АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 4, с. 588 - 593

УДК 534.284:519.8

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, СВЯЗАННОЙ С СИНТЕЗОМ АКУСТИЧЕСКИХ СРЕД

© 1994 г. Е. Л. Гусев
Якутский научный центр СО РАН
677891 Якутск, ул. Петровского, 2

Поступила в редакцию 10.04.89 г.
После окончательной доработки 05.01.94 г.

Для задачи оптимального управления, к которой приводят различные постановки задач синтеза акустических сред, показано отсутствие скользящих режимов.

Рассмотрим нормальное падение немонохроматической акустической волны на неоднородный слой толщины l, заключенный между двумя непоглощающими однородными и изотропными полупространствами с плотностями $\rho_н$, $\rho_в$ и скоростями распространения звука в них, равными соответственно $c_н$ и $c_в$. Ось z направлена внутрь слоя перпендикулярно к нему. Начало координат совпадает с наружной поверхностью слоя. Слой будем считать непоглощающим. Распространение плоской акустической волны в неоднородном слое может быть описано следующей краевой задачей:

$$\begin{aligned} \dot{f}(z) &= \rho(z)g(z), \\ \dot{g}(z) &= -\omega^2\mu(z)f(z), \quad 0 \le z \le l, \\ g(0) &= iK_н(\omega)(2 - f(0))/\rho_н, \\ g(l) &= iK_в(\omega)f(l)/\rho_в. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ω – частота, i – мнимая единица, $f(z)$ – комплексная амплитуда акустической волны, $\rho(z)$ – функция, описывающая распределение плотности внутри неоднородного слоя, $\mu(z) = 1/\rho(z)c^2(z)$, $c(z)$ – распределение скорости акустической волны в слое, $K_н(\omega) = \omega/c_н$, $K_в(\omega) = \omega/c_в$. Краевая задача может быть получена из уравнений акустики с использованием метода разделения переменных [1]. Граничные условия отражают факт равенства единице амплитуды падающей волны и отсутствия отраженной волны в последнем полупространстве. Физические параметры неоднородного слоя будем считать связанными между собой некоторой функциональной зависимостью $c = c(\rho)$. Здесь $c(\rho)$ – непрерывная функция, позволяющая однозначно восстановить скорость звука в материале по его плотности. Пусть допустимый набор плотностей материалов есть некоторый сегмент $\Lambda = \{\rho;\ \rho_{min} \le \rho \le \rho_{max}\}$. Для каждого $z \in [0, l]$ выполнено включение

$$\rho(z) \in \Lambda. \tag{2}$$

Задача синтеза заключается в таком выборе распределения плотности $\rho(z)$ по толщине неоднородного слоя, при котором достигает наименьшего значения функционал

$$I = \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \tau(\omega)\,\mathrm{mod}^2(f(l,\omega))\,d\omega \tag{3}$$

на решениях системы (1). Здесь ω_{min}, ω_{max} – нижняя и верхняя границы фильтруемого диапазона частот, $\tau(\omega)$ – весовая функция $(-1 \le \tau(\omega) \le 1)$. В постановку задачи синтеза (1) - (3) укладываются: задачи синтеза акустических систем с наибольшим отражением в заданной области спектра, задачи синтеза с наибольшим "просветлением" в заданной области спектра, задачи синтеза с наибольшим "просветлением" в одной области спектра и наибольшим отражением в другой. Задачи оптимального управления с параметром рассматривались, например, в [2, 3]. Формулировка принципа максимума для них не вызывает затруднений.

В случае, когда физические свойства неоднородной среды характеризуются одним параметром (например, только плотностью или скоростью звука), либо независимы друг от друга [4] - [6], то в соответствующей задаче оптимального управления множество скоростей системы выпукло. Поэтому оптимальное управление находится среди решений уравнения принципа максимума, т.е. скользящие режимы отсутствуют. Для рассматриваемой же задачи оптимального управления (1) - (3) множество скоростей системы (1) является невыпуклым множеством, благодаря чему оптимальное управление может не существовать в классе измеримых функций, т.е. возможно появление скользящих режимов. Выпишем для задачи оптимального управления (1) - (3) необходимые условия оптимальности. Сопряженная краевая задача будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\dot{\psi}(z) = \omega^2\mu(z)p(z),\\ \dot{p}(z) = -\rho(z)\psi(z), \quad 0 \le z \le l,\\ \psi(0) - iK_{\text{н}}(\omega)p(0)/\rho_{\text{н}} = 0,\\ \psi(l) + iK_{\text{в}}(\omega)p(l)/\rho_{\text{в}} = -2\tau(\omega)f(l).\end{gathered} \tag{4}$$

