

УДК 534.26

## СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГОМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ С РАЗРЕЗАМИ

© 1995 г. М. Б. Дьяконов, Ю. А. Устинов

Ростовский государственный университет  
344090 Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1

Поступила в редакцию 11.03.94 г.

Рассматривается задача о распространении и дифракции сдвиговых волн в упругом полуслое с разрезами. В рамках метода нормальных волн предлагается простой прием учета особенностей в вершинах разрезов при сведении задачи к бесконечным системам алгебраических уравнений, позволяющий существенно повысить эффективность метода редукции. При этом расчетная схема такова, что коэффициент интенсивности напряжений определяется уже на этапе решения алгебраической системы как одна из ее неизвестных. Результаты работы могут быть использованы в акустических задачах о дифракции волн на тонких решетках.

1. Исследуются распространение и дифракция сдвиговых волн в полуограниченном упругом слое с разрезами. Область, занимаемая слоем, имеет вид

$Sx(-\infty, \infty)$ ,  $S = [-l, \infty)x[d_1, d_2]$  – полуполоса толщиной  $2h = d_2 - d_1$ .

Упругий слой при  $x = 0$  имеет два внешних разреза  $y \in D_r = D_{r1}UD_{r2}$ , где  $D_{r1} = [d_1, \frac{d_1 + d_2}{2} - a)$ ,

$D_{r2} = (\frac{d_1 + d_2}{2} + a, d_2]$ .

Неразрезанную часть обозначим через  $D_n$ .

В случае стационарных колебаний, пропорциональных  $\exp(-i\omega t)$ , амплитуда смещений удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta u + \Omega^2 u = 0; \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2, \quad \Omega^2 = \omega^2 h^2 / c^2; \quad (1)$$

здесь  $c = (\mu/\rho)^{1/2}$  – скорость звука,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\rho$  – плотность,  $x, y$  – безразмерные координаты, отнесенные к  $h$ .

Считается, что лицевые стороны  $y = d_1, y = d_2$  свободны от напряжений, что эквивалентно выполнению граничных условий

$$\partial_y u = 0 \text{ при } y = d_1, y = d_2. \quad (2)$$

Примем обозначения:  $u = u^{(1)}$  при  $x < 0$ ,  $u = u^{(2)}$  при  $x > 0$ .

Решение при  $x = 0$  должно удовлетворять условиям

$$u^{(1)}(0, y) = u^{(2)}(0, y), \quad \partial_x u^{(1)}(0, y) = \partial_x u^{(2)}(0, y) \quad (3)$$

при  $y \in D_n$ ,

$$\partial_x u^{(1)}(0, y) = 0 = \partial_x u^{(2)}(0, y) \text{ при } y \in D_r. \quad (4)$$

Исследование задач, полная постановка которых дается ниже, будет проводиться в рамках метода нормальных волн (метода однородных решений) [1].

Каждая нормальная волна является решением уравнения (1), удовлетворяющим граничному условию (2), и может быть представлена в виде

$$u_n = \exp(i\alpha_n x) \varphi_n(y). \quad (5)$$

Здесь  $\alpha_n$  – корень дисперсионного уравнения  $\alpha_n^2 = \Omega^2 - \gamma_n^2$ , где  $\varphi_0 = 1/\sqrt{2}$ ,  $\varphi_n = \cos \gamma_n(y - d_2)$ ,  $\gamma_n = n\pi/2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\varphi_n$  удовлетворяют условию ортонормированности

$$(\varphi_n, \varphi_m)_H = \int_{d_1}^{d_2} \varphi_n \varphi_m dy = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Здесь принято, что  $d_2 - d_1 = 2$ .

Множество нормальных волн  $M$  вида (5) разобьем на два подмножества  $M^+$  и  $M^-$ . Элементы этих подмножеств будем соответственно обозначать  $u^+, u^-$ . В соответствии с дисперсионным уравнением

$$u_n^\pm = \exp(\pm i\alpha_n x) \varphi_n,$$

где  $\alpha_n = \alpha_r = \sqrt{\Omega^2 - \gamma_r^2}$  при  $\Omega > \gamma_r$ ,  $\alpha_n = \alpha_k = i\sqrt{\gamma_k^2 - \Omega^2}$  при  $\Omega < \gamma_k$ .

