АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 6

УДК 534.22 + 537.876.23

© 1993 г. Е. З. Грибова, А. И. Саичев

О ДИФФУЗИИ ЛУЧЕЙ В СРЕДЕ С ВЫТЯНУТЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Рассмотрено распространение гидроакустической волны в неоднородном океане. Принятая модель неоднородностей характерна для подводных звуковых каналов: они предполагаются двумерными, лежащими в плоскости распространения луча и вытянутыми вдоль продольной оси. С помощью условий динамической причинности и двухмасштабности выведено уравнение Фоккера — Планка для плотности вероятностей координат и угла распространения луча. Численное решение полученного уравнения показывает, что лучи отклоняются в основном в ту сторону, где меньше характерный масштаб корреляции неоднородностей.

Анализ распространения волн в случайно-неоднородной среде часто бывает удобно проводить с помощью уравнения Фоккера — Планка (УФП). Так, в [1] уравнение диффузии лучей используется для определения среднего значения величины, обратной к интенсивности волны, в [2] применение УФП для плотности вероятностей расходимости лучевой трубки позволило найти среднее расстояние до каустики и между каустиками в случайной среде.

Обычно при выводе УФП для плотности вероятностей координат луча в среде с флуктуациями показателя преломления используются лучевые уравнения в малоугловом приближении [3], а сами флуктуации предполагаются дельта-коррелированными в направлении распространения волны. В то же время в реальных средах, например в неоднородном океане, радиус корреляции неоднородностей отличен от нуля и угол отклонения луча от продольной оси не мал. Получим УФП для плотности вероятностей координат луча в этом случае. Для простоты ограничимся здесь двумерным случаем (вертикальная и одна горизонтальная координата), к которому приближенно сводится распространение гидроакустической волны в океане. Это означает, что случайные неоднородности мы считаем блинообразными и лежащими в плоскости распространения луча, т. е. пренебрегаем обычно несущественной в подводных звуковых каналах зависимостью функции корреляции неоднородностей от горизонтальной поперечной координаты [4].

Пусть луч распространяется в плоскости (x, y) (x — продольная координата). Тогда его положение будет полностью определяться радиусом-вектором $\mathbf{r} = \{X, Y\}$ и единичным вектором касательной $\mathbf{l} = \{\cos\Phi, \sin\Phi\}$, где Φ — угол между лучом и осью x. Векторы r и l удовлетворяют системе лучевых уравнений [5]

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \mathbf{l}, \quad \frac{d\mathbf{l}}{d\sigma} = \nabla_\perp (\ln n), \tag{1}$$

где σ — длина дуги вдоль луча, n — показатель преломления, $\nabla_\perp$ означает поперечную компоненту градиента ∇n, перпендикулярную к $\mathbf{l}$. Будем считать, что флуктуации величины $\gamma = \ln n$ гауссовы с нулевым средним.

Наша цель — найти уравнение для функции плотности вероятностей $W(x, y, \varphi; \sigma)$. От векторных уравнений (1) перейдем к скалярным для координат луча $X(\sigma)$, $Y(\sigma)$ и угла $\Phi(\sigma)$:

$$\frac{dX}{d\sigma} = \cos\Phi, \quad \frac{dY}{d\sigma} = \sin\Phi,$$

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = -\alpha(\mathbf{r})\sin\Phi + \beta(\mathbf{r})\cos\Phi \tag{2}$$

с начальными условиями

$$X(\sigma = 0) = a_x, \quad Y(\sigma = 0) = a_y, \quad \Phi(\sigma = 0) = 0. \tag{3}$$

Здесь введены обозначения $\alpha = \partial\gamma/\partial x$, $\beta = \partial\gamma/\partial y$.

Рассмотрим характерный для гидроакустики случай, когда неоднородности вытянуты вдоль одной из осей (обычно горизонтальной продольной) и имеют характерные масштабы l_x и l_y. Будем считать известной корреляционную функцию флуктуаций поля $\gamma(\mathbf{r})$

$$B_\gamma(s_x, s_y) = \langle\gamma(x, y)\,\gamma(x + s_x, y + s_y)\rangle.$$

Чтобы получить УФП, возьмем, как это сделано в [6], произвольную, но достаточно гладкую дважды непрерывно дифференцируемую функцию $f(x, y, \varphi)$ и найдем, с учетом уравнений (2), среднее от полной производной $f[X(\sigma), Y(\sigma), \Phi(\sigma)]$:

$$\frac{d\langle f\rangle}{d\sigma} - \left\langle\frac{\partial f}{\partial X}\cos\Phi\right\rangle - \left\langle\frac{\partial f}{\partial Y}\sin\Phi\right\rangle =$$

$$= -\left\langle\frac{\partial f}{\partial\Phi}\alpha\sin\Phi\right\rangle + \left\langle\frac{\partial f}{\partial\Phi}\beta\cos\Phi\right\rangle. \tag{4}$$

Средние в левой части (4) замкнуты относительно искомой плотности вероятностей, а для вычисления слагаемых в правой части необходимо знать совместную плотность вероятностей координат и случайного поля γ. В то же время, используя условия динамической причинности и двухмасштабности [6], удается расщепить эти средние и выразить их через ту же функцию $W(x, y, \varphi; \sigma)$.