Функция Гамильтона запишется в виде:

$$H = \mu(\rho)A(z) + \rho B(z), \quad 0 \le z \le l. \tag{5}$$

В этих обозначениях

$$A(z) = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \alpha(z, \omega)d\omega, \quad B(z) = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \beta(z, \omega)d\omega,$$

$$\alpha(z, \omega) = -\frac{1}{\mu(z)}\operatorname{Re}\psi(z, \omega)f(z, \omega), \tag{6}$$

$$\beta(z, \omega) = \frac{1}{\rho(z)}\operatorname{Re} f(z, \omega)\,\psi(z, \omega), \quad 0 \le z \le l.$$

Принцип максимума в теории оптимальных процессов дает необходимые условия, которым удовлетворяют оптимальные управления и траектории. Однако эти условия могут быть использованы для поиска оптимального управления, а также для качественного исследования его структуры только в том случае, если оно существует в классе допустимых. Наиболее общие теоремы существования доказываются, как правило, для класса измеримых управлений. Введем класс Σ, элементами которого являются ограниченные измеримые функции, которые для почти всех $z \in [0, l]$, удовлетворяют включению (2). В случае, когда оптимальное управление в классе Σ существует, необходимые условия оптимальности могут быть сформулированы следующим образом. Пусть $\rho^*(z)$ – оптимальное управление, причем $\rho^*(\cdot) \in \Sigma$; $f^*(z)$, $\psi^*(z)$ – соответствующие ему решения исходной (1) и сопряженной (4) систем. Тогда на оптимальном управлении почти всюду на отрезке $[0, l]$ выполнено условие

$$\begin{gathered}H(f^*(z), \dot{f}^*(z), \psi^*(z), \dot{\psi}^*(z); \rho^*(z)) =\\ = \sup_{\rho \in \Lambda} H(f^*(z), \dot{f}^*(z), \psi^*(z), \dot{\psi}^*(z); \rho), \quad 0 \le z \le l.\end{gathered} \tag{7}$$

Для задачи (1) - (3) рассмотрим вопрос о существовании оптимального управления в классе измеримых функций Σ. Для случая гармонического воздействия вопрос о существовании оптимального управления исследовался в работах [7, 8]. На основе перехода к так называемым микрослоистым средам в этих работах было показано существование оптимального управления в классе измеримых функций. Вопрос о существовании оптимального управления для случая негармонического воздействия имеет ряд принципиальных сложностей по сравнению со случаем гармонического воздействия. Поэтому решение этого вопроса для случая негармонического воздействия не следует непосредственно из результатов отмеченных работ. В настоящей работе для исследования вопроса существования оптимального управления в задаче синтеза (1) - (3) с невыпуклым множеством скоростей используется подход, связанный с переходом к так называемой "ослабленной" системе, в которой множество скоростей уже выпукло [9]. Краевую задачу (1) запишем в вещественной форме:

$$\begin{gathered}\dot{c}(z) = \rho(z)d(z),\\ \dot{d}(z) = -\omega^2\mu\,[\rho(z)]\,c(z), \quad 0 \le z \le l,\\ d(0) = K_{\text{н}}(\omega)\,(A + Bc(0))\,/\,\rho_{\text{н}},\\ d(l) = K_{\text{в}}(\omega)Ec(l)/\rho_{\text{в}}.\end{gathered} \tag{8}$$

В этих обозначениях $c(z) = (\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z))$, $d(z) = (\operatorname{Re} g(z), \operatorname{Im} g(z))$.

$$A = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}.$$

Для краевой задачи (8) сопряженная система запишется в форме

$$\begin{gathered}\dot{\psi}(z) = \omega^2\mu\,[\rho(z)]\,p(z),\\ \dot{p}(z) = -\rho(z)\psi(z), \quad 0 \le z \le l,\\ \psi(0) + K_{\text{н}}(\omega)Bp(0)/\rho_{\text{н}} = 0,\\ \psi(l) + K_{\text{в}}(\omega)Ep(l)/\rho_{\text{в}} = -2\tau(\omega)c(l).\end{gathered} \tag{9}$$

