

$$\theta_l = \theta_a \frac{\exp \{y_2 (1 - \xi)\}}{\xi}, \quad (10)$$

где $y = \sqrt{H}$, $y_1 = \sqrt{HLL_v}$, $y_2 = \sqrt{H/k}$, $y_3 = \sqrt{HLL_l/k}$. Используя решения (10), можно вычислить безразмерные тепловые и диффузионные потоки к межфазной границе со стороны жидкой и паровой фаз (параметры Нуссельта и Шервуда).

По определению чисел Нуссельта и Шервуда можно записать:

$$Nu_v = \frac{2R \left(\frac{\partial \theta_v}{\partial r} \right)_R}{T_a - \langle T \rangle}, \quad Sh_v = \frac{2R \left(\frac{\partial g_v}{\partial r} \right)_R}{g_{lv} - \langle g_v \rangle}, \quad (11)$$

$$Nu_l = \frac{2R \left(\frac{\partial T_l}{\partial r} \right)_R}{T_0 - T_a}, \quad Sh_l = \frac{2R \left(\frac{\partial g_l}{\partial r} \right)_R}{g_{lo} - g_{la}},$$

где $\langle T \rangle$, $\langle g_v \rangle$ — средние значения температуры и концентрации в пузырьке. Подставляя в формулы (11) решения (10), получим

$$Nu_v = 2F(y), \quad Sh_v = 2F(y_1), \quad F(y) = y \operatorname{cth} y - 1, \quad (12)$$

$$Nu_l = 2(1 + \sqrt{y_2}), \quad Sh_l = 2(1 + \sqrt{y_3}).$$

При $y \gg 1$ (приближение тонкого теплового и диффузионного слоя) выражения для внутренних теплового и диффузионного потоков упрощаются:

$$Nu_v = 2(y - 1), \quad Sh_v = 2(y_1 - 1). \quad (13)$$

При этом предполагается, что $\langle T \rangle \approx T|_{\xi=0}$, $\langle g_v \rangle \approx g_v|_{\xi=0}$. Введем тепловые и диффузионные параметры Пекле, в которых в качестве скорости взята характерная радиальная скорость поверхности пузырька при экспоненциальном сжатии, согласно формуле (8):

$$Pe_v^T = \frac{2R_0 U_0}{D_v^T}, \quad Pe_v^D = \frac{2R_0 U_0}{D_v}, \quad (14)$$

$$Pe_l^T = \frac{2R_0 U_0}{D_l^T}, \quad Pe_l^D = \frac{2R_0 U_0}{D_l} \quad (U_0 = 2R_0 h).$$

Тогда формулы (12), (13) можно окончательно представить так:

$$Nu_v = \sqrt{Pe_v^T} - 2, \quad Sh_v = \sqrt{Pe_v^D} - 2,$$

$$Nu_l = \sqrt{Pe_l^T} + 2, \quad Sh_l = \sqrt{Pe_l^D} + 2$$

$$(Pe_v^T \gg 1, \quad Pe_v^D \gg 1).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдель Азиз Н., Хабеев Н. С. О поведении паровых пузырьков в растворах // Тр. конф. выпускников МГУ. М.: Изд-во МГУ, 1986.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1983.
3. Кириллин В. А., Шейндлин А. Е., Шпильрайн Э. Э. Термодинамика растворов. М.: Энергия, 1980.
4. Зыонг Нгок Хай, Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Структура ударных волн в жидкости с паровыми пузырьками // Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа. 1982. № 2. С. 109.

Кафедра математики
педагогического ф-та
Александрийского университета, Александрия
Арабская Республика Египет

