АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 3, с. 377 - 379

УДК 534.1:624.07

ГАШЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПОДСТРОЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

© 1994 г. А. И. Весницкий, И. В. Милосердова

Нижегородский филиал Института машиноведения РАН
603083 Н. Новгород

Поступила в редакцию 16.07.93 г.

На основе волнового представления динамических процессов в стержне показано, что эффект оптимального гашения продольных колебаний может быть достигнут при любых параметрах концевого закрепления стержня путем полного согласования потока вибраций посредством перемещения подстроечных масс вдоль стержня.

Подобно тому как это делается в радиотехнике для согласования потоков волновой энергии [1], в конструкциях машин и механизмов можно предусмотреть подстроечные элементы, с помощью которых производится настройка системы на безотражательное прохождение по ней потоков вибраций, и тем самым достигается минимальный уровень виброактивности.

В работе [2] решена задача о колебаниях стержня с одним подстроечным элементом в виде массы, которая может перемещаться вдоль стержня. В этом случае осуществление подстройки при изменении частоты возмущения возможно при одновременном регулировании не только места положения, но и массы подстроечного элемента.

Ниже демонстрируется способ согласования потоков вибраций в стержне с двумя подстроечными массами, которые позволяют путем изменения только лишь места их положения проводить непрерывную подстройку в зависимости от частоты возмущения.

Систему источник–стержень–присоединенное звено (нагрузка) представим в виде полубесконечного стержня, соединенного на конце с массой, пружиной и демпфером, характеризующими инерционно-упругие и диссипативные свойства нагрузки (рисунок).

На стержень нанизаны две сосредоточенные массы, которые можно перемещать вдоль него и фиксировать в любом положении.

Будем считать, что периодический источник возмущений находится в бесконечности и имеет частоту ω.

Продольные колебания стержня описываются волновым уравнением

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющим краевому условию при $x = 0$:

$$EFu_x - mu_{tt} - \alpha u_t - \kappa u|_{x=0} = 0 \qquad (2)$$

и условиям сопряжения смещений и продольных напряжений в местах закрепления дополнительных масс:

$$EFu_x\big|_{x=l^+} - EFu_x\big|_{x=l^-} = m_1(u_l^0)_{tt}, \qquad (3)$$

$$EFu_x\big|_{x=(l+L)^+} - EFu_x\big|_{x=(l+L)^-} = m_2(u_{l+L}^0)_{tt}, \qquad (4)$$

$$u\big|_{x=l^+} = u\big|_{x=l^-} = u_l^0, \qquad (5)$$

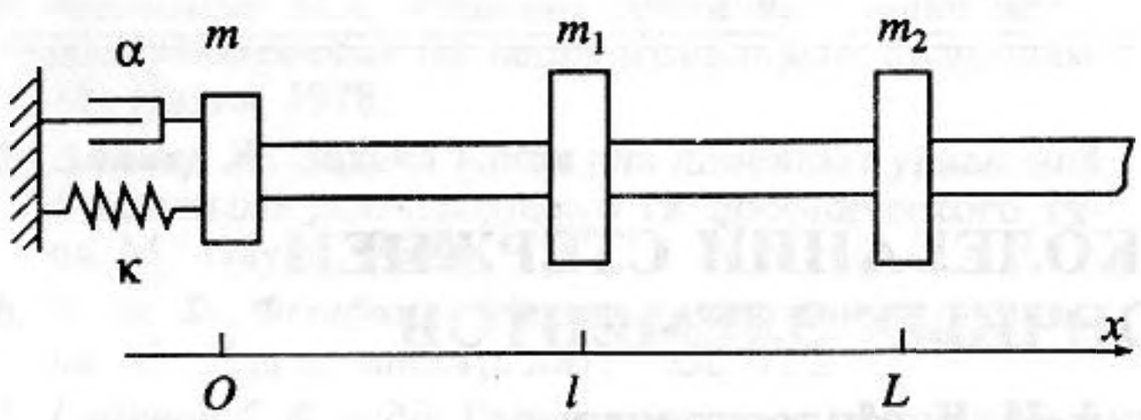
$$u\big|_{x=(l+L)^+} = u\big|_{x=(l+L)^-} = u_{l+L}^0. \qquad (6)$$

Здесь $u(x, t)$ – продольное смещение стержня; x, t – координата и время; c – скорость распространения продольных волн в стержне; E – модуль Юнга; F – площадь поперечного сечения стержня; m, κ, α – масса, жесткость и коэффициент вязких потерь присоединенного к стержню объекта; $m_{1,2}$ – массы подстроечных элементов, u_l^0, u_{l+L}^0 – смещения стержня в сечениях $x = l$ и $x = l + L$, т.е. в местах установки элементов.