Функция Гамильтона для краевой задачи (8) примет вид

$$H(c(z), d(z), \psi(z), p(z); \rho) = \rho F(z) + \mu(\rho)G(z). \tag{10}$$

Здесь

$$F(z) = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \langle\psi, d\rangle d\omega, \quad G(z) = -\int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \omega^2\langle p, c\rangle d\omega, \tag{11}$$

$\langle\psi, d\rangle$, $\langle p, c\rangle$ – скалярные произведения. В общем случае для системы (8) множество правых частей невыпукло. Перейдем от системы (8) к системе с выпуклым множеством скоростей:

$$\begin{gathered}\dot{c}(z) = d(z)\sum_{i=0}^{4}\alpha_i(z)\rho_i(z),\\ \dot{d}(z) = -\omega^2 c(z)\sum_{i=0}^{4}\alpha_i(z)\mu\,[\rho_i(z)], \quad 0 \le z \le l,\\ \rho_i(z) \in \Lambda,\\ d(0) = K_{\text{н}}(\omega)\,(A + Bc(0))\,/\,\rho_{\text{н}},\\ d(l) = K_{\text{в}}(\omega)Ec(l)/\rho_{\text{в}},\\ \alpha_i(z) \ge 0, \quad \sum_{i=0}^{4}\alpha_i(z) = 1.\end{gathered} \tag{12}$$

Для "ослабленной" краевой задачи (12) сопряженная система запишется в форме:

$$\dot{\psi}(z) = \omega^2 p(z) \sum_{i=0}^{4} \alpha_i(z) \mu[\rho_i(z)],$$

$$\dot{p}(z) = -\psi(z) \sum_{i=0}^{4} \alpha_i(z) \rho_i(z), \quad 0 \le z \le l, \tag{13}$$

$$\psi(0) + K_н(\omega) B p(0)/\rho_н = 0,$$

$$\psi(l) + K_в(\omega) E p(l)/\rho_в = -2\tau(\omega) c(l).$$

Функция Гамильтона для "ослабленной" задачи запишется в виде:

$$\tilde{H}(c, d, \psi, \rho, \alpha, V) = F(z) \sum_{i=0}^{4} \alpha_i(z) \rho_i(z) + G(z) \sum_{i=0}^{4} \alpha_i(z) \mu[\rho_i(z)]. \tag{14}$$

Роль управления для системы дифференциальных уравнений (12) играет для каждого $z \in [0, l]$ вектор

$$(\alpha, V) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_4; \rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_4) \in S^5 \times \Lambda^5,$$

где точка $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ принадлежит пятимерному симплексу $S^5 = \{\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_4): \sum_{i=0}^{4} \alpha_i = 1, \alpha_i \ge 0, i = \overline{0, 4}\}$, а точка $V = (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_4)$ принадлежит пятой топологической степени Λ^5 множества Λ. Таким образом, управлением для краевой задачи (12) является всякая измеримая функция со значениями в $S^5 \times \Lambda^5$. Очевидно, что множество скоростей системы (12) является выпуклым множеством. Поэтому для данной системы минимальное значение функционала качества достигается на измеримом управлении. Следовательно, для системы (12) оптимальное управление существует и находится среди решений, удовлетворяющих принципу максимума

$$\tilde{H}(c^*(z), d^*(z), \psi^*(z), p^*(z), \alpha^*(z), V^*(z)) = \sup_{(\alpha, V) \in S^5 \times \Lambda^5} \tilde{H}(c^*(z), d^*(z), \psi^*(z), p^*(z), \alpha, V). \tag{15}$$

Из условия (15) с учетом того, что управления $\rho_i^*(z)$ независимы, а $\alpha_i^*(z) \ge 0$, заключаем, что все управления $\rho_i^*(z)$ $(i = \overline{0, 4})$ удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$H(c^*(z), d^*(z), \psi^*(z), p^*(z); \rho_i^*(z)) = \sup_{\rho \in \Lambda} H(c^*(z), d^*(z), \psi^*(z), p^*(z); \rho), \quad 0 \le z \le l. \tag{16}$$

Возможны два случая:

1) Уравнение (16) имеет единственное решение $\rho^*(z)$. В этом случае функции $c^*(z)$, $d^*(z)$ являются решением краевой задачи (8), которое соответствует измеримому управлению $\rho^*(z)$. Поэтому для данного случая оптимальное решение существует в классе измеримых управлений.

