АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 4, с. 623 - 625

УДК 534.642:536.641

ЭЛЕКТРОПРОВОДИМОСТЬ НАГРУЖЕННОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИСКА

© 1994 г. Ю. В. Кочумовцев, В. М. Крячко, Н. П. Тихомиров

Санкт-Петербургский государственный университет

199164 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Поступила в редакцию 16.07.93 г.

После доработки 21.12.93 г.

Рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях пьезоэлектрического диска с электродами на основаниях и с нагрузкой, равномерно распределенной по образующей поверхности. Предложена методика определения компонент импеданса нагрузки по измеренной комплексной электропроводимости пьезодиска.

В развитие метода нахождения механических импедансов с помощью высокодобротных пьезорезонаторов [1] решается задача о связи электропроводимости пьезорезонатора в виде тонкого диска радиуса a и толщины h с механическим импедансом Z нагрузки, равномерно распределенной по образующей поверхности. Считается, что поляризованный по высоте вдоль оси x_3 диск совершает осесимметричные радиальные (по оси x_1) колебания под действием гармонического электрического поля $E_3 = E_{03}\exp(i\omega t)$.

Исходными для решения задачи являются уравнения пьезоэффекта

$$T_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\{e_1 + \mu e_2 - (1+\mu)\, d_{31}E_{03}\}, \quad (1)$$

$$T_2 = \frac{E}{1-\mu^2}\{e_2 + \mu e_1 - (1+\mu)\, d_{31}E_{03}\}, \quad (2)$$

$$D_3 = d_{31}(T_1 + T_2) + \varepsilon_{33}E_{03} \quad (3)$$

и уравнение для радиальных смещений $u(x_1)$ частиц диска

$$\frac{d^2u}{dx_1^2} + \frac{1}{x_1}\frac{du}{dx_1} + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - i\omega\gamma - \frac{1}{x_1^2}\right)u = 0. \quad (4)$$

Уравнения (1) - (4) написаны для комплексных амплитуд соответствующих величин. Здесь T_1, T_2 – радиальная и азимутальная составляющие механического напряжения; $e_1 = du/dx_1$, $e_2 = u/x_1$ – радиальная и азимутальная компоненты деформации; D_3 – осевая составляющая вектора электрической индукции; E, μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона пьезокерамики при $E_{03} = 0$; ε_{33} – диэлектрическая проницаемость свободного диска при $T = 0$; d_{31} – пьезомодуль; $c_0 = \left[\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}\right]^{1/2}$ – скорость продольных волн; ρ – плотность; γ – коэффициент внутренних потерь в материале преобразователя.

Решение уравнения (4), отвечающее требованию ограниченности при $x_1 \ll a$, дается первой функцией Бесселя [2]

$$u = CJ_1(\Gamma x_1), \quad \Gamma = \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - i\omega\gamma\right)^{1/2}, \quad \operatorname{Im}\Gamma < 0. \quad (5)$$

Постоянная C находится из импедансного граничного условия на образующей диска при $x_1 = a$, которое имеет вид

$$2\pi ah\frac{T_1(a)}{v(a)} = -Z, \quad (6)$$

где $v = i\omega u$, Z – полный импеданс нагрузки, которая считается радиальной и равномерно распределенной по образующей диска. Перепишем граничное условие (6) с учетом уравнения пьезоэффекта (1)

$$-\frac{i\omega Z}{2\pi ah}u(a) = \frac{E}{1-\mu^2}\left\{\frac{du}{dx_1} + \mu\frac{u}{x_1} - (1+\mu)\, d_{31}E_{03}\right\}_{x_1=a}. \quad (7)$$

Подставляя (5) в (7), получаем

$$C = \frac{(1+\mu)\, ad_{31}}{\Delta}E_{03},$$

$$\Delta \equiv \Gamma aJ_0(\Gamma a) - (1-\mu)\, J_1(\Gamma a) + \frac{i\omega(1-\mu^2)}{2\pi hE}ZJ_1(\Gamma a). \quad (8)$$

