АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 6

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 532.529

© 1993 г. Абдель Азиз Н.

ВЛИЯНИЕ КОНДЕНСАЦИИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В ПАРОВОМ ПУЗЫРЬКЕ ПРИ ЕГО СЖАТИИ

Рассмотрим задачу о распределении скоростей частиц пара в пузырьке при его радиальном сжатии. Эта проблема представляет интерес, например, в связи с необходимостью корректного задания конвективного члена уравнения теплопроводности в паровой фазе при изучении межфазного тепло- и массообмена в пузырьковых средах.

Выпишем систему уравнений, описывающих тепло- и массообмен сферического парового пузырька с жидкостью. Уравнения притока тепла, неразрывности и состояния фаз в эйлеровых координатах r, t имеют вид [1]:

$$\left.\begin{aligned} &\rho_v\left(\frac{\partial u_v}{\partial t}+v_v\frac{\partial u_v}{\partial r}\right)=r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_v r^2\frac{\partial T_v}{\partial r}\right)+\frac{p_v}{\rho_v}\frac{d\rho_v}{dt},\\ &\frac{\partial\rho_v}{\partial t}+r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho_v v_v)=0,\ p_v(t)=B\rho_v T_v,\\ &\rho_l\left(\frac{\partial u_l}{\partial t}+v_l\frac{\partial u_l}{\partial r}\right)=r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_l r^2\frac{\partial T_l}{\partial r}\right),\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$$u_l=c_lT_l,\quad u_v=c_VT_v,\quad \rho_l=\mathrm{const},$$

где ρ — плотность, T — температура, v — скорость, p — давление, λ — коэффициент теплопроводности, B — газовая постоянная, u — удельная внутренняя энергия, c_V — удельная теплоемкость пара при постоянном объеме. Индексы v и l относятся соответственно к параметрам пара и жидкости, индекс 0 — к параметрам в невозмущенном состоянии.

При этом предполагается, что жидкость несжимаема, пар описывается уравнением идеального газа, а на межфазной границе находится в насыщенном состоянии и подчиняется уравнению Клапейрона — Клаузиуса, которое при состояниях, далеких от критических, имеет вид

$$\frac{dT_s}{dp}=\frac{T_s}{l\rho_v}\quad(\rho_v\ll\rho_l).\tag{2}$$

Здесь l — удельная теплота испарения, индекс s относится к параметрам в насыщенном состоянии. Граничные условия для уравнений притока тепла имеют вид

$$r=R(t):\lambda_l\frac{\partial T_l}{\partial r}-\lambda_v\frac{\partial T_v}{\partial r}=jl,\quad T_v=T_l=T_s(\rho_v),\tag{3}$$

$$r=0:\frac{\partial T_v}{\partial r}=0,\quad v_v=0;\quad r\to\infty:T_l=T_0=\mathrm{const},$$

где j — скорость фазового перехода с единицы поверхности ($j>0$ для испарения, $j<0$ для конденсации).

Граничное условие в центре пузырька получено из условия конечности потока тепла, температуры и плотности. Предполагается, что жидкость является термостатом и сохраняет на достаточном расстоянии от пузырька начальную температуру. Скорость поверхности пузырька и массовые скорости фаз на этой поверхности связаны соотношениями

$$\frac{dR}{dt}=w_l+j/\rho_l,\quad \frac{dR}{dt}=w_v+j/\rho_v(R),\tag{4}$$

где R — радиус пузырька, w_i — массовая скорость i-й фазы на поверхности пузырька ($i=l,\ v$).

В случае, когда массовые скорости в паровой фазе значительно меньше скорости звука в паре, можно пользоваться допущением об однородности поля давления в пузырьке [1]:

$p_v = p_v(t)$.

В этом случае имеет место интеграл уравнения притока тепла для паровой фазы:

$$\frac{dp_v}{dt} = \frac{3(\gamma - 1)}{R}\left(\lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial r}\right)_R - \frac{3\gamma p_v}{R} w_v. \tag{5}$$

Здесь $\gamma = c_p/c_V$ — показатель адиабаты пара, c_p — теплоемкость пара при постоянном давлении.

Для задания конвективных членов уравнений теплопроводности в жидкой и паровой фазах необходимо знать распределение скоростей в фазах. Предположение о несжимаемости жидкости приводит к параболическому распределению скоростей жидкости вокруг пузырька:

$$v_l = w_l \frac{R^2}{r^2}. \tag{6}$$

Нахождение распределения скоростей в паровой фазе из-за ее сжимаемости представляет гораздо более сложную проблему. Однако она успешно решается при использовании допущения об однородности поля давления в пузырьке, которое оказалось очень плодотворным в динамике пузырьковых жидкостей [2]. Это допущение позволяет путем интегрирования уравнения неразрывности паровой фазы с учетом граничных условий $v_v(0, t) = 0$; $v_v(R, t) = w_v$ определить профиль скорости в пузырьке [1]:

$$v_v(r, t) = \frac{r}{R} w_v + \frac{\gamma - 1}{\gamma p_v}\left[\lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial r}\Big|_r - \frac{r}{R}\left(\lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial r}\right)_R\right]. \tag{7}$$

Динамика радиального движения задается уравнением Рэлея

$$R\frac{dw_l}{dt} + \frac{3}{2} w_l^2 = \frac{p_v - p_\infty}{\rho_l}, \tag{8}$$

где p_∞ — давление жидкости вдали от пузырька.

