АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 1, с. 139 - 141

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.22

ВОЛНЫ РЭЛЕЕВСКОГО ТИПА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ОДНОРОДНОГО ТВЕРДОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И НЕОДНОРОДНОГО ЖИДКОГО СЛОЯ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ И СКОРОСТИ ЗВУКА

© 1994 г. **В. С. Борщан, О. Д. Сивкова**

Новомосковский филиал Российского химико-технологического университета им. Д.И. Менделеева

г. Новомосковск Тульской обл., ул. Дружбы, д. 8

Поступила в редакцию 09.04.93 г.

Поверхностные акустические волны в неоднородных средах могут быть изучены лишь для некоторых частных случаев, так как точные решения уравнений распространения упругих волн в таких средах могут быть найдены для немногих законов распределения параметров сред [1]. Так, волны Лява в среде со слабой поверхностной неоднородностью и экспоненциальным распределением плотности и модуля сдвига описаны в [2]. В [1] рассмотрены поверхностные волны в твердой среде с линейным изменением квадратов волновых чисел. Изучены рэлеевские волны в полупространстве с экспоненциальным изменением плотности при постоянной скорости звука [3] и на границе однородного полупространства с неоднородным слоем, имеющим постоянную плотность и волновое число $k^2(z) \sim 1 - a/(b-z)^2$ [4]. В настоящей работе рассмотрены волны рэлеевского типа на границе раздела изотропного однородного полупространства и неоднородного слоя идеальной жидкости с экспоненциальными законами плотности и скорости звука. Слой такого типа существует, например, на поверхности водорастворимых кристаллов, находящихся во влажном воздухе [5].

Предполагалось, что твердая среда занимает область $z > 0$, а жидкость: $-h < z < 0$. Уравнение распространения гармонической волны в неоднородной жидкости может быть приведено к виду [6]

$$\Delta\rho(\mathbf{r}) - \nabla\ln\rho(\mathbf{r})\nabla p(\mathbf{r}) + k^2(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = 0,$$

где $p(\mathbf{r})$ – акустическое давление, $\rho(\mathbf{r})$ – плотность жидкости, $k(\mathbf{r})$ – волновое число в жидкости. Решения этого уравнения, соответствующие распространяющейся вдоль оси x неоднородной волне, ищутся в виде

$$p(x, z) = p(z)\exp(ikx),$$

где k – волновое число поверхностной волны. Если плотность и скорость звука в жидкости изменяются по законам

$$\rho(z) = \rho_0\exp(\alpha, z)\ ,\ c(z) = c_0\exp(\beta z),$$

где ρ_0 и c_0 – плотность и скорость звука в плоскости $z = 0$, то уравнения для $p(z)$ запишется как

$$\frac{d^2p(z)}{dz^2} - \alpha\frac{dp(z)}{dz} + [k_0^2\exp(-2\beta z) - k^2]\,p(z) = 0.$$