J_0 – нулевая функция Бесселя. Из (5) и (8) следует, что резонансные частоты радиальных колебаний тонкого нагруженного диска находятся из условия минимума модуля величины Δ. В частности, при чисто реактивной механической нагрузке ($Z = iY_0$) и при пренебрежении внутренними поте-

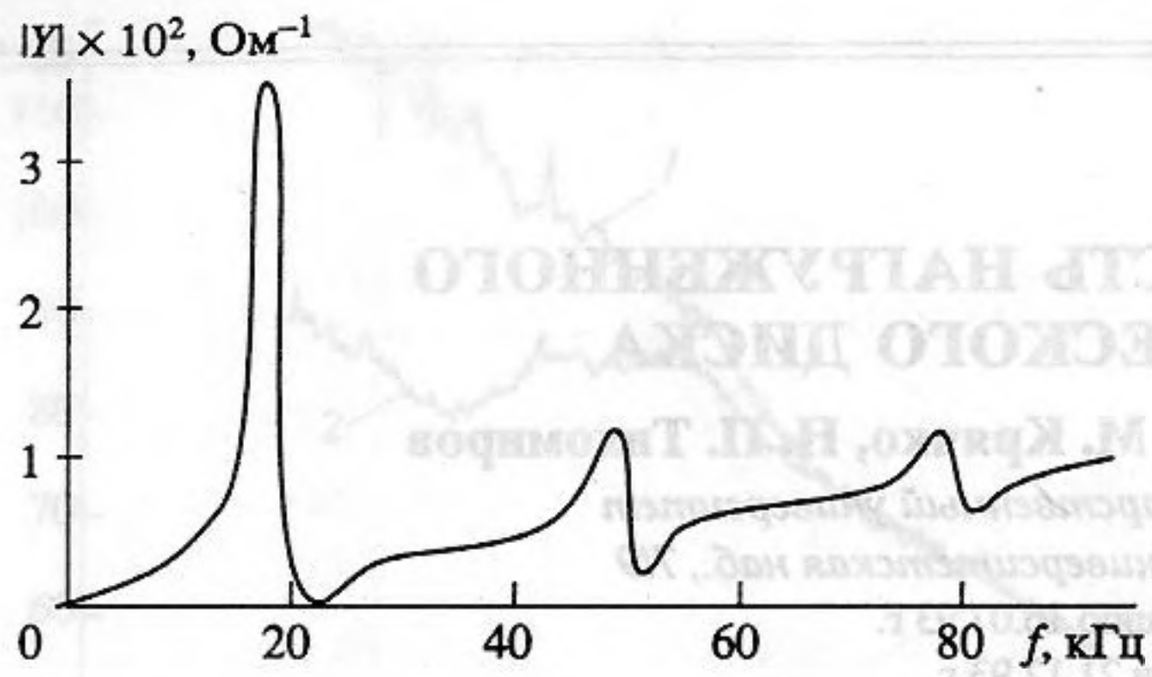

Рис. 1. Частотная зависимость модуля электропроводности ненагруженного ($Z = 0$) дискового пьезорезонатора с учетом внутренних потерь ($\beta = 10^{-2}$).