Обозначим слагаемые в правой части равенства (4) Q_1 и Q_2, а функции $(\partial f/\partial\Phi)\sin\Phi$ и $(\partial f/\partial\Phi)\cos\Phi$ — соответственно ψ_1 и ψ_2, и остановимся подробно на вычислении среднего

$$Q_1 = \langle\psi_1\alpha(\mathbf{r})\rangle = \langle\psi_1(X, Y, \Phi)\,\alpha(X, Y)\rangle. \tag{5}$$

Отойдем по лучу от точки A, координаты которой X, Y, а касательная направлена под углом Φ, на некоторое расстояние $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_0$; при этом мы попадем в точку $A_0 = (X_0, Y_0, \Phi_0)$. Запишем приближенное решение уравнений (2) при $\sigma > \sigma_0$ в виде

$$X(\sigma) = X_0(\sigma) + \Delta X(\sigma), \quad Y(\sigma) = Y_0(\sigma) + \Delta Y(\sigma),$$

$$\Phi(\sigma) = \Phi_0(\sigma) + \Delta\Phi(\sigma). \tag{6}$$

Здесь $X_0(\sigma)$, $Y_0(\sigma)$, $\Phi_0(\sigma)$ — координаты и угол распространения луча, когда при $\sigma > \sigma_0$ флуктуации показателя преломления отсутствуют. Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dX_0}{d\sigma} = \cos\Phi_0, \quad \frac{dY_0}{d\sigma} = \sin\Phi_0,$$

$$\frac{d\Phi_0}{d\sigma} = [-\alpha(\mathbf{r})\sin\Phi_0 + \beta(\mathbf{r})\cos\Phi_0]\,\theta(\sigma_0 - \sigma) \tag{7}$$

со случайными начальными условиями

$$X_0(\sigma = \sigma_0) = X_0(\sigma_0), \quad Y_0(\sigma = \sigma_0) = Y_0(\sigma_0),$$

