АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1995, том 41, № 4, с. 622 - 627

УДК 534

О РАЗЛОЖЕНИИ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ПО ЧИСЛУ МАХА В ПРОБЛЕМЕ ГЕНЕРАЦИИ ЗВУКА ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ВИХРЯМИ

© 1995 г. **В. Ф. Копьев, С. А. Чернышев**

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского

107005 Москва, ул. Радио, 17

Поступила в редакцию 29.12.94 г.

В слабосжимаемой идеальной жидкости ($M \ll 1$) рассматривается вопрос о получении максимально возможного количества членов асимптотического разложения звукового поля по числу M для аэродинамического звука, генерируемого локализованными вихрями. С использованием подхода Кроу и процедуры сращивания Ван Дайка получены два члена в асимптотическом разложении – квадрупольный и октупольный. Показано, что в общем случае невозможно получение следующих моментов звукового поля из-за расходимости соответствующих интегралов. Обсуждается возможность записи звукового поля через выражения для квадрупольного и октупольного моментов несжимаемого течения с запаздывающим аргументом.

Исследованию генерации звука трехмерными локализованными вихрями в слабосжимаемой жидкости методами сингулярных возмущений посвящено значительное число работ, начиная с первых исследований Обермейера [1] и Кроу [2]. Дальнейшее развитие этих вопросов связано с работами Мёринга [3], Обермейера [4], Камбе [5] и других. В настоящей работе будет использован подход к проблеме, развитый Кроу и подробно описанный в его работе [2], где строго получен главный (квадрупольный) член асимптотического разложения по малому числу M и проанализирована основная проблема, возникающая при этом. Она связана с появлением произвольного тензора вида $C_{ij} = \delta_{ij}\alpha(t)$ во внешней задаче, который удается определить, только используя трехчленное разложение внутреннего и внешнего решений [1, 2].

Главная методическая особенность подхода Кроу заключается в следующем. Поле скорости разбивается на две части: соленоидальную, связанную с полем завихренности через закон Био–Савара, и акустическую. Процедура сращивания позволяет выразить акустические переменные в дальней зоне через соленоидальное поле скорости. Удобство выделения соленоидальной части связано с законом убывания ее на бесконечности, что и позволяет провести сращивание.

Метод решения был бы замкнут, если бы соленоидальная часть скорости могла быть найдена независимо, однако уравнения, описывающие соленоидальную часть скорости, не являются независимыми, как это было бы в случае несжимаемой жидкости, а включают в себя члены, зависящие от акустической части. Тем не менее решение задачи для несжимаемой жидкости может быть использовано вместо соленоидального поля, хотя такая замена является при определении звукового поля деликатной процедурой. Этот вопрос рассматривается во второй части настоящей работы.

В первой части настоящей работы ставится задача получения в звуковом поле следующего (октупольного) члена асимптотического разложения и возможности построения регулярной асимптотической процедуры. В отличие от работы [2], где используется процедура сращивания Каплуна, здесь будет использована более простая процедура сращивания Ван Дайка [6]. Для получения октупольного члена оказывается необходимым использовать следующие члены разложения внутреннего и внешнего решения, определяющие произвольные тензоры вида $D_{ijk} = \delta_{ij}\beta_k(t)$, возникающие во внешней задаче. Эта процедура показывает также, что октупольный член разложения является последним, который может быть получен в общем виде. Это связано с отсутствием сходимости интегралов, определяющих высшие мультипольные моменты внутренней задачи.

В третьей части работы рассматривается вопрос об описании акустического поля, создаваемого локализованными вихрями, с помощью известных аналогий. Проведенный анализ показывает, что именно представление источника в форме Лайтхилла оказывается справедливым при вычислении октупольного члена. Правильное вычисление октупольного члена имеет не только методический интерес. В некоторых случаях октупольный член может оказаться значительным даже для малых M. Такая ситуация имеет место для осесимметричных колебаний тонкого ($\mu \ll 1$)

вихревого кольца [7], когда октупольный звук имеет порядок M/μ относительно квадрупольного и может оказаться не мал, поскольку M/μ есть отношение двух малых параметров. Такая ситуация возникает при рассмотрении и других высокочастотных колебаний тонкого вихревого кольца, рассмотренных в [8].

В заключительной части работы обсуждается возможность записи звукового поля через выражения для квадрупольного и октупольного моментов несжимаемого течения с запаздывающим аргументом.