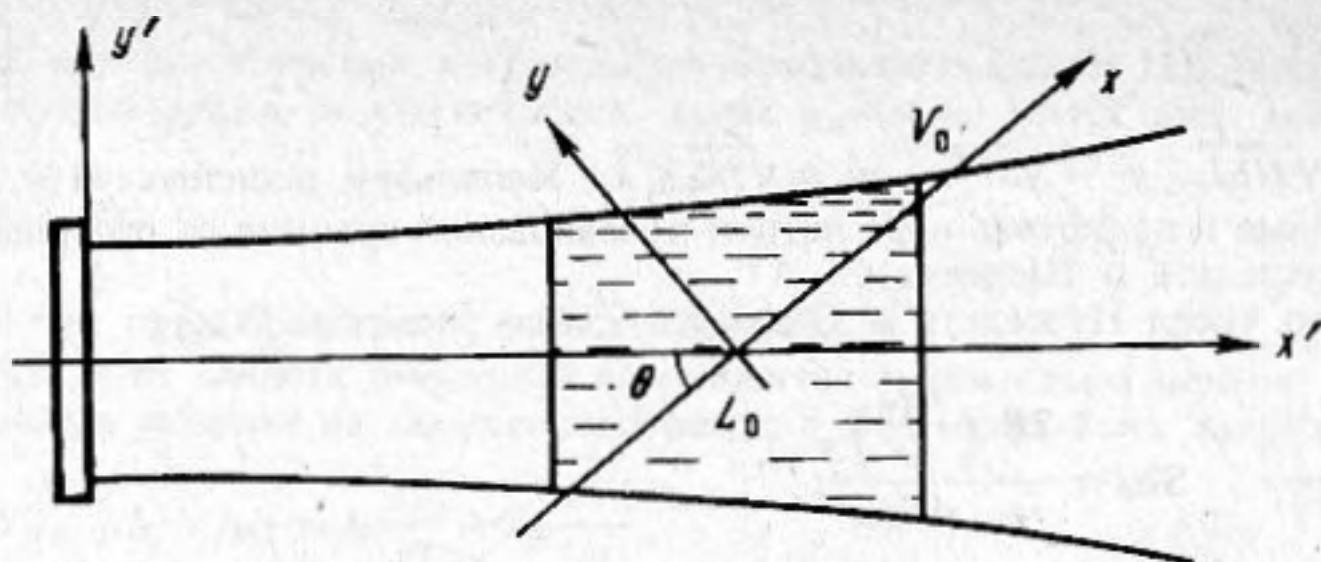
Поступило в редакцию
15.10.92

УДК 534.6

© 1993 г. Е. А. Баранник

ШИРИНА СПЕКТРА ДОПЛЕРОВСКОГО СИГНАЛА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ РЕЖИМЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Как известно [1], ширина спектра доплеровского сигнала от линии тока определяется в общем случае двумя факторами: величиной дифракционного искривления волнового фронта падающего и отраженного пучков волн и длительностью доплеровского сигнала, формируемого элементарным



рассеивателем ультразвука при его пролете через измерительный объем. При импульсном режиме излучения величина последнего (заштрихованная область на рисунке) зависит, очевидно, как от геометрии пучков волн, так и от длительности зондирующих импульсов. В приближении геометрической акустики было показано [2, 3], что зависимость времяпролетного и соответственно полного уширения спектра от длительности зондирующих импульсов сказывается тем сильнее, чем меньше угол θ между направлением распространения пучка волн и линией тока. Аналогичный предельный результат получен в [4, 5] для волновых полей, формируемых многоэлементными, в том числе фокусирующими ультразвуковыми преобразователями в дальней (фраунгоферовой) зоне излучения.

До сих пор неясен, однако, относительный вклад каждого из вышеперечисленных факторов в ширину спектра доплеровского сигнала и, как следствие, критерий применимости полученных в [2—5] предельных результатов. В итоге существенно уменьшается информативность такого важного параметра, как дисперсия спектра.

Цель настоящей работы — получение аналитического выражения для дисперсии спектра доплеровского сигнала при импульсном режиме излучения пучков волн с гауссовой аподизирующей функцией на излучающей поверхности. Будем полагать, что распространение и рассеяние любого участка излучаемого импульса происходит так же, как при непрерывном излучении. Тогда можно воспользоваться известной функцией распределения $G'(r)$ чувствительности ультразвукового преобразователя по полю, полученной в [6] из точного решения [7] параболического уравнения дифракции. Для учета импульсного характера излучения достаточно, как показано, например, в [1], соответствующим образом модифицировать величину $G'(r)$:

$$G_p'(r) = G'(r)b(T_0 - 2x'(r)/c), \quad (1)$$

где $b(t)$ — огибающая излученного импульса, $x'(r)$ — расстояние вдоль оси пучка волн до точки r и c — скорость звука. Отметим, что в выражении (1) подразумевается стандартная схема обработки отраженных движущейся средой волн, при которой демодулированный сигнал стробируется (дискретизируется) с некоторой задержкой по времени T_0 относительно каждого момента излучения импульса. Величина задержки определяет глубину локации $l_0 = cT_0/2$, поэтому начало системы координат $r = (x, y, z)$ удобно поместить в точке $(l_0, 0, 0)$ штрихованной системы координат r' , связанной с ультразвуковым преобразователем (см. рисунок).