На каждом участке стержня ($0 \le x \le l$, $l \le x \le l + L$, $x \ge l + L$) решение уравнения (1) может быть представлено в виде суперпозиции двух бегущих навстречу друг другу волн:

$$u(x, t) = \begin{cases} A_1 e^{i(\omega t + kx)} + B_1 e^{i(\omega t - kx)}, & 0 \le x \le l, \\ A_2 e^{i[\omega t + k(x-l)]} + B_2 e^{i[\omega t - k(x-l)]}, & l \le x \le l + L, \\ A_3 e^{i[\omega t + k(x-l-L)]} + B_3 e^{i[\omega t - k(x-l-L)]}, & x \ge l + L, \end{cases} \qquad (7)$$

где A_j ($j = 1, 2, 3$) – амплитуды падающей ($j = 3$) и прошедших ($j = 1, 2$) через дополнительные мас-



Стержень с двумя подстроечными элементами.

сы волн; B_j – амплитуды волн, отраженных от нагрузки ($j = 1$) и подстроечных элементов ($j = 2, 3$); ω, k – частота и волновое число, удовлетворяющие дисперсионному уравнению $\omega^2 = c^2k^2$.

Подставляя решение (7) в соотношения (3) - (6), получаем систему алгебраических уравнений, в которых неизвестными являются амплитуды прошедших и отраженных волн:

$$AX = b,$$

$$X = (A_1, B_1, A_2, B_2, B_3)^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

$$b = (0, 0, (-1 + im_2), 0, 1)^{\mathrm{T}},$$

$$A = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ -e_1 & e_{-1} & 1 - iM_1 & -1 - iM_1 & 0 \\ 0 & 0 & -e_2 & e_{-2} & -1 - iM_2 \\ e_1 & e_{-1} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & e_{-2} & -1 \end{bmatrix},$$

$$e_{\pm 1} = e^{\pm ikl}, \quad e_{\pm 2} = e^{\pm ikL}, \quad M_{1,2} = m_{1,2}\omega^2/kEF,$$

$$Z_1 = m\omega^2 - \kappa + i(kEF - \alpha\omega),$$

$$Z_2 = m\omega^2 - \kappa - i(kEF + \alpha\omega).$$

Определим условия согласования, при которых при заданной амплитуде A_3 отраженная волна на участке стержня $x > l + L$ отсутствует, т.е. $B_3 = 0$.

Решение системы уравнений (8) представим в виде

$$B_3 = A_3\Delta_{B_3}/\Delta,$$

где

$$\Delta_{B_3} = \Delta_1 (Z_1e_{-1} + Z_2e_1) + \Delta_2 (Z_1e_{-1} - Z_2e_1),$$

$$\Delta = \det A, \quad \Delta_1 = 2e_{-2} - iM_2(e_{-2} - e_2),$$

$$\Delta_2 = 2e_{-2}(1 - iM_1) - iM_2(e_{-2} + e_2) - M_1M_2(e_{-2} - e_2).$$

Заметим, что Δ_{B_3} и Δ одновременно не обращаются в ноль ни при каких параметрах системы.

Условия отсутствия отраженной волны в системе ($B_3 = 0$) выполняются, если $\Delta_{B_3} = 0$, т.е. параметры m, κ, α, ω, $M_{1,2}$, l, L удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} (1 - M_2\mathrm{tg}\,kL)\,(M + \mathrm{tg}\,kl) - \beta\mathrm{tg}\,kL - \\ - \beta\mathrm{tg}\,kl\,(1 - M_1\mathrm{tg}\,kL) + (M\mathrm{tg}\,kl - 1) \times \\ \times [\,(M_1M_2 - 1)\,\mathrm{tg}\,kL - M_1 - M_2] = 0, \\ \beta\,(M_2\mathrm{tg}\,kL - 1) - \mathrm{tg}\,kL\,(M + \mathrm{tg}\,kl) + \\ + (1 - M_1\mathrm{tg}\,kL)\,(1 - M\mathrm{tg}\,kl) - \beta\mathrm{tg}\,kl \times \\ \times [\,(M_1M_2 - 1)\,\mathrm{tg}\,kL - M_1 - M_2] = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

где $\beta = \alpha\omega/EFk$, $M = (m\omega^2 - \kappa)/EFk$.