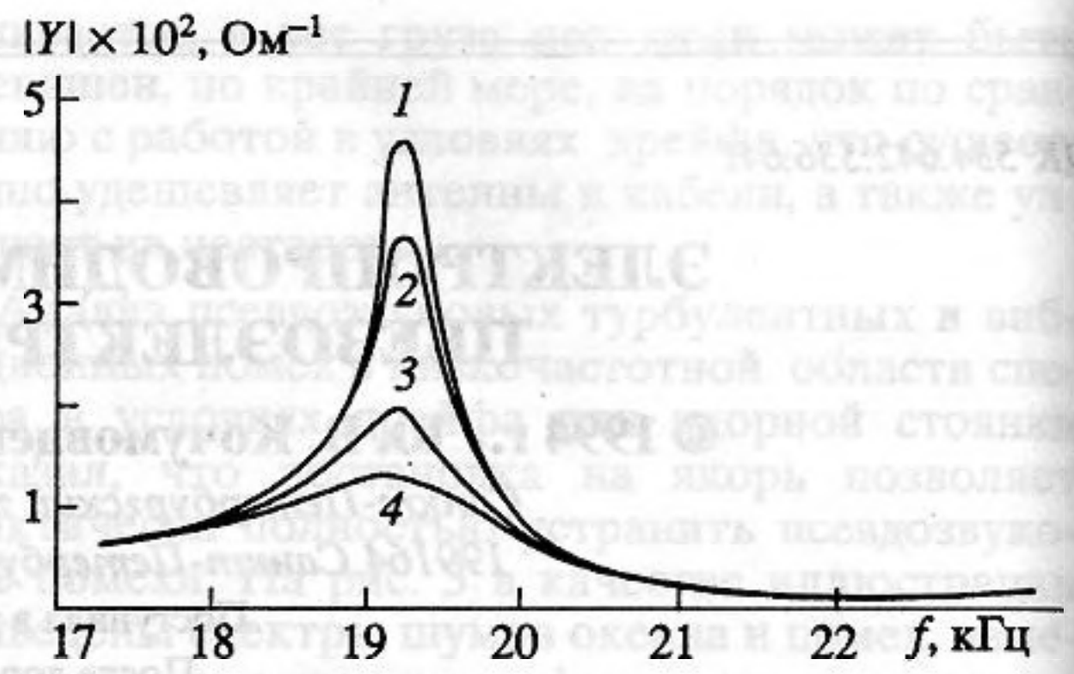

Рис. 2. То же, что на рис. 1, но в окрестности первого резонанса при различных значениях коэффициента потерь: *1* – $\beta = 8 \times 10^{-3}$, *2* – $\beta = 10^{-2}$, *3* – $\beta = 2 \times 10^{-2}$, *4* – $\beta = 3 \times 10^{-2}$.

рями $\left(\gamma = 0,\ \Gamma = \Gamma_0 \equiv \dfrac{\omega}{c_0}\right)$ резонансные частоты являются решениями трансцендентного уравнения

$$\Gamma_0 a J_0(\Gamma_0 a) - (1-\mu) J_1(\Gamma_0 a) - \frac{\omega(1-\mu^2)}{2\pi h E} Y_0 J_1(\Gamma_0 a) = 0, \tag{9}$$

которое при отсутствии нагрузки совпадает с приведенным в [3] для этого случая уравнением. Из (9) следует, что при массовой (инерционной, когда $Y_0 > 0$) нагрузке резонансные частоты уменьшаются, а при упругой ($Y_0 < 0$) увеличиваются по сравнению с резонансными частотами ненагруженного диска.

По известному смещению $u(x_1)$ нетрудно найти электропроводимость Y диска. Для этого достаточно воспользоваться соотношением

$$Y = \frac{i2\pi\omega}{hE_{03}} \int_0^a D_3(x_1) x_1 dx_1 \tag{10}$$

и вытекающей из уравнений пьезоэффекта (1) - (3) формулой

$$D_3 = \frac{d_{31}E}{1-\mu} C\Gamma J_0(\Gamma x_1) + \left(\varepsilon_{33} - 2\frac{d_{31}^2 E}{1-\mu}\right) E_{03}. \tag{11}$$

В результате получаем

$$Y = i\omega \frac{\pi a^2 \varepsilon_{33}}{h}\left[1 - 2\frac{d_{31}^2 E}{\varepsilon_{33}(1-\mu)}\right] + i\frac{2\pi a^2}{h\Delta} d_{31}^2 E \frac{1+\mu}{1-\mu} J_1(\Gamma a). \tag{12}$$

Первое слагаемое в этой формуле отвечает проводимости диска как плоского конденсатора с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \varepsilon_{33} - 2\frac{d_{31}^2 E}{1-\mu},$$

а второе, динамическое слагаемое, учитывает вклад радиальных колебаний в общую электропроводимость дискового пьезопреобразователя. Вблизи резонансных частот динамическая часть проводимости оказывается главной, за счет нее модуль комплексной проводимости достигает максимума на резонансных частотах. Резонансный характер частотной зависимости модуля проводимости, рассчитанной по формуле (12) для конкретного диска из пьезокерамики ЦТБС-3, хорошо виден на рис. 1. Параметры пьезорезонатора выбраны следующими:

$a = 59.5$ мм, $h = 9$ мм, $\rho = 7200$ кг/м^3, $E = 8.15 \times 10^{10}$ Н/м^2, $\mu = 0.296$, $d_{31} = -1.6 \times 10^{-10}$ Кл/Н, $\varepsilon_{33} = 19.5 \times 10^{-9}$ Ф/м.