Спектр мощности доплеровского сигнала от линии тока в борновском приближении имеет вид [1]

$$S(\omega, y, z) = k^4 v V \left\{ \overline{\beta^2} | TF [e^{2ikVt \cos \theta} G_p'(Vt, y, z)] |^2 - \right. \\ \left. - 2 \overline{\beta \tilde{\beta}} \operatorname{Re} \{ TF [e^{2ikVt \cos \theta} G_p'(Vt, y, z)] TF^* [e^{2ikVt \cos \theta} \gamma(Vt, y, z) G_p'(Vt, y, z)] \} + \right. \\ \left. + \overline{\tilde{\rho}^2} | TF [e^{2ikVt \cos \theta} \gamma(Vt, y, z) G_p'(Vt, y, z)] |^2 \right\}, \quad (2)$$

где $TF[f(t)]$ — фурье-образ $f(t)$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновой вектор, v — величина, пропорциональная объему элементарных рассеивателей ультразвука, $\overline{\rho^2}$, $\overline{\beta^2}$ и $\overline{\beta \tilde{\beta}}$ — постоянные, описывающие уровень флуктуаций плотности и сжимаемости в среде, $V(y, z)$ — скорость движения среды, причем $V(0, 0) \equiv V_0$ — скорость движения вдоль линии тока, проходящей через ось пучка на глубине l_0 . Параметр γ , обусловленный дифракционным искривлением волновых фронтов и уширением пучка волн, вблизи оси пучка приближенно равен единице и существенно изменяется лишь на расстояниях порядка длины зоны Френеля $l_d = \pi \alpha^2 b^2 / \lambda \gg \alpha b$, где α — отношение ширины гауссовой аподизирующей функции к радиусу b активного элемента преобразователя.

Процедура нахождения фурье-образов в (2) методом перевала подробно описана в [6, 8], поэтому выпишем лишь уравнение для определения точки перевала w

$$\frac{1}{x'^2(w, y) + 1} \left\{ [y'^2(w, y) + z^2] \frac{x'(w, y) + i}{x'(w, y) - i} + \alpha^2 b^2 \right\} - \\ - 2y'(w, y) \frac{x'(w, y) + i}{x'(w, y) - i} \operatorname{tg} \theta + i \left(\frac{4}{\pi N \alpha b} \right)^2 [l_0 - x'(w, y)] + 2\Omega = 0 \quad (3)$$

в случае, когда $b(t) = \exp\{-(2ct/N\lambda)^2\}$. Здесь N — число периодов колебаний несущей частоты в импульсе и $\Omega = \omega/2kV \cos \theta - 1$. Единицей длины в безразмерном уравнении (3) является величина l_d .

Для центральной части спектра, где $\Omega \ll 1$, решение уравнения (3) при $y, z \ll 1$ имеет вид

$$w = \left\{ \frac{2\Omega}{\cos \theta} - y \operatorname{tg} \theta \left[\frac{2}{l_0 - i} - i \left(\frac{2}{\pi N \alpha b} \right)^2 \right] \right\} \left[\frac{2 \operatorname{tg}^2 \theta}{l_0 - i} + i \left(\frac{4}{\pi N \alpha b} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (4)$$