$$\Phi_0(\sigma = \sigma_0) = \Phi_0(\sigma_0).$$

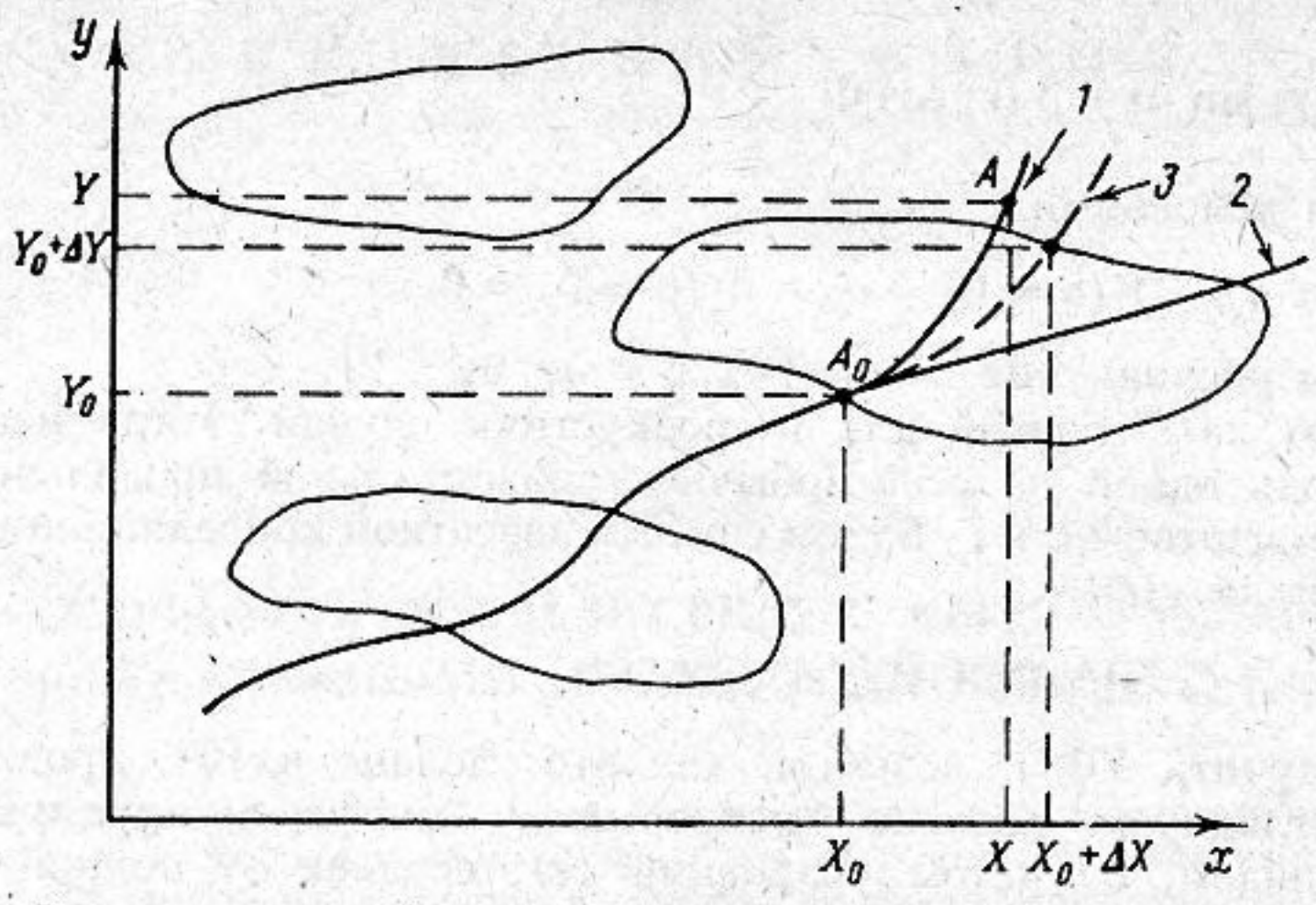

Рис. 1. Схематическое изображение траектории луча в случайно-неоднородной среде: *1* — «истинная» траектория; *2* — траектория в отсутствие неоднородностей после точки A_0; *3* — траектория, соответствующая приближению (6)

В (7) использована единичная функция $\theta(z)$, равная единице при $z > 0$ и нулю при $z < 0$. Соответственно ΔX, ΔY, $\Delta\Phi$ — возмущения, вызванные флуктуациями поля γ на интервале $[\sigma_0, \sigma]$. Представление координат луча в виде (6) иллюстрирует рисунок 1, где показаны «истинная» траектория луча в случайной среде, траектория, которая была бы в отсутствие неоднородностей после точки A_0, и траектория, соответствующая приближению (6).

Будем считать расстояние $\Delta\sigma$ настолько малым, чтобы возмущения ΔX, ΔY, $\Delta\Phi$ были много меньше характерных масштабов l_ψ функции ψ_i:

$$\Delta X,\ \Delta Y,\ \Delta\Phi \ll l_\psi. \tag{8}$$

Тогда уравнения для возмущений

$$\frac{d\Delta X}{d\sigma} = -\sin\Phi_0\Delta\Phi, \qquad \frac{d\Delta Y}{d\sigma} = \cos\Phi_0\Delta\Phi,$$

$$\frac{d\Delta\Phi}{d\sigma} = -\alpha\,(X_0 + \Delta X,\ Y_0 + \Delta Y)\sin\Phi_0 + \beta\,(X_0 + \Delta X,\ Y_0 + \Delta Y)\cos\Phi_0$$

можно решать, ограничиваясь первым порядком метода последовательных приближений:

$$\Delta\Phi(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} d\sigma'\,[-\alpha\,(X_0',\ Y_0')\sin\Phi_0 + \beta\,(X_0',\ Y_0')\cos\Phi_0],$$

$$\Delta X(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} d\sigma'\,(\sigma - \sigma')\left[\sin^2\Phi_0\alpha\,(X_0',\ Y_0') - \frac{\sin 2\Phi_0}{2}\beta\,(X_0',\ Y_0')\right],$$

$$\Delta Y(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} d\sigma'\,(\sigma - \sigma')\left[-\frac{\sin 2\Phi_0}{2}\alpha\,(X_0',\ Y_0') + \cos^2\Phi_0\beta\,(X_0',\ Y_0')\right]. \tag{9}$$

Здесь X_0', Y_0' — решения уравнений (7) при $\sigma' > \sigma_0$:

$$X_0' \equiv X_0(\sigma') = X_0(\sigma_0) + \cos\Phi_0\,(\sigma' - \sigma_0),$$

$$Y_0' \equiv Y_0(\sigma') = Y_0(\sigma_0) + \sin\Phi_0\,(\sigma' - \sigma_0). \tag{10}$$

Условие двухмасштабности (8) позволяет разложить входящие в (5) функции в ряд Тейлора до первого порядка:

$$Q_1 = \langle \psi_1 (X_0, Y_0, \Phi_0)\, \alpha (X_0, Y_0)\rangle + \langle \frac{\partial \psi_1}{\partial X_0} \Delta X \alpha (X_0, Y_0)\rangle +$$

$$+ \langle \frac{\partial \psi_1}{\partial Y_0} \Delta Y \alpha (X_0, Y_0)\rangle + \langle \frac{\partial \psi_1}{\partial \Phi_0} \Delta \Phi \alpha (X_0, Y_0)\rangle +$$

$$+ \langle \psi_1 (X_0, Y_0, \Phi_0) \frac{\partial \alpha}{\partial X_0} \Delta X\rangle + \langle \psi_1 (X_0, Y_0, \Phi_0) \frac{\partial \alpha}{\partial Y_0} \Delta Y\rangle. \tag{11}$$

Кроме условия двухмасштабности мы считаем выполненным условие динамической причинности, согласно которому функции $X_0(\sigma)$, $Y_0(\sigma)$, $\Phi_0(\sigma)$ функционально зависят от значений полей α, β только при $\sigma' < \sigma$ и не зависят от них при $\sigma' > \sigma$.