2) На некотором отрезке $\theta \subset [0, l]$ ненулевой меры ($\mathrm{mes}\,\theta \ne 0$) уравнение (16) имеет неединственное решение. В этом случае оптимальное решение отсутствует в классе измеримых функций и реализуется на скользящем режиме.

Таким образом, для доказательства существования оптимального управления в классе измеримых функций достаточно показать, что уравнение (16) для почти всех $z \in [0, l]$ имеет единственное решение, т.е. реализуется только первая из описанных выше ситуаций. Из результатов работы [9] следует, что оптимальные скользящие режимы исходной задачи (1) - (3) находятся среди особых решений уравнения принципа максимума "ослабленной" задачи. Поэтому для доказательства отсутствия для исходной задачи оптимального управления (1) - (3) скользящих режимов достаточно показать, что для "ослабленной" задачи оптимального управления с системой (12) необходимые условия оптимальности (15) являются невырожденными, т.е. оптимальное управление из условия максимума функции $\tilde{H}$ (15) определяется однозначно для почти всех $z \in [0, l]$. Однако, поскольку решения исходной и сопряженной систем (12), (13) на управлении, удовлетворяющем принципу максимума (15), нам не известны, то мы будем решать несколько более общую задачу. Покажем, что при любых решениях исходной и сопряженной систем "ослабленной" задачи, соответствующих измеримым управлениям, управление из условия максимума (16) для почти всех $z \in [0, l]$ находится единственным образом.

Введем новые управляющие функции

$$\sigma(z) = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i(z) \rho_i(z), \quad \tau(z) = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i(z) \mu[\rho_i(z)].$$

Тогда "ослабленная" краевая задача (12) в комплексной форме запишется следующим образом:

$$\dot{f}(z) = \sigma(z) g(z), \quad \dot{g}(z) = -\omega^2 \tau(z) f(z), \quad 0 \le z \le l,$$

$$g(0) = i K_н(\omega) (2 - f(0)) / \rho_н, \tag{17}$$

$$g(l) = i K_н(\omega) f(l) / \rho_в.$$

Краевая задача (17) полностью идентична краевой задаче (1). Так как множество Λ выпукло и $\rho_i(z) \in \Lambda$, то и $\sigma(z) \in \Lambda$, $\tau(z) \in \mathrm{conf}\,\mu(\Lambda)$, где $\mu(\Lambda) =$

$= \{\mu(\rho),\ \rho \in \Lambda\}$. Для краевой задачи (17) сопряженная система запишется в форме

$$\dot\psi(z) = \omega^2\tau(z)p(z), \quad \dot p(z) = -\sigma(z)\psi(z), \quad 0 \le z \le l,$$
$$\psi(0) - iK_{н}(\omega)p(0)/\rho_{н} = 0, \tag{18}$$
$$\psi(l) + iK_{в}(\omega)p(l)/\rho_{в} = -2\tau(\omega)\overline{f(l)}.$$

Обозначим

$$L(z) = -\frac{1}{\tau(z)}\int\limits_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \mathrm{Re}\,[\dot\psi(z,\omega)f(z,\omega)]\,d\omega,$$
$$\tag{19}$$
$$M(z) = \frac{1}{\sigma(z)}\int\limits_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \mathrm{Re}\,[\dot f(z,\omega)\,\psi(z,\omega)]\,d\omega, \quad 0 \le z \le l,$$

$$H(f(z), \dot f(z), \psi(z), \dot\psi(z); \rho) = \mu(\rho)L(z) + \rho M(z), \quad 0 \le z \le l. \tag{20}$$

Необходимо показать, что управление $\rho^*(z)$ из условия максимума функции H (20) определяется однозначно при почти всех $z \in [0, l]$ для произвольных непрерывных функций $L(z)$ и $M(z)$ (19), определяемых функциями $f(z)$ (17) и $\psi(z)$ (18), соответствующими всевозможным измеримым управлениям $\sigma(z)$ и $\tau(z)$, таким, что $\sigma(z) \in \Lambda$, а $\tau(z) \in \mathrm{conf}\,\mu(\Lambda)$. Предположим противное. Пусть на некотором отрезке $\theta \subset [0, l]$ ненулевой меры ($\mathrm{mes}\,\theta \ne 0$) управление из условия максимума функции H (20) определяется неоднозначно. Тогда возможны две ситуации.