Восстанавливая размерность и производя при помощи (4) асимптотическую оценку фурье-образов в (2), приходим к окончательному выражению спектра мощности доплеровского сигнала от линии тока при эхоимпульсной локации с глубины l_0 :

$$S(\omega, y, z) = \frac{C}{V \cos^2 \theta \left[\sigma^4 + \frac{l_0^2}{l_n^2} \left(\frac{1}{\pi N} \right)^4 \right]^{1/2}} \frac{l_n^{3/2}}{(l_0^2 + l_n^2)^{3/2}} \times \exp \left\{ -\frac{\Omega^2}{2\sigma^2} - \frac{4l_n^2}{l_0^2 + l_n^2} \frac{z^2}{\alpha^2 b^2} - \frac{4\sigma^2 \left(\frac{1}{\pi N} \right)^2}{\sigma^4 + \frac{l_0^2}{l_n^2} \left(\frac{1}{\pi N} \right)^4} \left[\frac{1}{\cos \theta} \frac{y}{\alpha b} - \frac{\operatorname{tg} \theta \alpha b l_0 \Omega}{8l_n^2 \sigma^2} \right]^2 \right\}, \quad (5)$$

$$\sigma = \frac{\alpha b}{4l_n} \left[2 \operatorname{tg}^2 \theta + \left(\frac{4l_n}{\pi N \alpha b} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (6)$$

где C — константа, определяемая свойствами среды и параметрами зондирующего пучка волн.

Полный спектр мощности доплеровского сигнала при лоцировании с глубины l_0 можно найти интегрированием по всем линиям тока вблизи точки $r' = (l_0, 0, 0)$. Если масштаб изменения скорости движения среды существенно больше величин порядка αb и $N\lambda$, характеризующих линейные размеры измерительного объема, то интегрирование приводит к простому результату

$$S(\omega) = \frac{\pi^2 \alpha^2 b^2}{4\sigma \cos \theta} \frac{CN}{V_0} \frac{l_n^2}{l_0^2 + l_n^2} \exp \left\{ -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2 \omega_0^2} \right\}, \quad (7)$$

где $\omega_0 = 2kV_0 \cos \theta$ — центральная частота спектра.

Выражение (6) для отнесенной к ω_0 дисперсии спектра мощности (7) доплеровского сигнала дает ясное представление о соотношении дифракционной и импульсной составляющих полной ширины спектра импульсно-доплеровских систем. В пределе непрерывных волн, когда $N \gg 1$, ширина спектра для нефокусированных пучков не зависит от глубины лоцирования и пропорциональна $\operatorname{tg} \theta$ [4, 5]. Если же лоцирование производится короткими импульсами при небольших углах θ , то ширина спектра для ламинарных потоков определяется только параметрами зондирующих импульсов. Нетрудно видеть, что длительность зондирующих импульсов становится главным фактором, определяющим ширину спектра доплеровского сигнала, для углов θ , меньших

$$\theta_c = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2} l_n}{\pi N \alpha b}.$$

Отметим, наконец, что, за исключением случая мелкомасштабных турбулентных движений, выражение (6) позволяет по экспериментально измеренным значениям ω_0 и σ однозначно определять угол θ . Последнее весьма важно для реальных систем доплеровской расходомерии и медицинской диагностики [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фиш П. Доплеровские методы // Применение ультразвука в медицине / Под ред. Хилла К. М.: Мир, 1989. С. 395—432.
2. Newhouse V. L., Bendick P. J., Varner L. W. Analysis of transit time effects on Doppler flow measurement // IEEE Trans. Biomed. Engin. 1976. V. 23. No. 3. P. 381—386.
3. Newhouse V. L., Amin I. Time dilation and inversion properties and the output spectrum of pulsed flowmeters // IEEE Trans. Sonics Ultrasonics. 1983. V. 30. No. 2. P. 174—179.
4. Sensor D., Newhouse V. L., Vonts T., Ortega H. V. Theory of ultrasound Doppler-spectra velocimetry for arbitrary beam and flow configuration // IEEE Trans. Biomed. Engin. 1988. V. 35. No. 4. P. 740—751.
5. Kim Yeng M., Park Song B. Modeling of Doppler signal considering sample volume and field distribution // Ultrason. Imag. 1989. V. 11. No. 3. P. 175—196.
6. Баранник Е. А. Влияние дифракционной расходимости и ширины пучков волн на спектр доплеровского сигнала // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 2. С. 237—244.
7. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. С. 288.
8. Баранник Е. А. Зависимость спектральных характеристик доплеровского сигнала от геометрии ультразвукового преобразователя // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 5. С. 798—805.
9. Hoskins P. R. Measurement of arterial blood flow by Doppler ultrasound // Clin. Phys. and Physiol. Meas. 1990. V. 11. No. 1. P. 1—26.