Внутренние потери при расчетах $Y(\omega)$ учитывались заданием коэффициента потерь $\beta \equiv -\dfrac{\operatorname{Im}\Gamma}{\operatorname{Re}\Gamma}$.

Приведенная на рис. 1 зависимость $|Y(\omega)|$ получена при $\beta = 10^{-2}$. Максимумы модуля проводимости здесь отвечают первым трем резонансным частотам: $f_1 = 19.272$ кГц, $f_2 = 50.570$ кГц, $f_3 = 80.235$ кГц.

На рис. 2 и 3 изображены частотные зависимости модуля $|Y|$ и аргумента φ комплексной электропроводимости ненагруженного диска в окрестности первого резонанса при разных значениях коэффициента потерь. Из результатов расчетов следует, что внутренние потери слабо влияют на резонансную частоту: смещение резонансной частоты при изменении β от 8×10^{-3} до 3×10^{-2} составляет не более 10 Гц. Частоты максимума $|Y|$ и нулевого значения φ не совпадают, причем рас-

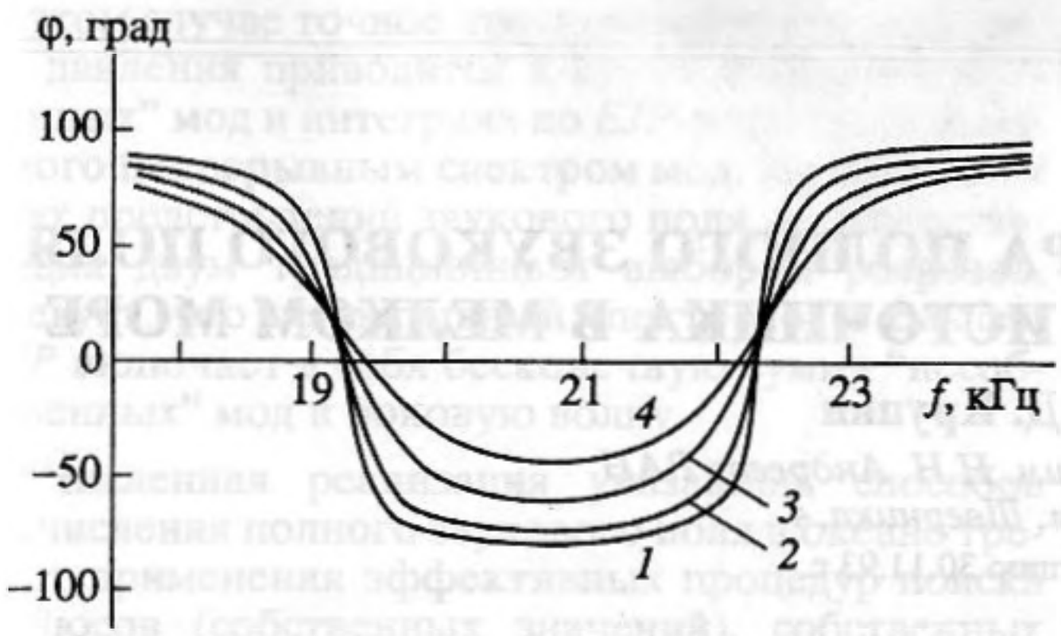

Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для аргумента проводимости.