Его решение [7] имеет вид

$$p(z) = [C_1I_\nu(Y) + C_2N_\nu(Y)]\exp\frac{\alpha z}{2},$$

где $I_\nu(Y)$ и $N_\nu(Y)$ – функции Бесселя и Неймана,

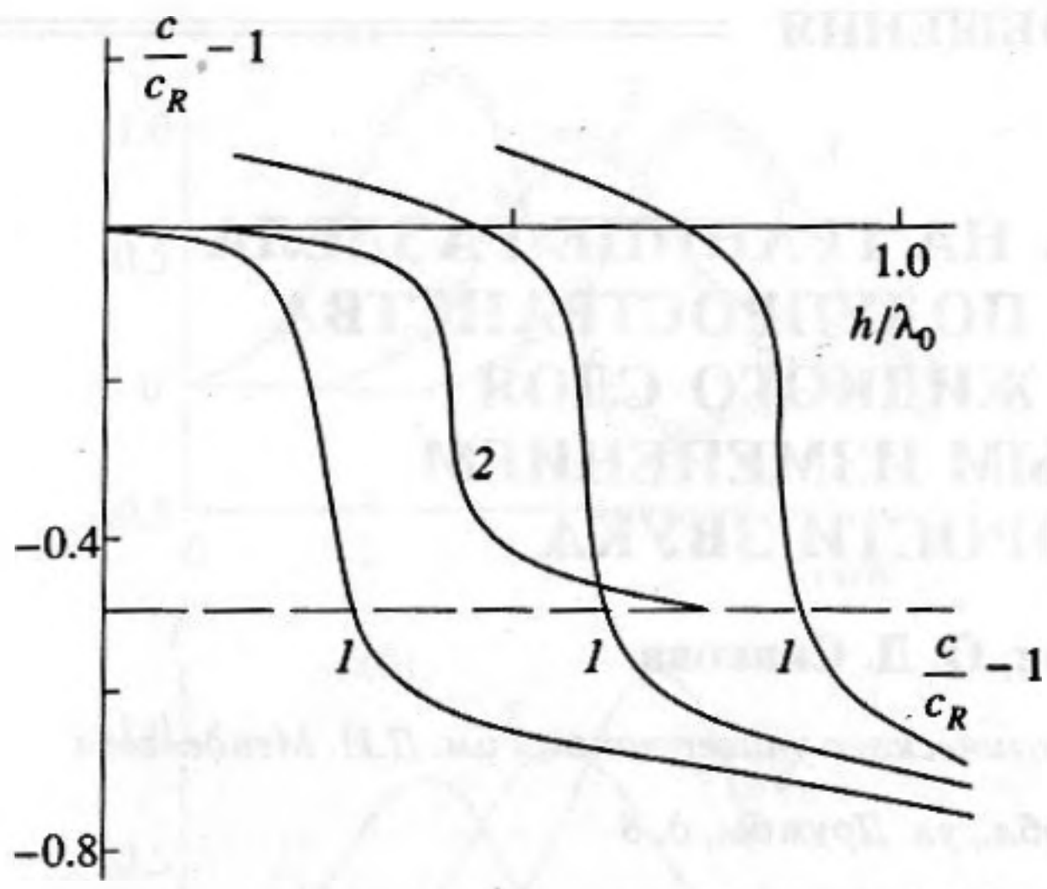
$$Y = \frac{k_0}{|\beta|}\exp(-\beta z), \quad \nu = \sqrt{\frac{k^2}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{4\beta^2}}.$$

Компонента вертикального смещения в жидкости связана с $p(z)$ соотношением

$$W_z = \frac{1}{w^2\rho(z)}\frac{dp(z)}{dz}\exp\,[i\,(kx - \omega t)\,].$$

С учетом выражений для смещения U_z, напряжений T_{zz} и T_{xz} в твердом теле, полученных в [2], подстановка в граничные условия

$$p(-h) = 0, \quad U_z|_{z=0} = W_z|_{z=0},$$
$$T_{zz}|_{z=0} = -p(0), \quad T_{xz}|_{z=0} = 0$$



Зависимость относительного изменения $c/c_R - 1$ скорости рэлеевской волны от относительной толщины h/λ_0 слоя: *1* – $\beta > 0$, *2* – $\beta < 0$.

дает систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 I_\nu(\bar{Y}) + C_2 N_\nu(\bar{Y}) = 0, \\ -qA + ikB - \dfrac{\alpha I_\nu(Y_0) - 2k_0 I'_\nu(Y_0)}{2\omega^2\rho_0} C_1 - \\ \qquad - \dfrac{\alpha N_\nu(Y_0) - 2k_0 N'_\nu(Y_0)}{2\omega^2\rho_0} C_2 = 0, \\ (2\mu q^2 - \lambda k_l^2)A - 2\mu ksiB + I_\nu(Y_0)C_1 + N_\nu(Y_0)C_2 = 0, \\ 2kqiA + (k^2 + s^2)B = 0, \end{cases}$$

где

$$\bar{Y} = Y|_{z=-h} = \frac{k_0}{|\beta|}\exp(\beta h), \quad Y_0 = Y|_{z=0} = \frac{k_0}{|\beta|},$$

$$I'_\nu(Y) = \frac{dI_\nu(Y)}{dY}, \quad N'_\nu(Y) = \frac{dN_\nu(Y)}{dY},$$

$$q = \sqrt{k^2 - k_l^2}, \quad s = \sqrt{k^2 - k_t^2},$$

k_l и k_t – волновые числа продольной и сдвиговой волн в твердом теле.

Приравнивая к нулю определитель этой системы и проведя несложные преобразования, можно получить характеристическое уравнение

$$4k^2qs - (k^2 + s^2)^2 = \frac{\rho_0 q k_t^4}{\rho k_0 D}, \tag{1}$$

где ρ – плотность твердой среды,

$$D = \frac{\alpha}{2k_0} + \frac{I_\nu(\bar{Y})N'_\nu(Y_0) - N_\nu(\bar{Y})I'_\nu(Y_0)}{N_\nu(\bar{Y})I_\nu(Y_0) - I_\nu(\bar{Y})N_\nu(Y_0)}. \tag{2}$$

Связь между толщинами h_1 и h_m слоев, соответствующих одному и тому же значению волнового числа k в первой и m-й нормальных волнах, находится из условия $D(\bar{Y}_1) = D(\bar{Y}_m)$, приводящего к уравнению

$$\frac{N_\nu(\bar{Y}_1)}{I_\nu(\bar{Y}_1)} = \frac{N_\nu(\bar{Y}_m)}{I_\nu(\bar{Y}_m)}. \tag{3}$$

Если $\beta > 0$, то при больших значениях h_m выполняется условие $Y_m \gg \nu$ и соответствующее асимптотическое представление [8] преобразует (3) к виду

$$\frac{N_\nu(\bar{Y}_1)}{I_\nu(\bar{Y}_1)} = \mathrm{tg}(\bar{Y}_m - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}). \tag{4}$$

В этом случае действительные решения характеристического уравнения описывают множество незатухающих нормальных волн.