При таком разбиении элементарные волны  $u_r^+$  переносят энергию в положительном направлении оси  $x$ ,  $u_k^+$  – экспоненциально затухают в этом же направлении. Элементарные волны  $u_n^-$  обладают аналогичными свойствами в противоположном направлении.

В дальнейшем функцию двух переменных  $u(x, y)$  будем рассматривать как вектор-функцию  $u(x)$  со значениями в гильбертовом пространстве  $H = L_2(d_1, d_2)$ .

Для сведения краевых задач к алгебраическим уравнениям ниже будет использоваться гильбертово пространство  $H' = H \oplus H$  пар функций  $X = \{\eta, \psi\}$  и скалярное произведение с индефинитной метрикой

$$[X_1, X_2] = [(\eta_1, \psi_2)_H - (\eta_2, \psi_1)_H]. \quad (7)$$

Если положить  $X_n^\pm = \{\varphi_n, \pm i\alpha_n \varphi_n\}$ , то легко показать, что множество этих пар обладает свойством обобщенной ортогональности, которое можно сформулировать следующим образом [2, 3].

Среди всевозможных скалярных произведений вида  $[X_n^\pm, X_m^\pm]$  отличными от нуля будут только следующие:

$$[X_r^\pm, X_r^\pm] = \pm 2\alpha_r, \quad [X_k^\pm, X_k^\mp] = \pm 2\alpha_k. \quad (8)$$

Вместе с  $u(x)$  введем расширенную вектор-функцию  $w(x) = \{u(x), u'(x)\}$ ,  $u'(x) = \partial_x u$ , а также расширенные элементарные вектор-функции вида  $w_n^\pm(x) = \exp(\pm i\alpha_n x) X_n^\pm$ .

2. Рассмотрим задачу о распространении сдвиговых волн в области  $Sx(-\infty, \infty)$ , при заданных на торце ( $x = -l$ ) напряжениях

$$\partial_x u^{(1)}(-l) = \tau = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \varphi_n. \quad (9)$$

Решение, удовлетворяющее граничному условию (9) в области  $-l \leq x < 0$  отыскивалось в виде

$$u^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n^{(1)} \cos(\alpha_n(x+l)) + (i\alpha_n)^{-1} \tau_n \exp(i\alpha_n(x+l))) \varphi_n,$$

в области  $x > 0$  – в виде

$$u^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ u_n^+. \quad (10)$$

Обозначим через  $f$  значение функции  $u^{(1)}$  при  $x = 0, y \in D_n$ ,

$$f(y) = u^{(1)}(0, y), \quad y \in D_n.$$

Тогда, используя первое условие (3) и условие (4), получаем парные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ \varphi_n = f \quad \text{при } y \in D_n, \quad (11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n C_n^+ \varphi_n = 0 \quad \text{при } y \in D_r. \quad (12)$$

Для сведения парных рядов к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений воспользуемся свойствами индефинитного скалярного произведения в пространстве  $H'$ . Запишем условие на  $w^+(x)$  в следующем виде

$$w^+(0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ X_n^+. \quad (13)$$

Сравнивая (13) с (11) и (12), последние запишем в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ X_n^+ = \begin{cases} X^{(1)} & \text{при } y \in D_n, \\ X^{(2)} & \text{при } y \in D_r, \end{cases} \quad (14)$$

здесь

$$X^{(1)} = \{f, \sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ i\alpha_n \varphi_n\}, \quad X^{(2)} = \{\sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ \varphi_n, 0\}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14) и умножая затем последовательно на  $X_m^+$  с помощью индефинитного скалярного произведения (7) и учитывая (8), после ряда непринципиальных преобразований получаем следующее соотношение:

$$\alpha_m C_m^+ - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_m + \alpha_n) a_{nm} C_n^+ = -\alpha_m \int_{-a}^a f \varphi_m dy. \quad (16)$$