Применим еще раз условие двухмасштабности: будем считать, что выбранная нами величина $\Delta\sigma$ удовлетворяет неравенству

$$\Delta\sigma > \sigma_к, \tag{12}$$

где характерный масштаб корреляции $\sigma_к$ поля γ оценим как $(l_x^2 + l_y^2)^{1/2}$.

Условия динамической причинности и двухмасштабности означают, что X_0, Y_0, Φ_0 ни функционально, ни статистически не зависят от значений случайных полей α, β вне интервала $[\sigma - \Delta\sigma, \sigma]$, что позволяет расщепить средние в (11).

Пользуясь свойствами статистических средних [6], рассмотрим отдельно каждое из входящих в (11) слагаемых. Первое из них $\langle \psi_1 (X_0, Y_0, \Phi_0)\, \alpha (X_0, Y_0)\rangle = \langle \psi_1 \langle \alpha (X_0, Y_0)\rangle_{A_0}\rangle$. Здесь величина, обозначенная как $\langle \ldots \rangle_{A_0}$, означает условное среднее (при условии, что поля в точке A_0 известны), а внешнее усреднение проводится по ансамблю случайных реализаций этих полей. Однако в силу условия динамической причинности статистические свойства $\alpha(x, y)$ не зависят от X_0, Y_0, Φ_0, поэтому условное среднее можно заменить безусловным, и первое слагаемое в (11) пропадает, поскольку $\langle \alpha \rangle = 0$.

Для вычисления оставшихся в (11) средних подставим в них равенства (9), (10). При этом появляются условные средние вида $\langle \alpha (X_0, Y_0)\, \alpha (X_0', Y_0')\rangle_{A_0}$, $\langle \alpha (X_0, Y_0)\, \beta (X_0', Y_0')\rangle_{A_0}$, которые по-разному вычисляются в зависимости от σ'. Найдем их так же, как это сделано в [6]. Для этого разобьем интервал интегрирования $[\sigma_0, \sigma]$ на две части: $[\sigma_0, \sigma_к[$ и $[\sigma_к, \sigma]$. Из условия двухмасштабности (12) следует, что на первом из них поле $\alpha(X_0, Y_0)$ статистически не связано с полями $\alpha(X_0', Y_0')$, $\beta(X_0', Y_0')$, поэтому указанные средние равны нулю. На втором интервале ни один из входящих в условные средние сомножителей статистически не зависит от полей в точке A_0, поэтому условные средние заменяются безусловными. В результате, например, второе слагаемое в (11) запишется в виде

$$\langle \frac{\partial \psi_1}{\partial X_0} \Delta X \alpha (X_0, Y_0)\rangle = \langle \frac{\partial \psi_1}{\partial X_0} \left[\sin^2 \Phi_0 D_{11} - \frac{\sin 2\Phi_0}{2} D_{12} \right]\rangle,$$

где использованы обозначения

$$D_{11} = \int_0^\infty d\sigma\sigma B_{\alpha\alpha} (\sigma \cos \Phi_0, \sigma \sin \Phi_0),$$

$$D_{12} = \int_0^\infty d\sigma\sigma B_{\alpha\beta} (\sigma \cos \Phi_0, \sigma \sin \Phi_0) \tag{13}$$

и введены корреляционные функции полей α и α, β, которые определяются аналогично корреляционной функции B_γ и с учетом определения α, β выражаются через нее:

$$B_{\alpha\alpha} = -\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} B_\gamma (s_x + \rho, s_y) \mid_{\rho=0},$$

$$B_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2}{\partial\rho_1\partial\rho_2} B_\gamma (s_x + \rho_1, s_y + \rho_2) \mid_{\rho_1=\rho_2=0}.$$

При выводе (13) мы предполагали, что $B_\gamma \equiv 0$ вне интервала корреляции, поэтому заменили предел интегрирования $\sigma_к$ на ∞.