Если $\beta < 0$, то число нормальных волн зависит от соотношения $|\beta|$ и k_0. При $|\beta| \ll k_0$ имеет место $\bar{Y} \gg 1$, выполняется соотношение (4) и существует множество нормальных волн. Если $|\beta|$ и k_0 одного порядка, то количество нормальных волн определяется числом полных периодов функций $I_\nu(\bar{Y})$ и $N_\nu(\bar{Y})$, попадающих в область $0 < \bar{Y} < Y_0$. Если в этом интервале оказывается менее одного полного периода, то существует только одна незатухающая нормальная волна. В частности, это всегда имеет место при $k_0 \le 3|\beta|$, поскольку в области $0 < Y < 3$ являются апериодическими даже функции Бесселя и Неймана нулевого порядка. В случае соизмеримости $|\beta|$ и k_0 при $k \to \infty$ имеем $\bar{Y} = 0$, $I_\nu(\bar{Y}) = 0$ и $D = \alpha/2k_0 - I'_\nu(Y_0)/I_\nu(Y_0)$. При подстановке последнего выражения в (1) получается характеристическое уравнение волны Стоунли.

В отсутствие слоя ($h = 0$) уравнение (1) переходит в уравнение Рэлея, так как $D \to \infty$. Действительно, в этом случае $\bar{Y} = Y_0$ и числитель дроби в выражении (2) представляет собой определитель Вронского [9], имеющий конечное значение $2/\pi Y_0$, а знаменатель обращается в нуль.

Если слой однородный, то, устремляя α и β к нулю, имеем $\nu = k/|\beta| \to \infty$, $Y_0 \to \infty$, $\bar{Y} = Y_0(1 + \beta h)$. Используя асимптотическое представление бесселевых функций для больших значений ν и $Y(Y > \nu)$

через ряды Дебая [8] и ограничиваясь первым членом ряда, получим

$$I_\nu(Y) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi d}}\cos\varphi\ ,\ N_\nu(Y) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi d}}\sin\varphi,$$

где $d = \sqrt{Y^2 - \nu^2}$, $\varphi = d - \nu\,\mathrm{arctg}\frac{d}{\nu} - \frac{\pi}{4}$.

Подстановка этих формул дает выражения

$$N_\nu(\bar{Y})I_\nu(Y_0) - I_\nu(\bar{Y})N_\nu(Y_0) \approx \frac{2\beta}{\pi\sqrt{k_0^2 - k^2}}\sin\sqrt{k_0^2 - k^2}h,$$

$$I_\nu(\bar{Y})N'_\nu(Y_0) - N_\nu(\bar{Y})I'_\nu(Y_0) \approx \frac{2\beta}{\pi k_0}\cos\sqrt{k_0^2 - k^2}h,$$

преобразующие (1) в характеристическое уравнение для однородного слоя [2].

Численные решения уравнения (1) проводились с использованием таблиц специальных функций [8] для следующих параметров твердого тела и жидкости:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 0.4,\quad \frac{k_0}{k_t} = 3,\quad \frac{k_t^2}{k_l^2} = 3,\quad |\alpha| = |\beta| = \frac{k_t}{2}.$$

На рисунке приведены зависимости относительного изменения $c/c_R - 1$ скорости рэлеевской волны от отношения h/λ_0 (λ_0 – длина волны в жидкости на плоскости $z = 0$) для случаев $\beta > 0$ (кривая *1*, приведены три первые нормальные волны) и $\beta < 0$ (кривая *2*, для указанных выше значений k_0 и $|\beta|$ существует только одна нормальная волна, c_s – скорость волны Стоунли). Расчеты также показали, что при $\beta > 0$ и $h \to \infty$ скорость поверхностной волны стремится к нулю. Энергия волны будет излучаться в жидкость.

Авторы выражают признательность В.В. Крылову за обсуждение цели и результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. *Зволинский Н.В.* Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве частотного типа // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1945. № 3. С. 261- 278.
4. *Завадский В.Ю.* Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М.: Наука, 1972. 558 с.
5. *Хамский Е.В.* Кристаллические вещества и продукты. М.: Химия, 1986. 221 с.
6. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференцальным уравнениям. М.: Наука, 1976. С. 376.
8. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
9. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.