Здесь

$$a_{nm} = \int_{-a}^a \varphi_n \varphi_m dy.$$

Рассмотрим правую часть равенства (16)

$$\int_{-a}^a f \varphi_m dy = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n^{(1)} \cos \alpha_n l + (i\alpha_n)^{-1} \tau_n \exp(i\alpha_n l)) a_{nm}.$$

Из второго условия (3) и условия (4) вытекает непрерывность  $\partial_x u$  во всем сечении  $x = 0$ . Удовлетворяя этому условию и используя ортогональность функций  $\varphi_n$  (6), можно выразить  $C_n^{(1)}$  через

$C_n^+$  с помощью равенств

$$\alpha_n C_n^{(1)} \sin(\alpha_n l) = \tau_n \exp(i\alpha_n l) - i\alpha_n C_n^+.$$

Введем вместо  $C_n^+$  новые неизвестные  $Z_n$ :

$$C_n^+ = (\exp(2i\alpha_n l) - 1) Z_n + (i\alpha_n)^{-1} \exp(-i\alpha_n l) \tau_n.$$

Введенная замена неизвестных позволяет не выделять в отдельное исследование случаи, когда  $\exp(2i\alpha_n l) - 1 = 0$ , которые назовем псевдорезонансами.

Выражая  $C_n^{(1)}$  через  $Z_n$  и используя (16), получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\alpha_m (1 - \exp(2i\alpha_m l)) Z_m - \sum_{n=0}^{\infty} a'_{nm} Z_n = g_m, \quad (17)$$

$$a'_{nm} = (\alpha_m + \alpha_n (1 - \exp(2i\alpha_n l))) a_{nm},$$

$$g_m = -i \exp(-i\alpha_m l) \tau_m +$$

$$+ i\alpha_m \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \alpha_n^{-1} \alpha_m) \exp(-i\alpha_n l) a_{nm} \tau_n.$$

Для повышения эффективности метода редукции при решении системы (17) выделим главную часть  $Z_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , которая определяется особенностями  $\partial_x u^+(0)$  в точках  $y = a, y = -a$ .

Опираясь на (10) и (6), нетрудно получить, что

$$C_n^+ = (i\alpha_n)^{-1} \int_{-a}^a (\partial_x u^{(2)}(0) \varphi_n) dy. \quad (18)$$

Учитывая характер особенности напряженного состояния в вершинах разрезов [4], представим  $\partial_x u^{(2)}(0)$  в виде

$$\partial_x u^{(2)}(0) = \frac{Y_0 + yY_1}{(a^2 - y^2)^{1/2}} + \tau_*, \quad (19)$$

$Y_0, Y_1$  – постоянные, определяемые ниже,

$$\tau_*(\pm a) = 0. \quad (20)$$

Подставляя (19) в (18), получаем

$$C_n^+ = \kappa_n^{(0)} Y_0 + \kappa_n^{(1)} Y_1 + X_n. \quad (21)$$

Здесь

$$\kappa_0^{(0)} = \pi (i\Omega \sqrt{2})^{-1}, \quad \kappa_n^{(0)} = \pi (i\alpha_n)^{-1} J_0(a\pi n/2) \times \\ \times \cos(\pi n d_2/2), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\kappa_n^{(1)} = a\pi (i\alpha_n)^{-1} J_1(a\pi n/2) \sin(\pi n d_2/2), \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Перепишем соотношение (21) для  $Z_n$ , вводя новые неизвестные  $\zeta_n$ :

$$Z_n = -\kappa_n^{(0)} Y_0 - \kappa_n^{(1)} Y_1 + \zeta_n. \quad (22)$$

Тогда дополнительные условия (20) будут иметь вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(a) X_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(-a) X_n = 0, \quad (23)$$

где

$$X_n = (-\kappa_n^{(0)} Y_0 - \kappa_n^{(1)} Y_1) \exp(2i\alpha_n l) + \\ + \zeta_n (\exp(2i\alpha_n l) - 1) + (i\alpha_n)^{-1} \tau_n \exp(-i\alpha_n l).$$