1) На множестве θ функции $L(z)$ и $M(z)$ тождественно в нуль не обращаются, однако найдутся измеримые функции $\rho_1(z)$ и $\rho_2(z)$, такие, что $\rho_1(z) \ne \rho_2(z)$ для всех $z \in \theta$, но для всех $z \in \theta$ выполнено условие

$$\mu[\rho_1(z)]L(z) + \rho_1(z)M(z) = \mu[\rho_2(z)]L(z) + \rho_2(z)M(z) = \sup_{\rho \in \Lambda}\{\mu[\rho]L(z) + \rho M(z)\}. \tag{21}$$

2) Для всех $z \in \theta$: $L(z) \equiv M(z) \equiv 0$.

Несложный анализ, в значительной мере использующий структуру функции H (20), показывает, что выполнение условия (21) возможно только на множестве точек θ меры нуль. Поэтому более подробно рассмотрим второй случай. Нетрудно убедиться в том, что функции $L(z)$ и $M(z)$ (19) связаны друг с другом соотношением [1]:

$$\sigma(z)M(z) = -\tau(z)L(z) + R, \quad 0 \le z \le l.$$

Здесь R – константа, не зависящая от z. Если хотя бы в одной точке $\bar z \in [0, l]$: $L(\bar z) = M(\bar z) = 0$, то $R = 0$. Поэтому, если по условию $L(z) = M(z) = 0$ для всех $z \in \theta$, то на всем отрезке $[0, l]$ функции $L(z)$ и $M(z)$ связаны соотношением: $\sigma(z)M(z) = -\tau(z)L(z)$, $0 \le z \le l$. Поэтому достаточно показать, что хотя бы одна из функций $L(z)$ или $M(z)$ не обращается тождественно в нуль на отрезке ненулевой меры. Предположим, что

$$L(z) \equiv 0, \quad z \in \theta. \tag{22}$$

Пусть соотношение (22) реализуется при некоторых измеримых функциях $\tau(z)$ и $\sigma(z)$. Аппроксимируем функции $\tau(z)$ и $\sigma(z)$ по мере кусочно-постоянными функциями. Через $\tau_N(z)$, $\sigma_N(z)$ будем обозначать кусочно-постоянные функции, имеющие N точек разрыва. На основе теоремы М. Фреше [10] можно построить такие последовательности кусочно-постоянных функций $\{\tau_N(z)\}$, $\{\sigma_N(z)\}$, что почти всюду на $[0, l]$ будут выполнены условия: $\tau_N(z) \longrightarrow \tau(z)$, $\sigma_N(z) \longrightarrow \sigma(z)$. Покажем, что на множестве кусочно-постоянных функций $\tau_N(z)$, $\sigma_N(z)$ при любом сколь угодно большом N условие (22) реализоваться не может. Не ограничивая общность рассмотрения, всегда можно считать, что отрезку θ полностью принадлежит некоторый участок (ξ_1, ξ_2) одновременного постоянства функций $\tau_N(z)$ и $\sigma_N(z)$. Для всех $z \in (\xi_1, \xi_2) \subset \theta$, $\tau_N(z) \equiv \tau_0$, $\sigma_N(z) \equiv \sigma_0$, где τ_0, σ_0 – константы. Для $z \in (\xi_1, \xi_2)$

$$\alpha_N(z,\omega) = -\frac{1}{\tau_0}\mathrm{Re}\left[\frac{\partial\psi_N(z,\omega)}{\partial z}f_N(z,\omega)\right].$$