Так же расщепляются все оставшиеся средние в (11), при этом последние два слагаемых в (11) уничтожаются, поскольку оказываются равны по величине и противоположны по знаку. Окончательно

$$Q_1 = \langle\frac{\partial\psi_1}{\partial X_0}\left(\sin^2\Phi_0 D_{11} - \frac{\sin 2\Phi_0}{2} D_{12}\right)\rangle + \langle\frac{\partial\psi_1}{\partial Y_0}\left(-\frac{\sin 2\Phi_0}{2} D_{11} + \right.$$

$$\left. + \cos^2\Phi_0 D_{12}\right)\rangle + \langle\frac{\partial\psi_1}{\partial\Phi_0}(-\sin\Phi_0 D_{13} + \cos\Phi_0 D_{14})\rangle. \tag{14}$$

В (14) приняты обозначения

$$D_{13} = \int_0^\infty d\sigma B_{\sigma\alpha}(\sigma\cos\Phi_0, \sigma\sin\Phi_0),$$

$$D_{14} = \int_0^\infty d\sigma B_{\alpha\beta}(\sigma\cos\Phi_0, \sigma\sin\Phi_0). \tag{15}$$

Действуя аналогично, вычислим второе слагаемое в правой части (4), обозначенное Q_2:

$$Q_2 = \langle\frac{\partial\psi_2}{\partial X_0}\left(\sin^2\Phi_0 D_{21} - \frac{\sin 2\Phi_0}{2} D_{22}\right)\rangle + \langle\frac{\partial\psi_2}{\partial Y_0}\left(-\frac{\sin 2\Phi_0}{2} D_{21} + \right.$$

$$\left. + \cos^2\Phi_0 D_{22}\right)\rangle + \langle\frac{\partial\psi_2}{\partial\Phi_0}(-\sin\Phi_0 D_{23} + \cos\Phi_0 D_{24})\rangle. \tag{16}$$

Здесь $D_{21} = D_{12}$, $D_{23} = D_{14}$, а для вычисления коэффициентов D_{22}, D_{24}, равных

$$D_{22} = \int_0^\infty d\sigma\sigma B_{\beta\beta}(\sigma\cos\Phi_0, \sigma\sin\Phi_0),$$

$$D_{24} = \int_0^\infty d\sigma B_{\beta\beta}(\sigma\cos\Phi_0, \sigma\sin\Phi_0), \tag{17}$$

введена корреляционная функция $B_{\beta\beta}$:

$$B_{\beta\beta}(s_x, s_y) = -\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} B_\gamma (s_x, s_y + \rho) \mid_{\rho=0}.$$

Средние Q_1 и Q_2 уже замкнуты относительно искомой плотности вероятностей $W(x, y, \varphi; \sigma)$.

Найдем коэффициенты D_{pq} ($p = 1, 2$; $q = 1, ..., 4$): на примере гауссовой корреляционной функции B_γ с дисперсией σ_γ^2,

$$B_\gamma (s_x, s_y) = \sigma_\gamma^2 \exp\left(-\frac{s_x^2}{l_x^2} - \frac{s_y^2}{l_y^2}\right).$$

В этом случае все интегралы (13), (15), (17) берутся, и, переходя от $\psi_{1,2}$ снова к функции f, получаем:

$$\frac{d\langle f\rangle}{d\sigma} - \left\langle\frac{\partial f}{\partial X}\cos\Phi\right\rangle - \left\langle\frac{\partial f}{\partial Y}\sin\Phi\right\rangle = -\left\langle\frac{\partial^2 f}{\partial X_0\partial\Phi_0}\sin\Phi_0 C(\Phi_0)\right\rangle +$$

$$+\left\langle\frac{\partial^2 f}{\partial Y_0\partial\Phi_0}\cos\Phi_0 C(\Phi_0)\right\rangle + \left\langle\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi_0^2}D(\Phi_0)\right\rangle, \tag{18}$$

где введены обозначения

$$C(\Phi_0) = \frac{\sigma_\gamma^2\,[l_x^2 l_y^2 - 3\,(l_x^2 - l_y^2)\sin^2 2\Phi_0/4]}{(l_y^2\cos^2\Phi_0 + l_x^2\sin^2\Phi_0)^2},$$

$$D(\Phi_0) = \frac{\sqrt{\pi}\,\sigma_\gamma^2 l_x l_y}{(l_y^2\cos^2\Phi_0 + l_x^2\sin^2\Phi_0)^{3/2}}. \tag{19}$$

Последний раз воспользуемся условием двухмасштабности: с учетом плавности функции f не будем различать X и X_0, Y и Y_0, Φ и Φ_0 соответственно. Каждое среднее в (18) выразим через плотность вероятностей $W(x, y, \varphi; \sigma)$

$$\int dxdyd\varphi f\left(\frac{\partial W}{\partial\sigma} - \cos\varphi\frac{\partial W}{\partial x} - \sin\varphi\frac{\partial W}{\partial y}\right) =$$

$$= \int dxdyd\varphi f\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[C(\varphi)\left(\cos\varphi\frac{\partial W}{\partial y} - \sin\varphi\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right] +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[D(\varphi)\,W]\right\}. \tag{20}$$

При выводе (20) мы предположили, что функция f и производная $\partial f/\partial\varphi$ стремятся к нулю, когда $\varphi \to \pm\infty$. Поскольку f — произвольная функция, из (20) следует дифференциальное уравнение УФП для плотности вероятностей:

$$\frac{\partial W}{\partial\sigma} - \cos\varphi\frac{\partial W}{\partial x} - \sin\varphi\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[D(\varphi)\,W] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[C(\varphi)\left(\cos\varphi\frac{\partial W}{\partial y} - \sin\varphi\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right]. \tag{21}$$