Подставляя в (17) выражение (22) для  $Z_n$ , с учетом дополнительного условия (23) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $Y_0, Y_1$  и  $\zeta_n$ :

$$\left\{ \begin{aligned} & \alpha_m (1 - \exp(2i\alpha_m l)) \zeta_m - \sum_{n=0}^{\infty} a'_{nm} \zeta_n - \\ & - S_m^{(0)} Y_0 - S_m^{(1)} Y_1 = g_m, \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(\pm a) \zeta_n (\exp(2i\alpha_n l) - 1) - Y_0 R^{(0)} - \\ & - Y_1 R^{(1)} = i \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \exp(-i\alpha_n l) \varphi_n(\pm a). \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Здесь

$$S_m^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \kappa_n^{(s)} a_{nm} \exp(2i\alpha_n l) - \\ - b_m^{(s)} - \alpha_m \kappa_m^{(s)} \exp(2i\alpha_m l),$$

$$R^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(\pm a) \kappa_n^{(s)} \exp(2i\alpha_n l), \\ m = 0, 1, \dots, \quad s = 0, 1,$$

где

$$b_l^{(s)} = \alpha_l \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_n^{(s)} a_{nl}, \quad s = 0, 1.$$

Расчеты проводились для случая симметричных разрезов и  $\tau(-l) = 1/\sqrt{2}$  ( $\varphi_0 = 1/\sqrt{2}$ ).

Исследовались зависимости коэффициента усиления  $K_y$ , модуля  $K_n$  и фазы  $\Phi$  коэффициента интенсивности напряжений в зависимости от параметров  $\Omega, a, l$ . Под коэффициентом усиления  $K_y$  понимается отношение потока энергии в области