Рассмотрим распределение завихренности, локализованное в конечной области с характерным размером l в безграничной изэнтропической покоящейся на бесконечности жидкости. Нестационарное движение вихря будет сопровождаться излучением звуковых волн. В предположении малости характерного числа Маха потока течение характеризуется двумя различными масштабами длины: вблизи области завихренности (внутренняя область) – размером вихря l, а в дальнем поле (внешняя область), где возмущения малы и имеют волновую структуру – масштабом длины звуковой волны λ. Легко провести следующие оценки: если характерная скорость в ядре вихря имеет порядок u, то характерная частота имеет порядок u/l, а длина волны $\lambda \sim c_0/\omega \approx c_0 l/u = lM^{-1}$ (c_0 – скорость звука). Так как число Маха M мало, то длина волны λ значительно превосходит характерный размер вихря l. Наличие двух характерных масштабов в различных областях течения в задаче генерации звука вихрем приводит к необходимости использования метода сингулярных возмущений.

Течение сжимаемой идеальной жидкости полностью описывается уравнением Эйлера, уравнением неразрывности и уравнением состояния, которое для изэнтропических течений имеет вид $P/\rho^\gamma = \text{const}$, где P – давление, ρ – плотность, γ – отношение теплоемкостей.

Представим полную скорость $\mathbf{u}$ в виде суммы соленоидальной и потенциальной составляющих, то есть $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, где соленоидальная часть скорости $\mathbf{v}$ определяется через завихренность $\mathbf{\Omega}$ с помощью соотношения:

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathbf{\Omega}(\mathbf{y})}{r}d\mathbf{y}, \quad r = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Легко показать, что для локализованных вихрей соленоидальное поле скорости $\mathbf{v}$ будет убывать на бесконечности как x^{-3}.

В соответствии с методом Кроу разделим все основные переменные на два типа – акустические и соленоидальные. Акустическими переменными будем называть плотность ρ, давление P и потенциал φ. К соленоидальным переменным отнесем поле скорости $\mathbf{v}$ и завихренность $\mathbf{\Omega}$. Задача состоит в том, чтобы выразить акустические переменные через соленоидальную скорость $\mathbf{v}$.

Запишем систему уравнений идеальной жидкости в виде:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v}+\nabla\varphi)\nabla\rho + \rho\Delta\varphi = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - c_0^2\Delta\rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{2}$$

где $T_{ij} = \rho(v_i + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i})(v_j + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}) + (p - c_0^2\rho)\delta_{ij}$,

$\frac{P}{P_0} = (\frac{\rho}{\rho_0})^\gamma$.

Первое уравнение есть уравнение неразрывности, второе – комбинация уравнения Эйлера и продифференцированного по времени уравнения неразрывности.

Соленоидальное поле скорости $\mathbf{v}$, введенное выше, удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + [\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}] + \nabla H = -[\mathbf{\Omega}, \nabla\varphi], \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{4}$$

$$H = \int\frac{dP}{\rho} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}.$$

Преимущество использования соленоидальной скорости, как независимой переменной, состоит в законе убывания ее на бесконечности $\sim x^{-3}$, что и позволяет провести сращивание внешнего и внутреннего решений. Отметим однако, что соленоидальное поле не является независимым, так как его эволюция определяется также и акустическими переменными ρ и φ (следует отличать соленоидальное поле, описываемое системой уравнений (3), (4), и поле скорости в несжимаемой жидкости, описываемое уравнением (3) с нулевой правой частью).

Проведем обезразмеривание переменных согласно выражениям:

$$v \sim u, \quad \varphi \sim ul, \quad x \sim l, \quad t \sim l/u, \quad s = \rho - \rho_0 \sim M^2\rho_0.$$

Тогда система уравнений (1), (2) перепишется в следующем виде:

$$M^2(\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}+\nabla\varphi)\nabla s) + (1+M^2 s)\Delta\varphi = 0, \tag{5}$$

$$M^2\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \Delta s = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{6}$$

где

$$T_{ij} = (1 + M^2 s)\,(v_i + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i})\,(v_j + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}) + b\delta_{ij},$$

$$b = M^2 \frac{(\gamma - 1)}{2} s^2 + \ldots.$$

Рассмотрим внутреннюю область. Уравнение (5) показывает, что во внутренней области должны быть справедливы следующие разложения

$$s = S_0 + M^2 S_2 + M^3 S_3 + \ldots, \tag{7}$$

$$\varphi = M^2 \Phi_2 + M^3 \Phi_3 + \ldots. \tag{8}$$

Обратим внимание, что во внутренней области $\nabla\varphi$ имеет порядок $O(M^2)$ по сравнению с $\mathbf{v}$.