Наибольший интерес для нас будет в дальнейшем представлять угловая зависимость плотности вероятностей, поэтому введем новую функцию

$$w(\varphi; \sigma) = \int dxdyW(x, y, \varphi; \sigma)$$

и усредним (21) по x и по y:

$$\frac{\partial w}{\partial\sigma} = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[D(\varphi)\,w]. \tag{22}$$

Из (3) следует, что начальное условие к (22) имеет вид

$$w(\sigma = 0) = \delta(\varphi).$$

Если неоднородности изотропны, $l_x = l_y \equiv l$, из (19) получим

$$D(\varphi) = D_0 = \sqrt{\pi}\,\sigma_\gamma^2/l.$$

В этом случае уравнение (22) имеет точное решение

$$w(\varphi; \sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma D_0}}\exp(-\varphi^2/4\sigma D_0),$$

откуда видно, что на достаточно большом расстоянии σ плотность вероятностей не зависит от φ, все углы равновероятны.

В общем случае, когда $l_x \neq l_y$, решить (22) аналитически не удается, хотя можно найти установившееся решение

$$w(\varphi; \sigma \to \infty) = \frac{C_1\varphi + C_2}{D(\varphi)}.$$

Для определения константы интегрирования C_1 воспользуемся в соответствии с (19) четностью коэффициента $D(\varphi)$. Из соображений симметрии очевидно, что плотность вероятностей должна быть четной функцией угла, поэтому $C_1 = 0$. Постоянная C_2 определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(\varphi)\, d\varphi = 1.$$

Найдем численно решение уравнения (22) для произвольных $D(\varphi)$ и σ. Введем параметр μ, характеризующий вытянутость неоднородностей вдоль одной из осей, и безразмерное расстояние τ вдоль луча

$$\mu = l_x/l_y, \qquad \tau = \sigma\sqrt{\pi}\,\sigma_\gamma^2/l_x.$$

Тогда, используя (19), перепишем (22) в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}[d(\varphi)\, w] \tag{23}$$

с коэффициентом диффузии

$$d(\varphi) = \frac{\mu^2}{(\cos^2\varphi + \mu^2\sin^2\varphi)^{3/2}}.$$

Будем различать абсолютный угол распространения луча φ, который изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, и реально наблюдаемый $\varphi_н \in [-\pi, \pi]$. Угол $\varphi_н$ имеют все лучи, которые сделали k полных оборотов вокруг оси x, поэтому полная вероятность того, что угол $\varphi_н$ попадет в интервал $[\varphi_1, \varphi_1 + \Delta\varphi]$, равна

$$P_н(\varphi \in [\varphi_1, \varphi_1 + \Delta\varphi]) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(\varphi \in [\varphi_1 + 2\pi k, \varphi_1 + \Delta\varphi + 2\pi k]).$$

Если интервал углов $\Delta\varphi$ достаточно мал и плотность вероятностей не успевает сильно измениться на нем, то наблюдаемая плотность вероятностей

$$w_н(\varphi; \tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w(\varphi + 2\pi k; \tau)$$

— периодическая функция φ с периодом 2π.

На рис. 2, *а* и 3, *а* приведены графики функции плотности вероятностей $w_н(\varphi)$ на одном периоде $\varphi \in [-\pi; \pi]$ при $\mu = 2$, $\tau = 0{,}03$ и $\mu = 5$, $\tau = 0{,}005$ соответственно: полученные численным интегрированием уравнения (23) с граничными условиями

$$w_н'(-\pi; \tau) = w_н'(\pi; \tau) = 0,$$

а на рис. 2, *б* и 3, *б* — установившиеся решения ($\tau_\infty = 2{,}25$ и $\tau_\infty = 3{,}1$) при тех же значениях μ. Уже при малых расстояниях τ видно, что плотность вероятностей имеет минимум в том направлении, в котором вытянуты неоднородности, т. е. лучи отклоняются в основном в ту сторону, где меньше характерный масштаб корреляции неоднородностей. Этот эффект тем сильнее, чем больше параметр μ. В случае, если $\mu < 1$, т. е. когда неоднородности вытянуты поперек первона-