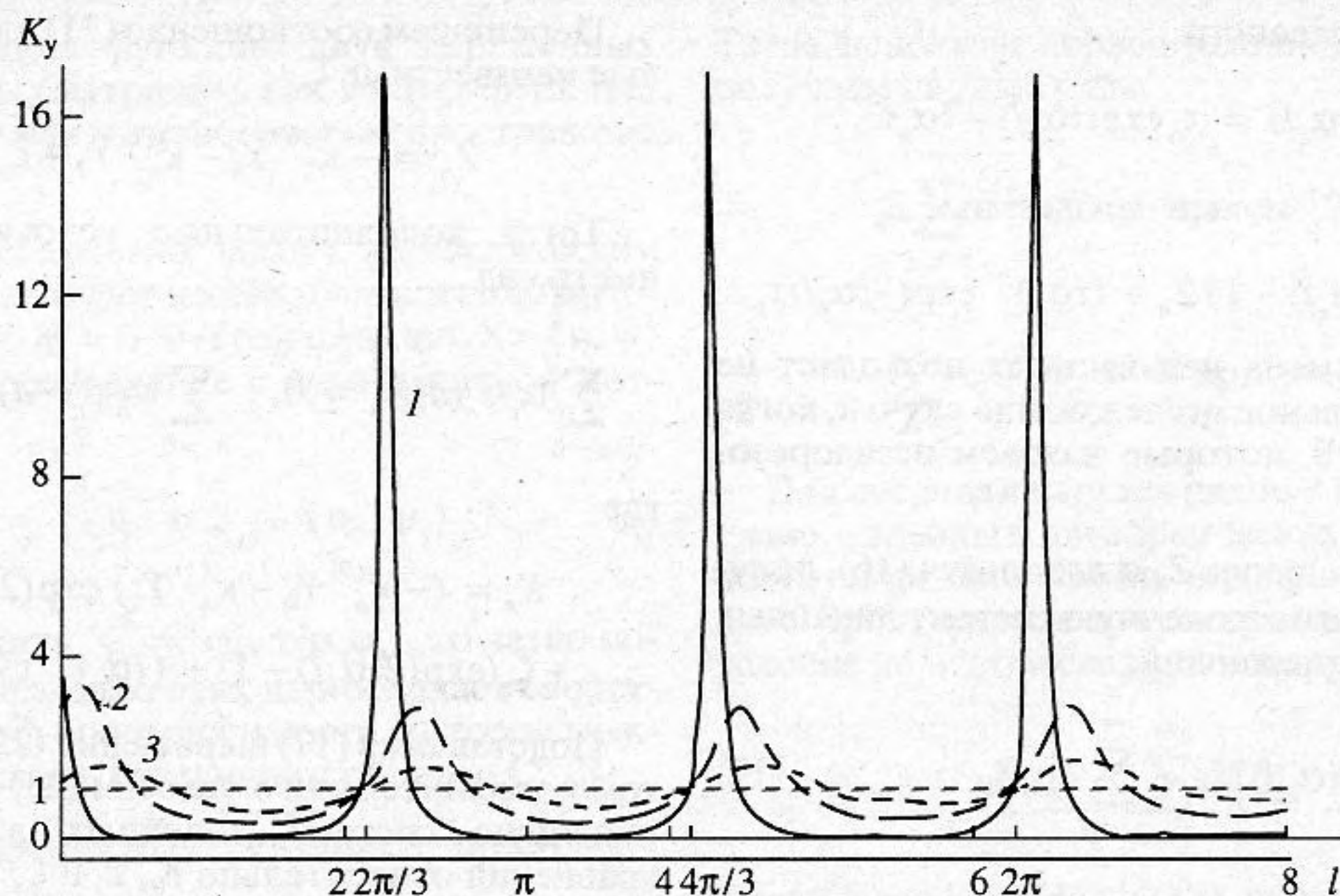


Рис. 1. Зависимость коэффициента энергетического усиления ( $K_y$ ) от  $l$  при  $\Omega = 1.5$  и  $a = 0.1$  (кривая 1),  $a = 0.4$  (кривая 2),  $a = 0.6$  (кривая 3).