Непосредственным дифференцированием можно убедиться в том, что функция $\alpha_N(z, \omega)$ является решением дифференциального уравнения третьего порядка для $z \in (\xi_1, \xi_2)$:

$$\frac{\partial^3\alpha_N(z,\omega)}{\partial z^3} + 4\omega^2\sigma_0\tau_0\frac{\partial\alpha_N(z,\omega)}{\partial z} = 0, \quad \xi_1 < z < \xi_2. \tag{23}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\alpha_N(z,\omega) = C(\omega)\sin 2\omega\sqrt{\sigma_0\tau_0}\,(z - \xi_1) + D(\omega)\cos 2\omega\sqrt{\sigma_0\tau_0}\,(z - \xi_1) + E(\omega), \quad \xi_1 < z < \xi_2, \tag{24}$$

где $C(\omega)$, $D(\omega)$, $E(\omega)$ – неопределенные вещественные константы, не равные одновременно нулю.

$$L_N(z) = \int\limits_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \alpha_N(z,\omega)\,d\omega. \tag{25}$$

Несложный анализ, использующий общее представление (24) для функции $\alpha_N(z, \omega)$ на отрезке (ξ_1, ξ_2), показывает, что выполнение условия

$$L_N(z) \equiv 0, \quad z \in (\xi_1, \xi_2)$$

должно быть связано только с выполнением на этом отрезке условия

$$\mathrm{Re}\,f_N(z,\omega)\,\mathrm{Re}\,\dot\psi_N(z,\omega) \equiv \mathrm{Im}\,f_N(z,\omega)\,\mathrm{Im}\,\dot\psi_N(z,\omega), \quad \xi_1 < z < \xi_2, \quad \omega_{min} \le \omega \le \omega_{max}. \tag{26}$$

Общее решение волнового уравнения $f_N(z, \omega)$ для системы (17), где роль управляющих функций играют ступенчатые функции $\sigma_N(z)$, $\tau_N(z)$ на отрезке (ξ_1, ξ_2) представимо в виде:

$$f_N(z, \omega) = A_1 \exp(iK_0(z - \xi_1)) + A_2 \exp(-iK_0(z - \xi_1)).$$

Здесь A_1, A_2 – неопределенные комплексные константы, а $K_0 = \omega\sqrt{\sigma_0\tau_0}$. Аналогичный вид имеет и общее решение $\psi_N(z, \omega)$ соответствующей сопряженной системы (18):

$$\psi_N(z, \omega) = B_1 \exp(iK_0(z - \xi_1)) + B_2 \exp(-iK_0(z - \xi_1)).$$

Справедливо представление

$$-\frac{1}{K_0}\operatorname{Re} f_N(z, \omega)\frac{\partial \psi_N(z, \omega)}{\partial z} = Q_1(\omega)\cos^2 K_0(z - \xi_1) + Q_2(\omega)\sin^2 K_0(z - \xi_1) + Q_3(\omega)\sin K_0(z - \xi_1)\cos K_0(z - \xi_1). \qquad (27)$$

В этих обозначениях

$$Q_1(\omega) = \operatorname{Re}(A_1 + A_2)\operatorname{Im}(B_1 - B_2) + \operatorname{Im}(A_1 + A_2)\operatorname{Re}(B_1 - B_2),$$

$$Q_2(\omega) = \operatorname{Im}(A_2 - A_1)\operatorname{Re}(B_1 + B_2) - \operatorname{Re}(A_1 - A_2)\operatorname{Im}(B_1 + B_2),$$

$$Q_3(\omega) = \operatorname{Re}(A_1 + A_2)\operatorname{Re}(B_1 + B_2) + \operatorname{Im}(A_2 - A_1)\operatorname{Im}(B_1 - B_2) - \operatorname{Im}(A_1 + A_2)\operatorname{Im}(B_1 + B_2) + \operatorname{Re}(A_1 - A_2)\operatorname{Re}(B_1 - B_2).$$