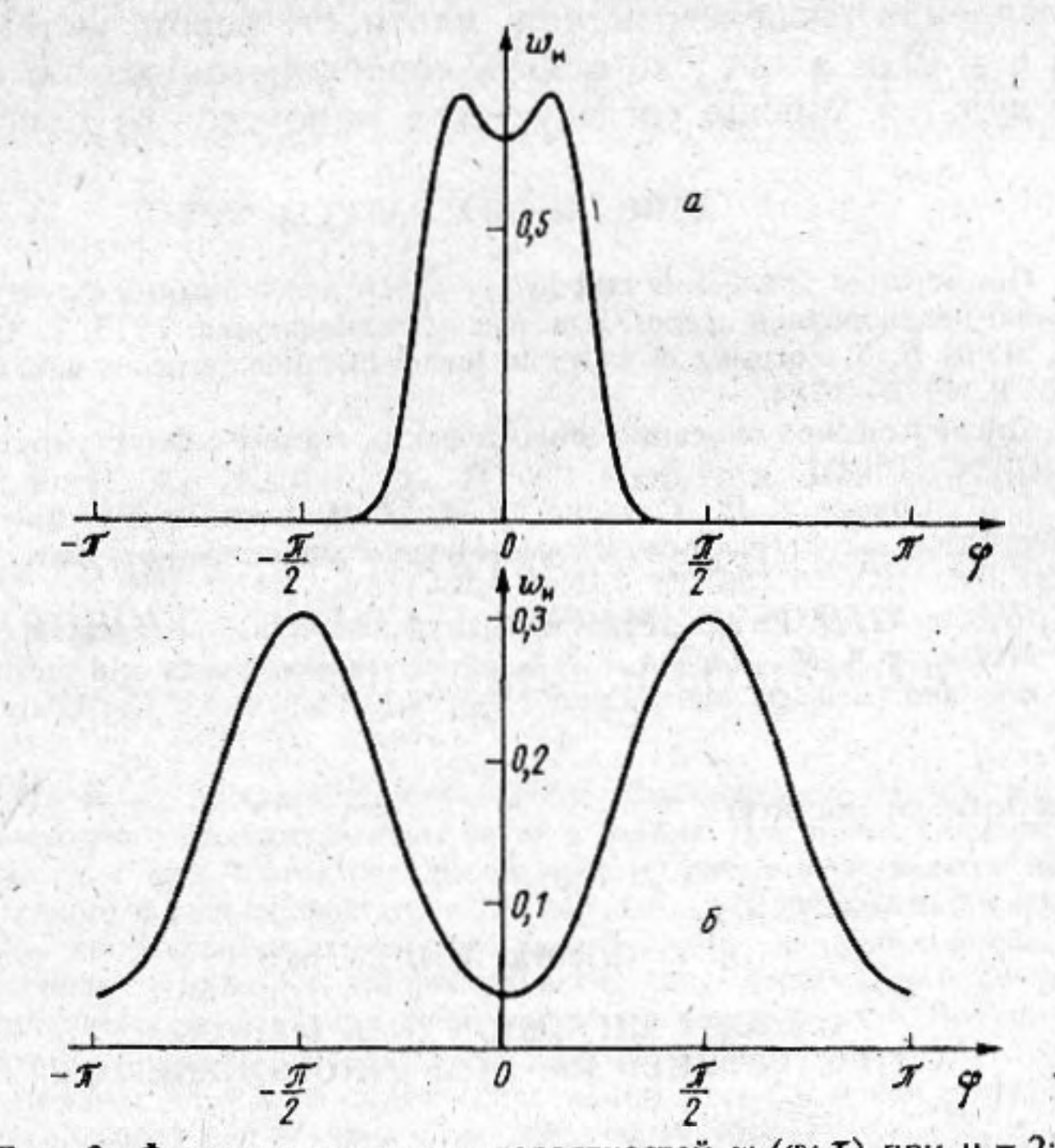

Рис. 2. Функция плотности вероятностей $w_н(\varphi; \tau)$ при $\mu = 2$: *а* — $\tau = 0{,}03$; *б* — установившееся решение ($\tau_\infty = 2{,}25$)