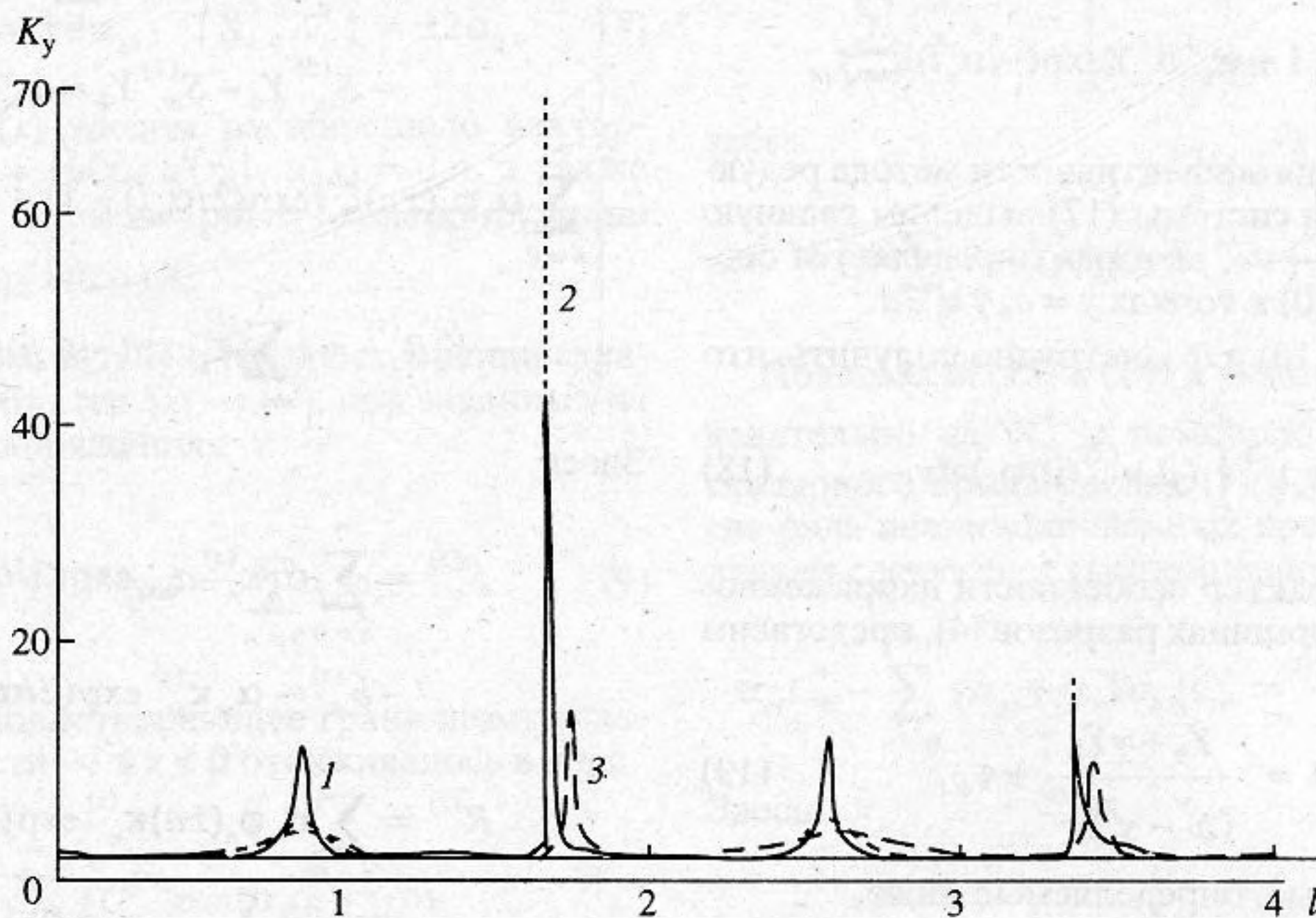


Рис. 2. Зависимость коэффициента энергетического усиления ( $K_y$ ) от  $l$  при  $\Omega = 3.7$  и  $a = 0.1$  (кривая 1),  $a = 0.4$  (кривая 2),  $a = 0.6$  (кривая 3).

$x > 0$  для полуполосы с разрезами к потоку энергии в полуполосе без разрезов, т.е.

$$K_y = \Omega \sum_{m=0}^N \alpha_m |C_m^+|^2.$$

Расчеты проводились в области изменения параметров  $0.1 \leq a \leq 1$ ,  $0 < \Omega < 2\pi$  ( $\Omega \neq \pi$ ). В этой области порядок редукции  $N_p$  от 20 до 40 обеспечи-

вал точность 0.2% по перемещениям на границе  $x = 0$  при  $|y| < a$ .

На рис. 1 и 2 приведены графики зависимостей коэффициента усиления от  $l$ , при фиксированных значениях  $a = 0.1; 0.4; 0.6$  и  $\Omega = 1.5$  (рис. 1),  $\Omega = 3.7$  (рис. 2), на рис. 3 приведены графики зависимостей коэффициента усиления от  $a$ , при фиксированных значениях  $l = 0.8$  (кривая 1),  $l = 1.22$  (кривая 2),  $l = \pi/\Omega$  (кривая 3),  $l = 2.25$  (кривая 4),  $l = 2.35$  (кривая 5) и  $\Omega = 1.5$ .