Обозначим через (ξ_0, ξ_1) отрезок, соседний слева к отрезку (ξ_1, ξ_2), на котором функции $\tau_N(z)$ и $\sigma_N(z)$ одновременно являются постоянными. Пусть $\tau_N(z) = \tau'_0$, $\sigma_N(z) = \sigma'_0$, $z \in (\xi_0, \xi_1)$. Штрихом будем обозначать соответствующие величины, относящиеся к отрезку (ξ_0, ξ_1). Выразим величины A_1, A_2, B_1, B_2 через соответствующие величины A'_1, A'_2, B'_1, B'_2 с использованием условий сопряжения для функций $f_N(z, \omega)$ и $\psi_N(z, \omega)$ в точке ξ_1. Тогда для величин $Q_1(\omega)$, $Q_2(\omega)$, $Q_3(\omega)$ получим следующие соотношения:

$$Q_1(\omega) = \sqrt{\frac{\sigma_0\tau_0}{\sigma'_0\tau'_0}}\,\{Q'_1(\omega)\cos^2 K'_0\Delta'_0 + Q'_2(\omega)\sin^2 K'_0\Delta'_0 + Q'_3(\omega)\sin K'_0\Delta'_0\cos K'_0\Delta'_0\},$$

$$Q_2(\omega) = \sqrt{\frac{\sigma_0\tau_0}{\sigma'_0\tau'_0}}\,\{Q'_2(\omega)\cos^2 K'_0\Delta'_0 + Q'_1(\omega)\sin^2 K'_0\Delta'_0 - Q'_3(\omega)\sin K'_0\Delta'_0\cos K'_0\Delta'_0\}, \qquad (28)$$

$$Q_3(\omega) = Q'_3(\omega)\cos 2K'_0\Delta'_0 + [Q'_2(\omega) - Q'_1(\omega)] \times \sin 2K'_0\Delta'_0.$$

Здесь $\Delta'_0 = \xi_1 - \xi_0$. Из представления (27) следует, что выполнение условия (26) на некотором отрезке (ξ_1, ξ_2) эквивалентно одновременному выполнению трех условий

$$Q_1(\omega) \equiv 0,\ Q_2(\omega) \equiv 0,\ Q_3(\omega) \equiv 0,\ \omega_{\min} \le \omega \le \omega_{\max}. \qquad (29)$$

А из соотношений (28) следует, что выполнение условий (29) на некотором отрезке (ξ_1, ξ_2) влечет за собой выполнение этих условий на всем отрезке $[0, l]$. Другими словами, обращение в нуль функции $L_N(z)$ на некотором отрезке $\theta \subset [0, l]$ влечет за собой тождественное обращение в нуль функции $L_N(z)$ на всем отрезке $[0, l]$. Обозначим через $[0, \xi] \subset [0, l]$ отрезок, на котором функции $\sigma_N(z)$ и $\tau_N(z)$ одновременно принимают постоянные значения. Соответствующие коэффициенты для функций $f_N(z, \omega)$ и $\psi_N(z, \omega)$ на этом отрезке будем обозначать через A_i^0, B_i^0 $(i = 1, 2)$, $Q_i^0(\omega)$ $(i = \overline{1, 3})$. С учетом краевых условий для систем (17), (18) величины $Q_i^0(\omega)$ $(i = \overline{1, 3})$ представимы в виде:

$$Q_1^0(\omega) = -(\operatorname{Re} V \operatorname{Im} B_2^0 + \operatorname{Im} V \operatorname{Re} B_2^0 + \operatorname{Im} B_2^0),$$

$$Q_2^0(\omega) = \operatorname{Re} V \operatorname{Im} B_2^0 + \operatorname{Im} V \operatorname{Re} B_2^0 - \operatorname{Im} B_2^0,$$

$$Q_3^0(\omega) = 2(\operatorname{Re} V \operatorname{Re} B_2^0 - \operatorname{Im} V \operatorname{Im} B_2^0).$$

Здесь $V = A_2^0$ – коэффициент отражения. Выполнение условий (29) на некотором отрезке (ξ_1, ξ_2) влечет за собой выполнение следующих условий:

$$Q_1^0(\omega) \equiv 0,\ Q_2^0(\omega) \equiv 0,\ Q_3^0(\omega) \equiv 0,\ \omega_{\min} \le \omega \le \omega_{\max}.$$

Данная система условий приводит к следующей системе равенств:

$$\operatorname{Im} V(\omega)\operatorname{Re} B_2^0(\omega) \equiv 0,$$
$$\operatorname{Re} V(\omega)\operatorname{Re} B_2^0(\omega) \equiv 0, \qquad (30)$$
$$\operatorname{Im} B_2^0(\omega) \equiv 0,\quad \omega_{\min} \le \omega \le \omega_{\max}.$$