Подставляя разложения (7) и (8) в систему уравнений (5), (6), получим цепочку уравнений, решение которых детально описано в [2]. Выпишем здесь только асимптотическое поведение получаемых решений при $x \longrightarrow \infty$, необходимое для проведения сращивания с внешним решением:

$$S_0 = \frac{\partial^2(1/x)}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{4\pi}\int T_{ij}^{(0)} d\mathbf{y} - \frac{\partial^3(1/x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\frac{1}{4\pi}\int T_{ij}^{(0)} y_k d\mathbf{y} + \tag{9}$$

$$+ \frac{\partial^4(1/x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_m}\frac{1}{4\pi}\int \frac{T_{ij}^{(0)} y_k y_m}{2!} d\mathbf{y} + O\left(\frac{\ln x}{x^6}\right),$$

$$S_1 = 0, \tag{10}$$

$$S_2 = \frac{\partial^2(1/x)}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{4\pi}\int T_{ij}^{(2)} d\mathbf{y} - \frac{\partial^2 x}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{4\pi}\int \frac{\ddot{T}_{ij}^{(0)}}{2} d\mathbf{y} -$$

$$- \frac{\partial^3 x}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\frac{1}{4\pi}\int \ddot{T}_{ij}^{(0)} y_k d\mathbf{y} + \tag{11}$$

$$+ \frac{\partial^4 x}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_m}\frac{1}{4\pi}\int \frac{\ddot{T}_{ij}^{(0)}}{4} y_k y_m d\mathbf{y} + O\left(\frac{\ln x}{x^4}\right),$$

$$S_3 = d_0 + O\left(\frac{\ln x}{x^3}\right), \tag{12}$$

где $T_{ij}^{(0)} = v_i v_j$, полное выражение для $T_{ij}^{(2)}$, $T_{ij}^{(3)}$ приведено в [2].

Разложение (9) обрывается на третьем члене, поскольку $T_{ij}^{(0)}$ имеет порядок $O(x^{-6})$ при $x \longrightarrow \infty$, и соответствующие интегралы, определяющие моменты более высокого порядка, не будут сходиться. По этой же причине удается выписать только четыре члена в ряду (7), поскольку уже для члена S_4 асимптотическое представление при $x \longrightarrow \infty$ не может быть выписано в общем виде, аналогичном (9). Это связано с тем, что величина $T_{ij}^{(3)}$ имеет порядок $O(x^{-3})$ и даже первый интеграл в таком разложении был бы не абсолютно сходящимся.

Рассмотрим внешнюю область. Используя внешнюю переменную $\boldsymbol{\xi} = M\mathbf{x}$ и разложения

$$s(\boldsymbol{\xi}, t) = M^3 s_3 + M^4 s_4 + \ldots, \tag{13}$$

$$\varphi(\boldsymbol{\xi}, t) = M^3 \Phi_3 + M^4 \Phi_4 + \ldots, \tag{14}$$

из системы (5), (6) легко получить цепочку уравнений для каждого порядка $O(M^n)$. Для трех первых значений $n = 3, 4, 5$ уравнение для s_n есть обычное волновое уравнение, решение которого может быть сразу выписано в виде мультипольного ряда:

$$s_n(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{A^{(n)}(t-\xi)}{\xi} + \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left[\frac{B_i^{(n)}(t-\xi)}{\xi}\right] + \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \times \tag{15}$$

$$\times \left[\frac{C_{ij}^{(n)}(t-\xi)}{\xi}\right] + \frac{\partial^3}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k}\left[\frac{D_{ijk}^{(n)}(t-\xi)}{\xi}\right] + \ldots,$$

где функции $A^{(n)}$, $B_i^{(n)}$ и т.д. определяются в результате сращивания. В промежуточной области, где $\xi \longrightarrow 0$, решение (15) может быть представлено в виде:

$$s_n(\xi \longrightarrow 0, t) = \ldots + \frac{\partial^3}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k}\left[\frac{D_{ijk}^{(n)}(t)}{\xi} + \right. \tag{16}$$

$$\left. + \frac{\xi \dot{D}_{ijk}^{(n)}(t)}{2} - \frac{\xi^2 \ddot{D}_{ijk}^{(n)}(t)}{6} + \ldots\right] + \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \delta \xi_j} \times$$

$$\times \left[\frac{C_{ij}^{(n)}}{\xi} + \frac{\xi \dot{C}_{ij}^{(n)}}{2} + \frac{\xi^2 \ddot{C}_{ij}^{(n)}}{6} + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left[\frac{B_i^{(n)}(t)}{\xi} + \ldots\right] + \left[\frac{A^{(n)}(t)}{\xi} + \ldots\right].$$