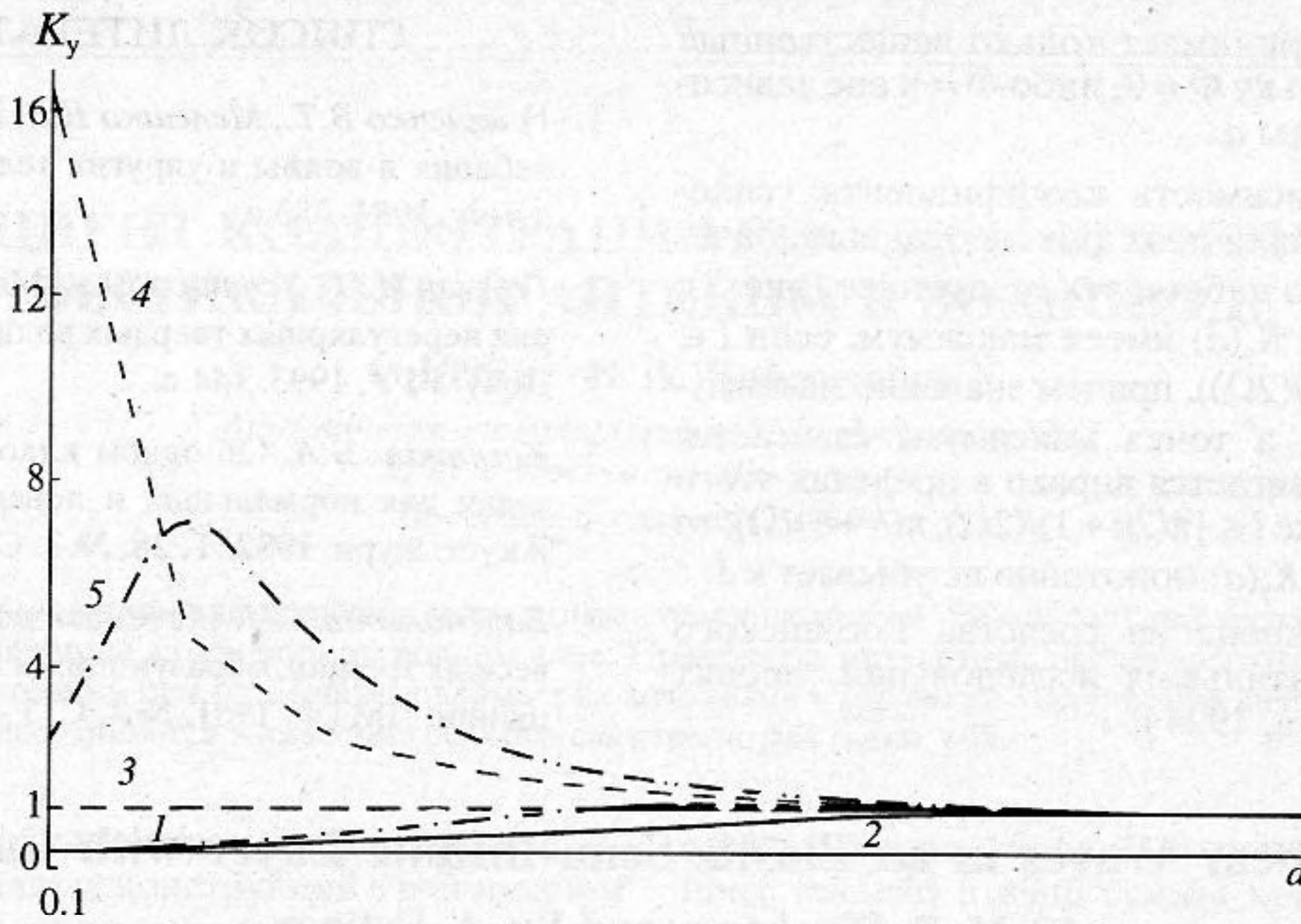


Рис. 3. Зависимость коэффициента энергетического усиления ( $K_y$ ) от  $a$  при  $\Omega = 1.5$  и  $l = 0.8$  (кривая 1),  $l = 1.22$  (кривая 2),  $l = \pi/\Omega$  (кривая 3),  $l = 2.25$  (кривая 4),  $l = 2.35$  (кривая 5).

Проведенные расчеты показали, что при  $\Omega < \pi$  исследуемые характеристики ( $K_y$  и  $K_{III}$ ) изменяются периодически по параметру  $l$  с периодом  $T_1 = \pi/\Omega$  у  $K_y$  и  $|K_{III}|$  и периодом  $T_2 = 2T_1$  у фазы  $\Phi$  коэффициента интенсивности напряжений. Но необходимо отметить, что первый максимум не всегда вписывается в эту периодическую закономерность, а именно, при достаточно больших  $\Omega$  и малых  $a$  заметно смещение точки максимума влево от положения, которое она должна была бы занимать по периодичности, а значение самого максимума выше. Так, при  $\Omega = 0.5$  эти отличия незначительны, а при  $\Omega = 1.5$  и  $a = 0.1$  коэффициент усиления имеет первое максимальное значение, равное 72.38, в точке  $l = 0.07$ , в то время как все остальные максимальные значения  $K_y$  принимаются при  $l_s = 0.16 + 2s\pi/3$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) и равны 16.58. Этот эффект объясняется взаимодействием неоднородных волн  $u_k^+(x+l)$  и  $u_k^-(x)$  в области  $-l \leq x \leq 0, |y| \leq 1$  в силу малости  $l$ . Также следует обратить внимание, что при уменьшении  $a$  максимальные значения  $K_y$  и  $K_{III}$  становятся все более

ярко выраженными. Здесь наблюдается аналогия с резонатором Гельмгольца, роль которого в данном случае играет область  $-l \leq x \leq 0$ .