При изучении структуры волн в пузырьковых жидкостях представляет также интерес изучение поведения содержимого пузырька при заданном законе движения его поверхности. В случае размытой волны параметры в начале волны меняются монотонно по экспоненте [3].

В этом случае при небольших изменениях размера пузырька можно получить аналитическое решение задачи, которое ищем в виде

$$R = R_0\,[1 + \delta \exp\{ht\}] \quad (\delta \ll 1),$$

$$p_v = p_0\,[1 + P_v \exp\{ht\}],$$

$$T_v = T_0\,[1 + \theta_v(r) \exp\{ht\}],$$

$$T_l = T_0\,[1 + \theta_0(r) \exp\{ht\}], \tag{9}$$

$$w_v = U_0 W_v \exp\{ht\},$$

$$v_v = U_0 V_v \exp\{ht\}, \quad U_0 = a_v/R_0,$$

где $a_v = \lambda_v/\rho_v c_p$ — коэффициент температуропроводности пара.

Основные линеаризованные уравнения (1) — (5), необходимые для решения задачи, можно переписать в виде

$$H\theta_v = \nabla^2\theta_v + (1 - 1/\gamma)\,HP_v, \tag{10}$$

$$HP_v = 3\gamma\left(\frac{\partial\theta_v}{\partial\xi}\Big|_1 - W_v\right), \tag{11}$$

$$\Theta_s = \alpha(1 - 1/\gamma)\,P_v, \tag{12}$$

$$H = \frac{hR_0^2}{a_v}, \quad \xi = \frac{r}{R_0}, \quad \alpha = \frac{c_p T_0}{l},$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

Решение линеаризованного уравнения (10) притока тепла в паровой фазе имеет вид

$$\Theta_v = [\Theta_s - (1 - 1/\gamma) P_v] \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{H}\,\xi)}{\xi \operatorname{sh}\sqrt{H}} + (1 - 1/\gamma) p_v \tag{13}$$

Выражение для профиля скорости в пузырьке (7) можно переписать так:

$$V_v = \xi W_v + \frac{\partial \Theta_v}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial \Theta_v}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1}. \tag{14}$$

Подставив (12) в (13), найдем связь Θ_v с P_v:

$$\Theta_v = (1 - 1/\gamma) P_v \left[1 + (\alpha - 1) \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{H}\,\xi)}{\xi \operatorname{sh}(\sqrt{H})}\right]. \tag{15}$$

Вычислив производную от (15) при $\xi = 1$ и подставив ее в уравнение (11), получим связь P_v и W_v:

$$P_v = -3\gamma W_v/\beta_1 y^2, \tag{16}$$

где $y = \sqrt{H}$, $\beta_1 = 1 + 3(\gamma - 1)(1 - \alpha) G(y)$,

$$G(y) = y^{-2}(y \operatorname{cth} y - 1).$$

Подставив (16) в (15), а затем (15) в (14), получим окончательное выражение для профиля скорости частиц пара в сжимающемся пузырьке:

$$\frac{v_v}{w_v} = \xi + 3(\gamma - 1)(1 - \alpha)\frac{\beta_2}{\beta_1}, \tag{17}$$

где

$$\beta_2 = \frac{\operatorname{sh}(\xi_y)}{\operatorname{sh} y} G(\xi_y) - \xi G(y).$$

В случае газового пузырька постоянной массы в выражениях для β_1 и (17) следует положить $\alpha = 0$, так как случай без фазовых переходов можно рассматривать как предельный, когда удельная теплота парообразования $l \to \infty$ ($\alpha = c_p T_0/l \to 0$).

Из формулы (17) следует, что конденсация за счет множителя $(1 - \alpha)$ приводит к уменьшению отклонения профиля скорости в пузырьке от линейной зависимости ($v_v = \xi w_v$), соответствующей модели однородного пузырька, когда $\partial\Theta_v/\partial\xi \equiv 0$.