Исключая в (9) L, находим уравнение для определения величины l, характеризующей положение первой массы на стержне:

$$p_1\beta^2 - p_2\beta + p_3 = 0, \tag{10}$$

где

$$p_1 = (M_1\mathrm{tg}\,kl - 1)^2 + \mathrm{tg}^2kl,$$

$$p_2 = (2 + M_2^2)\,(1 + \mathrm{tg}^2kl),$$

$$p_3 = (M_1M\mathrm{tg}\,kl - M_1 - M)^2 + \mathrm{tg}^2kl \times$$

$$\times (1 - 2M_1M + M^2) + 2M_1\mathrm{tg}\,kl + 1.$$

Это соотношение записано в виде квадратного уравнения относительно β. По физическому смыслу $\beta = \alpha c/EF$ – величина, пропорциональная коэффициенту вязких потерь, должна быть положительна ($\beta > 0$).

Условия существования положительных значений β выполняются, если дискриминант уравнения (10) $D_l = p_2^2 - 4p_1p_3$ и коэффициенты $p_{1,2,3}$ положительны.

Заметим, что $p_{1,2} > 0$ при любых параметрах системы, а дискриминант D_l можно записать в виде полинома по степеням $\xi = \mathrm{tg}\,kl$,

$$D_l = a_4\xi^4 + a_3\xi^3 + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0,$$

где

$$a_4 = 4M_2^2 + M_2^4 + 8M_1M - 8M_1^2M^2 -$$

$$- 4M^2 - 4M_1^2 + 8M_1^3M - 4M_1^4M^2.$$

Как известно, полином принимает положительные значения ($D_l > 0$) при $\xi \longrightarrow \infty$, если коэффициент, стоящий при переменной в наивысшей степени, больше нуля ($a_4 > 0$). Переменная $\xi = \mathrm{tg}\,kl \longrightarrow \infty$, когда расстояние l, определяющее положение первой массы m_1, близко к четверти длины волны ($l \longrightarrow \lambda/4$). Выполнение условий $p_3 > 0$, $a_4 > 0$ всегда может быть достигнуто подбором величин масс $m_{1,2}$. В частности, при $m_1 = m_2$, $m\omega^2 - \kappa = 0$ условия $p_3 > 0$, $a_4 > 0$ выполняются при любых значениях параметров подстроечных элементов и нагрузки.

Исключая теперь l в уравнениях (9), вновь получаем квадратное уравнение, связывающее величину L и другие параметры системы:

$$q_1\beta^2 - q_2\beta + q_3 = 0, \qquad (11)$$

где

$$q_1 = 1 + \mathrm{tg}^2 kL,$$
$$q_2 = (M_1M_2\mathrm{tg}kL - M_1 - M_2)^2 + \\ + \mathrm{tg}^2 kL[2 + (M_1 - M_2)^2] + 2,$$
$$q_3 = (1 + M^2)\mathrm{tg}^2 kL + M^2 + 1.$$

Рассматривая дискриминант уравнения (11) $D_L = q_2^2 - 4q_1q_3$ как полином относительно $\eta = \mathrm{tg}kL$,

$$D_L = b_4\eta^4 + b_3\eta^3 + b_2\eta^2 + b_1\eta + b_0,$$

получаем, что $D_L > 0$, если $b_4 = [2 + M_1^2M_2^2 + (M_1 - M_2)^2]^2 - 4(1 + M^2) > 0$, $\eta = \mathrm{tg}kL \longrightarrow \infty$ (т.е. $L \longrightarrow \lambda/4$).

Так же как в случае, рассмотренном выше, положительное решение уравнения (11) всегда существует при $L \longrightarrow \lambda/4$, если $M = 0$, а параметры $m_{1,2}$ – любые.

Таким образом, из анализа уравнений следует, что:

– согласование потока вибраций в стержне всегда может быть осуществлено с помощью двух подстроечных элементов в виде масс, перемещающихся вдоль стержня;

– единственным необходимым условием согласования является наличие диссипации концевого закрепления стержня;

– пространство для оперативной подстройки должно быть порядка половины длины волны. Перед началом подстройки массы целесообразно расположить на расстоянии, близком к четверти длины волны друг от друга и от закрепления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мейнке Х., Гундлах Ф.* Радиотехнический справочник. М.: Госэнергоиздат, 1960. Т. 1. 416 с.
2. *Vesnitsky A.I., Miloserdova I.V.* A Distributed Resonant Damper of Torsional Vibrations of a Shaft // Machine Vibration. 1992. № 1. P. 201 - 202.

Damping of Longitudinal Oscillations in Rods by Tuning Elements

A. I. Vesnitsky and I. V. Miloserdova

Based on a new wave representation of dynamic processes in a rod, we demonstrate that for any parameters of a rod's end fixture, an optimal damping of longitudinal oscillations can be achieved by completely matching the flow of vibrations with the aid of tuning masses moved along the rod.