При  $\Omega > \pi$  ( $\Omega = \pi$  – первая критическая частота) периодичность пропадает и зависимости становятся более сложными (рис. 2).

Модуль коэффициента интенсивности напряжений ( $K_{II}$ ) принимает максимальные значения при тех же значениях  $l$ , что и коэффициент усиления. В таблице “Максимумы коэффициента усиления и модуля коэффициента интенсивности напряжений” приведены максимальные значения и точки максимумов коэффициента усиления и модуля коэффициента интенсивности напряжений, отнесенного к  $\mu\sqrt{h}$ , для различных значений  $\Omega$  и  $a$  (для  $\Omega = 0.5$  и  $\Omega = 1.5$  приведены значения для первого максимума, а для  $\Omega = 3.7$  – для третьего, который является самым большим в диапазоне  $0.1 \leq l \leq 4.08$ ).

Следует обратить внимание на следующий интересный факт, что при  $l_k = k\pi/\Omega$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и  $\Omega \in (0, \pi)$   $K_y$  не зависит от  $a$  и равен 1 (рис. 3,

Максимумы коэффициента усиления и модуля коэффициента интенсивности напряжений

	$\Omega = 0.5$			$\Omega = 1.5$			$\Omega = 3.7$		
	$l_{max}$	$K_y^*$	$K_u^*$	$l_{max}$	$K_y^*$	$K_u^*$	$l_{max}$	$K_y^*$	$K_u^*$
$a = 0.1$	1.05	3.09	4.443	0.07	72.38	25.75	1.682	42.12	6.01
$a = 0.4$	1.50	1.40	1.423	0.26	3.364	2.53	1.689	69.68	14.40
$a = 0.6$	1.536	1.153	0.938	0.42	1.578	1.46	1.745	13.00	7.501

линия 3), а  $K_{III}$  принимает только вещественные значения, поскольку  $\Phi = 0$ , либо  $\Phi = \pi$  вне зависимости от величины  $a$ .

Исследуя зависимость коэффициента усиления  $K_y$  от  $a$  при различных фиксированных значениях  $\Omega$  и  $l$ , можно наблюдать следующее (рис. 3): график функции  $K_y(a)$  имеет максимум, если  $l \in (\pi n / \Omega, \pi(2n + 1) / (2\Omega))$ , причем значение максимума уменьшается, а точка максимума сдвигается вправо, когда  $l$  двигается вправо в пределах этого диапазона, если же  $l \in [\pi(2n + 1) / (2\Omega), \pi(n + 1) / \Omega]$ , то график функции  $K_y(a)$  монотонно не убывает к 1.

Работа выполнена на средства Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 94-01-000-159-а, 1994 г.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.
2. Гетман И.П., Устинов Ю.А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-на-Дону: РГУ, 1993. 144 с.
3. Касаткин Б.А. Об одном классе дифракционных задач для нормальных и поверхностных волн. // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 2. С. 232 - 237.
4. Баренблатт Г.И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ. 1961. № 4. С. 3 - 56.

## Shear Waves in an Elastic Semi-Infinite Layer with Cuts

M. B. D'yakonov and Yu. A. Ustinov

The propagation and diffraction of shear waves in an elastic half-layer are considered. In the framework of normal wave formalism, a simple way to handle the singularities at the cut vertices is suggested. It consists in reducing the problem to infinite systems of algebraic equations. This procedure appreciably improves the efficiency of the reduction method. The computational scheme is such that the stress intensity coefficient evolves at the stage of solving the algebraic system as one of its unknowns. The results of this method may be used in acoustic applications concerning diffraction at thin gratings.