Кроме того, сама массовая скорость паровой фазы на поверхности пузырька w_v может быть очень малой за счет конденсации, как это видно из уравнений (4). Из формулы (17) следует также вывод о том, что профиль скорости в паровом пузырьке очень близок к линейной зависимости при $\alpha \approx 1$. Это условие ($c_p T_s/l \approx 1$) при атмосферном давлении выполняется для жидкого гелия, а для воды имеет место при $p \sim 3$ МРа. Чтобы физически понять сделанный выше вывод, следует связать параметр α с теплоемкостью пара c_s вдоль кривой фазового равновесия [4]:

$$c_s = c_p - T\left(\frac{dp}{dT}\right)_s \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\rho}\right)_p \approx c_p - \frac{l}{T_s}. \tag{18}$$

Отсюда

$$\alpha - 1 = c_s T_s/l.$$

Для большинства жидкостей, в частности для воды, при $p \sim 0{,}1$ МРа, $c_s < 0$. Это означает,что для того чтобы при сжатии пар оставался в насыщенном состоянии, надо отводить от него тепло. Степень отклонения параметра α от единицы характеризует отклонение температуры в центре парового пузырька от температуры поверхности $T_s(p_v)$.

При $\alpha \approx 1$ температура в пузырьке практически однородна. Этим и объясняется, что в этом случае профиль скорости в пузырьке практически линеен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С., Нагиев Ф. Б.* Динамика тепло- и массоперенос в парогазовых пузырьках в жидкости//Журн. тепло- и массопереноса. 1981. Т. 24. № 6. С. 1033.
2. *Нигматулин Р. И.* Математическое моделирование движения жидкости с пузырьками и гидро-

динамические эффекты при распространении волн//Итоги прикладных наук. 1992. Вып. 38. С. 267.
3. *Зыонг Нгок Хай, Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С.* Структура ударных волн в жидкости с пузырьками пара//Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. № 2. С. 109.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1976.

Кафедра математики
педагогического факультета
Александрийского университета
Александрия
Арабская Республика Египет

Поступило в редакцию
15.10.92

УДК 534

© 1993 г. М. Г. С. Али

УЛЬТРАЗВУК В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ В БЛИЖНЕМ ПОЛЕ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ ПОРШНЯ

В статье описан простой подход к расчету ближнего поля плоского поршневого источника ультразвука, излучающего в поглощающую среду. Подход основан на решении Шоха в виде линейного интеграла. Представлен численный метод определения профиля звукового давления в волне в ближнем поле, основанный на полевой теории Шоха. Рассчитано пространственное распределение квадрата амплитуды звукового давления. Полученные на основе предложенного подхода результаты находятся в хорошем согласии с ранее опубликованными численными результатами.

В ультразвуковой медицинской диагностике экспозиция часто оказывается в ближнем поле преобразователей, размеры которых много больше длины звуковой волны. В биологическом веществе поглощение значительно и должно учитываться в расчете акустического поля. Поведение луча в ближнем поле важно для понимания взаимодействий между ультразвуком и средой.

Для описания ближнего акустического поля был получен ряд приближенных решений [1—3], которые дают некоторое представление о его структуре. Недавно Уэсли [4] нашел приближенные выражения, которые применимы к ближнему полю плоского поршня в поглощающей среде. Одно частное приближение применимо вблизи оси симметрии; оно получено обобщением результата, данного Шохом [5]. Другое ценное выражение было дано Пирсом [6]. Используя комбинацию этих двух выражений, Уэсли [4] вычислил непрерывные волновые поля.

В данной статье представлен простой подход, расширяющий область применимости решения Шоха [5] для ближнего акустического поля вблизи оси симметрии. Далее, с помощью этого подхода с достаточной точностью рассчитано волновое поле, излучаемое преобразователем, параметры которого представляют биомедицинский интерес.

Предположим, что акустический луч создается идеально плоским круговым поршнем и распространяется в однородной и недиссипативной среде. Рэлей [7] показал, исходя из теоремы Грина, что зависящий от времени потенциал скорости φ дается выражением

$$\varphi = \int_S u_n \left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{1}{2\pi r}\, dS, \tag{1}$$

где r — расстояние от точки наблюдения до элемента поверхности dS; c — скорость звука, $u_n\,(t - r/c)$ — нормальная составляющая скорости поршня в момент $t - r/c$, когда возмущение возникло на поверхности.

Шох [5] получил решение для поля синусоидально колеблющегося плоского акустического источника произвольной формы и имеющего равномерное распределение амплитуды колебаний. Вывод решения включает преобразование рэлеевского интеграла по поверхности в выражение в виде линейного интеграла посредством сдвига начала системы координат. Выражение Шоха в точке P, расположенной внутри области источника (рис. 1), может быть написано в виде

$$\varphi = \frac{u}{ik} \exp(-ikz) - \frac{u}{2\pi ik} \int \exp\left[-ikr(\psi)\right] d\psi, \tag{2}$$

где $k = \omega/c$, u — амплитуда скорости на поверхности поршня и $r(\psi)$ — расстояние от точки наблюдения до элемента поверхности (см. рис. 1). Первый член в выражении (2) представляет вклад плоской волны, в то время как второй член определяет вклад края поршневого источника. Мгновенное значение звукового давления p в текущей точке поля дается выражением $p = i\rho\omega\varphi$ или $p = \rho ucf$,