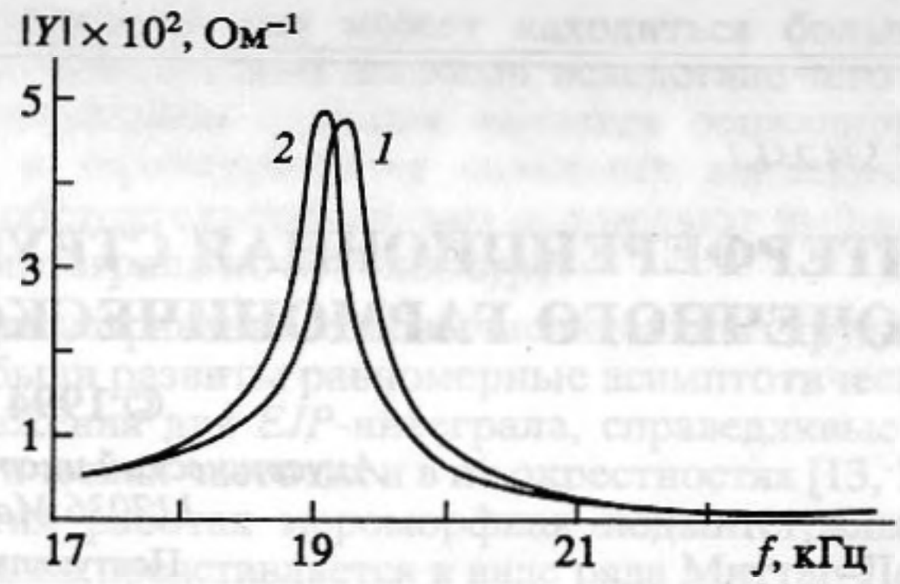

Рис. 4. Частотная зависимость модуля проводимости *1* – свободного ($Z = 0$) и *2* – нагруженного ($Z = i\omega m$, $m = 10^{-2}M$) пьезорезонатора с учетом внутренних потерь ($\beta = 8 \times 10^{-3}$).

хождение увеличивается с ростом внутренних потерь в материале резонатора.

На рис. 4 представлены частотные зависимости |Y| для свободного и нагруженного пьезорезонаторов с учетом внутренних потерь ($\beta = 8 \times 10^{-3}$). Импеданс Z выбран чисто реактивным, отвечающим массовой нагрузке: $Z = i\omega m$. При этом считается, что $m = 10^{-2}M$, где M – масса самого резонатора. Смещение частоты основного резонанса при этой нагрузке составляет ~120 Гц и доступно измерению.

Полученные в работе формулы для амплитуды смещений $u(x_1)$ частиц и для комплексной проводимости $Y(\omega)$ нагруженного дискового пьезопреобразователя являются решениями прямой задачи о возбуждении пьезорезонатора рассмотренного вида. Формулу (12) для $Y(\omega)$ можно использовать и для решения обратной задачи – нахождения импеданса Z нагрузки по измеренной комплексной электропроводимости $Y_э(\omega)$. В случае дискового пьезорезонатора обратная задача решается в два этапа. Сначала ненагруженный резонатор крепится в конструкции по центру, где смещение $u(0) = 0$, и измеряется $Y_э(\omega)$. По $Y_э(\omega)$ с привлечением формулы (12) определяются компоненты (вещественная и мнимая части) постоянной распространения Г. Затем резонатор нагружается на импеданс Z и снова измеряется $Y_э(\omega)$. Поскольку постоянная Г известна из предыдущего опыта, то по вновь измеренной $Y_э(\omega)$ из формулы (12) можно найти неизвестный импеданс нагрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крячко В.М., Тихомиров Н.П.* Измерение механических импедансов нагрузки стержневого пьезорезонатора // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 2. С. 377 - 380.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
3. Ультразвуковые преобразователи / Под ред. Кикучи Е. М.: Мир, 1972.

Electrical Conductivity of a Loaded Piezoelectric Disk

Yu. V. Kochumovtsev, V. M. Kryachko, and N. P. Tikhomirov

Axially symmetric oscillations of a piezoelectric disk with electrodes on its bases and with a load evenly distributed along its generatrix are treated. A technique for determining load impedance components by the measured complex electric conductivity of a piezoelectric disk is proposed.