Кроме того, из граничных условий для сопряженной системы (18) следует, что $B_1^0 = 0$, поэтому на отрезке $(0, \xi)$: $\psi_N(z, \omega) = \exp(-iK_0 z)\operatorname{Re} B_2^0$, $z \le 0$. Из (30) вытекают следующие случаи:

1. Пусть $\operatorname{Re} B_2^0(\omega) \ne 0$, $\omega \in (\omega_1, \omega_2) \subset [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$. Тогда $\operatorname{Re} V(\omega) \equiv \operatorname{Im} V(\omega) \equiv 0$, $\omega \in (\omega_1, \omega_2) \subset [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, что невозможно.

2. Пусть $B_2^0(\omega) \equiv 0$, $\omega \in (\omega', \omega'') \subset [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$. Тогда $\psi_N(z, \omega) \equiv 0$, $z \le 0$. Из последнего условия следует, что $\psi_N(z, \omega) \equiv 0$ на всем отрезке $[0, l]$, что невозможно, так как краевая задача (18) не может иметь тривиальных решений.

Будем неограниченно увеличивать число интервалов постоянства N функций $\tau_N(z)$ и $\sigma_N(z)$. Тогда при неограниченном увеличении N последовательность функций $\{L_N(z)\}$ на отрезке $[0, l]$ будет равномерно сходиться к некоторой предельной функции $L(z)$. Предположим, что на отрезке θ: $L(z) \equiv 0$, $z \in \theta$, $\operatorname{mes}\theta \neq 0$. Тогда по любому сколь угодно малому $\delta > 0$ найдется такое число $N(\delta)$, что, когда число интервалов постоянства функций $\tau(z)$ и $\sigma(z)$ N будет удовлетворять неравенству $N > N(\delta)$, будет выполнено одно из условий:

1) $|V(\omega)| < \delta$, $\omega \in (\omega_1, \omega_2) \subset [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$,

2) $|\psi_N(z, \omega)| < \delta$, $\omega \in (\omega', \omega'') \subset [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$.

Выполнение каждого из этих условий невозможно вследствие произвольности $\delta > 0$. Полученное противоречие позволяет утверждать, что для измеримых функций $\sigma(z)$ и $\tau(z)$ функция $L(z)$ не может обращаться тождественно в нуль на любом отрезке $\theta \subset [0, l]$ с ненулевой мерой.

Таким образом, для задачи оптимального управления (1) - (3) всегда существует оптимальное управление в классе измеримых функций Σ. Оптимальное управление находится среди решений уравнения принципа максимума (7).

Очевидно, что полученный вывод тем более справедлив и для задач синтеза слоистых сред из дискретного набора материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабе Г.Д., Гусев Е.Л.* Математические методы оптимизации интерференционных фильтров. Новосибирск: Наука, 1987. 216 с.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимальных систем. Минск: Наука и техника, 1974. 272 с.
3. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 486 с.
4. *Лурье К.А., Мачеварианu М.М.* Минимизация толщины неоднородного согласующего слоя при заданном отражении монохроматической волны // Прикл. механ. и техн. физика. 1969. № 1. С. 44 - 50.
5. *Мачеварианu М.М., Миронова В.Д.* Оптимальное распределение показателя преломления в неоднородном слое, обеспечивающее заданную звукоизоляцию монохроматической волны // Акуст. журн. 1975. № 4. С. 583 - 590.
6. *Scharnhorst K.P.* Optimal distribution of density and dilatation modulus in inhomogeneous layers // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. V. 66. P. 1526 - 1535.
7. *Каниболотский М.А., Уржумцев Ю.С.* Эквивалентность задач оптимального проектирования конструкций в макро- и микрослоистой постановке // Механика композитных материалов. 1986. № 6. С. 1049 - 1058.
8. *Каниболотский М.А.* Исследование одной задачи оптимального управления в макро- и микрослоистой постановках // В кн.: Модели и методы исследования операций. Новосибирск.: Наука, 1988. С. 102 - 112.
9. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1974. 448 с.
10. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

The Problem of Optimal Control in the Synthesis of Acoustic Media

E. L. Gusev

For the problem of optimal control in different formulations of acoustic media synthesis, it is indicated that the solution contains no sliding modes.