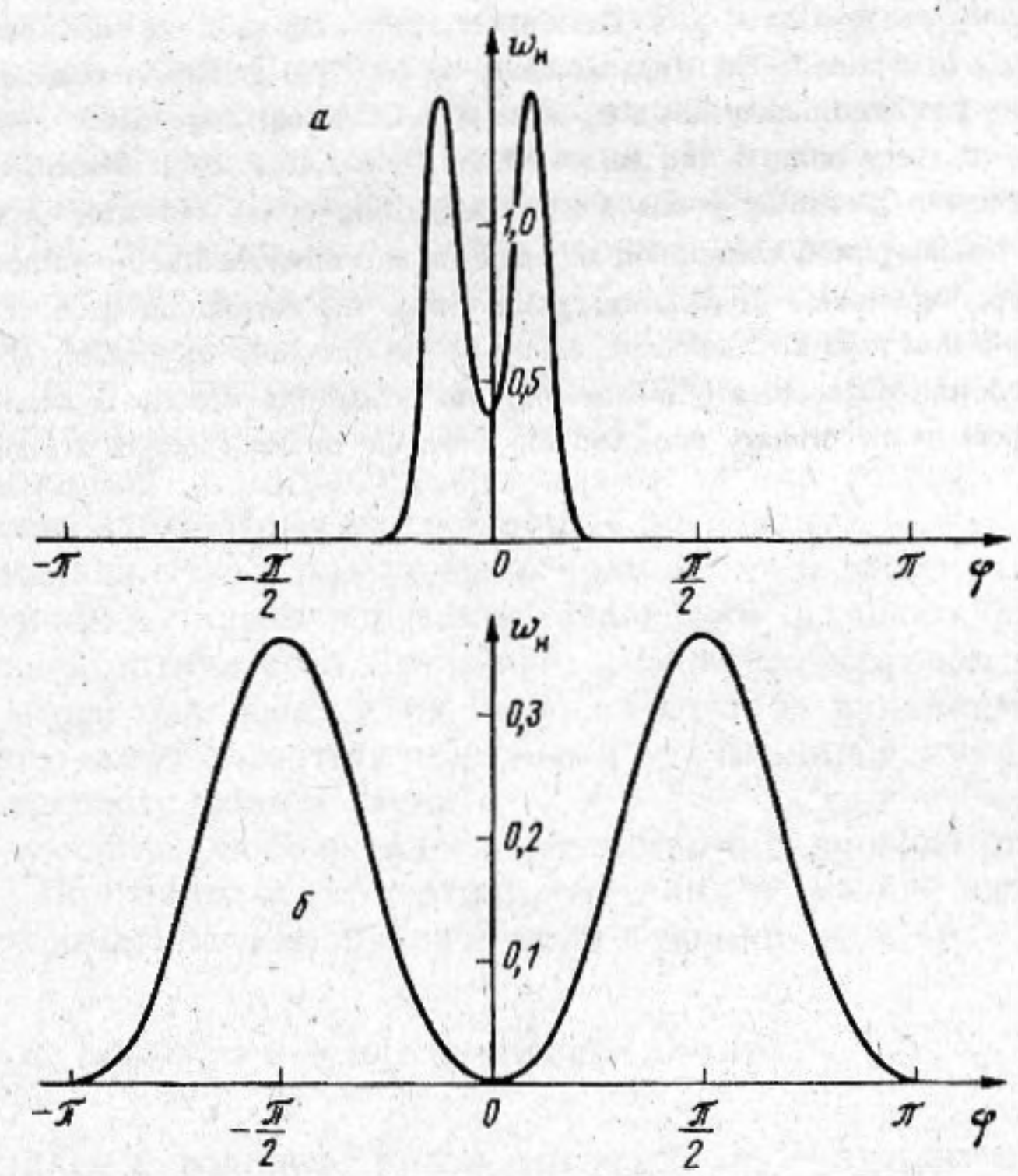

Рис. 3. Функция плотности вероятностей $w_н(\varphi; \tau)$ при $\mu = 5$: *а* — $\tau = 0{,}005$; *б* — установившееся решение ($\tau_\infty = 3{,}1$)

чального направления распространения, плотность вероятностей, наоборот, максимальна при $\varphi = 0$, и в пределе дельта-коррелированных по оси x неоднородностей наш результат хорошо согласуется с малоугловым приближением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубарева Н. В.* Применение уравнения диффузии лучей для описания флуктуаций интенсивности света в случайно-неоднородной среде//Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. № 2. С. 310—312.
2. *Kulkarny V. A., White B. S.* Focusing of waves in turbulent inhomogeneous media//Phys. Fluids. 1982. V. 25. No. 10. P. 1770—1784.
3. *Кляцкин В. И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975. С. 106.
4. *Вировлянский А. Л., Саичев А. И., Славинский М. М.* Моментные функции волн, распространяющихся в волноводах с вытянутыми случайными неоднородностями показателя преломления//Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 9. С. 1149—1159.
5. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. С. 17.
6. *Gurbatov S. N., Malakhov A. N., Saichev A. I.* Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays and particles. Manchester; New York: Manchester University Press, 1991. P. 122.

Нижегородский
архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию
30.04.93

E. Z. Gribova, A. I. Saichev

ON RAYS DIFFUSION IN A MEDIUM WITH STRETCHED RANDOM INHOMOGENEITIES

Propagation of a hydroacoustic wave in an inhomogeneous ocean is considered. The accepted model of inhomogeneities is a typical one for underwater sound channels, since they are assumed to be two-dimensional (one vertical and one horizontal coordinates) in the ray propagation plane. Moreover, they are stretched along the horizontal axis. The Fokker-Planck equation for coordinates probability density and propagation angle is obtained. The dynamic causality principle and the two-scale principle are applied for this purpose. The last condition means that there is a functional dependence between ray coordinates, a propagation angle in every point σ and values of the function γ, which describes the properties of an inhomogeneous medium in preceding points $\sigma' < \sigma$. According to the two-scale principle the coordinates alter slightly in the inhomogeneity correlation scheme. On the other hand, the values of γ are statistically independent in the points situated at distances greater than the correlation scale. The numerical solution of the equation shows that rays are deflected mainly in the directions of smaller inhomogeneity scales. In the case of stretched inhomogeneities it means that the probability density is maximum in the direction transversal with respect to the primary one, and the more the inhomogeneities are streitched, the stronger becomes this effect.