных $V = u/u_0$, $U = v(2l_{\text{Д}}/u_0 a)$, $\theta = \omega\tau$, $z = x/l_{\text{Р}}$, $R = r/a$ система примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{N}{4}\frac{\partial}{\partial R}(RU), \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial R} = 0. \tag{2}$$

Здесь $N = l_{\text{Р}}/l_{\text{Д}}$ – отношение длины образования разрыва $l_{\text{Р}} = c_0^2/\epsilon\omega u_0$ к дифракционной длине $l_{\text{Д}} = \omega a^2/2c_0$; u_0, ω, a – характерные амплитуда, частота и радиус пучка.

К сожалению, для уравнений (1) не найдено общее точное решение. Наиболее часто это уравнение анализируют, применяя численные методы [2]. Однако и в случае использования численных методов крайне желательно иметь точные решения для тестирования алгоритмов. Кроме того, анализ точного решения позволяет лучше разобраться в физике явления. Рассмотрим процесс получения частного точного решения уравнения (2). Введем новую независимую переменную T:

$$T = \theta + Vf(z)\int_0^z \frac{d\xi}{f(\xi)}, \tag{3}$$

где $f(z)$ – некоторая неопределенная функция осевой координаты. Новая переменная T – обобщение замены [3] $T = \theta + zV$ на случай распространения плоской волны в канале переменного сечения. Перейдем в (2) от θ к T:

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{N}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R}\right) = -\frac{N}{4} f(z)\int_0^z \frac{d\xi}{f(\xi)}\left[\frac{4}{N}\frac{f'(z)}{f(z)} V\frac{\partial V}{\partial T} - \left(\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R}\right)\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial R}\frac{\partial U}{\partial T}\right],$$
$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial R} = 0. \tag{4}$$

Для нахождения частного решения (4) потребуем, чтобы левые и правые части уравнения были равны нулю. Тогда после простых преобразований систему можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 V}{\partial T \partial z} - \frac{N}{4}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial R}\right) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} V \frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial T} - \frac{N}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 = 0. \tag{6}$$

Таким образом, для получения частного решения необходимо из общего решения линейного уравнения (5) выбрать то, которое удовлетворяет (6).

Одно из наиболее простых комплексных решений (5) имеет вид

$$V = \frac{C}{1 - iNz(1 - ib)} \exp\left[iT - R^2 \frac{1 - ib}{1 - iNz(1 - ib)}\right], \tag{7}$$

где C и b – постоянные.

Действительная часть (7) описывает распространение сфокусированной гармонической волны с гауссовым поперечным распределением в приближении линейной акустики.

Подставляя (7) в (6), замечаем, что если выбрать

$$f(z) = 1 - iNz(1 - ib), \tag{8}$$

то (6) обращается в тождество. Следовательно, решение, определяемое формулами (3), (7), (8), и является точным решение уравнения Хохлова – Заболотской.

Недостаток полученного решения – представление в комплексном виде. Однако этот недостаток компенсируется компактностью записи. Данное решение может применяться для тестирования численных алгоритмов решения уравнения Хохлова – Заболотской.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. *Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А.* Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
3. *Лапидус Ю.Р., Руденко О.В.* Новые приближения и результаты теории нелинейных акустических пучков // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 6. С. 797–800.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило в редакцию
16.07.91

УДК 534.26

 А.Д. Лапин

ВОЛНЫ В ТВЕРДОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ПОКРЫТОМ ЖИДКИМ СЛОЕМ

Пусть однородное твердое полупространство $z < 0$ покрыто однородным жидким слоем $0 < z < h$ со свободной границей $z = h$ и пусть в точке $r = 0$, $z = z_0$ (r и z – цилиндрические координаты) этого слоя расположен точечный гармонический источник с объемной скоростью V. Требуется найти волны в твердом полупространстве.

Обозначим через c, c_l и c_t – соответственно скорость звука в жидкости и скорости продольной и поперечной волн в твердом теле, плотности жидкой и твердой сред обозначим соответственно через ρ и ρ_1. Звуковое давление p в жидкости удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = i\omega\rho V \frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta(z - z_0),$$

где $k = \omega/c$, ω – частота, $\delta(r)$ – дельта-функция, и равно нулю на свободной границе слоя: $p(r, h) = 0$.

Смещение $\mathbf{u}$ частиц в твердой среде удовлетворяет уравнению

$$c_l^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - c_t^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} + \omega^2 \mathbf{u} = 0.$$