Опишем процедуру сращивания [6]. Возьмем n членов во внутреннем разложении (7). Используя асимптотические представления (9) - (12), перепишем эту часть внутреннего разложения во внешних переменных $\boldsymbol{\xi}$ и возьмем m членов. Обозначим это выражение как $(n - m)_{\text{in}}$. Возьмем m членов внешнего разложения (13). Используя (16), перепишем эту часть внешнего разложения во внутренних переменных $\mathbf{x}$, возьмем n членов и перейдем опять к внешним переменным $\boldsymbol{\xi}$. Обозначим это выражение как $(m - n)_{\text{ex}}$. Согласно процедуре сращивания Ван Дайка $(n - m)_{\text{in}} = (m - n)_{\text{ex}}$.

Получим сначала результат Кроу для главного члена s_3. Сравнивая (16) и (9), легко показать, что в s_3 все мультипольные моменты старше квадрупольного должны быть положены равными нулю.

Определим $C_{ij}^{(3)}$, $B_i^{(3)}$, $A^{(3)}$. Условие $(1-1)_{in} = (1-1)_{ex}$ дает:

$$C_{ij}^{(3)}(t) = \frac{1}{4\pi}\int T_{ij}^{(0)} d^3\mathbf{y} + \delta_{ij}\alpha(t), \tag{17}$$

где $\alpha(t)$ – произвольная функция, связанная с тем, что ее добавление не меняет члена $(1-1)_{ex}$, поскольку $\nabla^2(x^{-1}) \equiv 0$. Условие $(1-2)_{in} = (2-1)_{ex}$ дает $B_i^{(3)} = 0$. Условие $(1-3)_{in} = (3-1)_{ex}$ показывает, что $A^{(3)} = -\ddot{\alpha}(t)$. Это условие позволяет исключить неизвестную функцию $\alpha(t)$. Действительно, наличие функции $\alpha(t)$ ведет к появлению дополнительного члена в $s^{(3)}$ вида

$$s_3' = \Delta_\xi \frac{\alpha(t-\xi)}{\xi} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\alpha(t-\xi)}{\xi}, \tag{18}$$

который очевидно тождественно равен нулю. Это означает, что появление $\alpha(t)$ в квадрупольном члене $C_{ij}^{(3)}$ компенсируется его появлением в монопольном члене $A^{(3)}$, а само $\alpha(t)$ может быть положено равным нулю. Другими словами, если в качестве квадрупольного момента будет взята величина, отличная от $\frac{1}{4\pi}\int v_i v_j d^3\mathbf{y}$, то необходимо будет добавить в звуковое поле монопольную часть, компенсирующую эту разницу. Чтобы исключить неизвестную функцию $\alpha(t)$, потребовались три члена в разложении внутреннего решения.

Условие $(1-4)_{in} = (4-1)_{ex}$ определяет неизвестный член внутреннего решения $d_0 = -1/3\dddot{C}_{ii}^{(3)}(t)$. Окончательно получим:

$$C_{ij}^{(3)} = \frac{1}{4\pi}\int T_{ij}^{(0)} d^3\mathbf{y}, \quad A^{(3)} = B_i^{(3)} = 0,$$
$$d_0 = -\frac{\dddot{C}_{ii}^{(3)}}{3} \tag{19}$$

в полном соответствии с результатом [2].

Оказывается, процедура Ван Дайка дает возможность получить еще один член s_4 в разложении (13). Легко показать, что в мультипольном разложении (16) для $n = 4$ все моменты старше октупольного должны быть положены равными нулю. Условие $(2-1)_{in} = (1-2)_{ex}$ дает

$$D_{ijk}^{(4)}(t) = -\frac{1}{4\pi}\int T_{ij}^{(0)} y_k d^3\mathbf{y} + \delta_{ij}\beta_k(t) + \\ + \delta_{jk}\beta_i(t) + \delta_{ki}\beta_j(t), \tag{20}$$

где вектора $\beta_i(t)$, $\beta_j(t)$, $\beta_k(t)$ – произвольные функции времени. Условие $(2-2)_{in} = (2-2)_{ex}$ дает $C_{ij}^{(4)}(t) = 0$. Условие $(2-3)_{in} = (3-2)_{ex}$ определяет неизвестные величины $\beta_i(t)$. Действительно, появление произвольного члена вида $\delta_{ij}\beta_k(t)$ в (20) ведет к появлению компенсирующего дипольного члена вида $B_k^{(4)} = -\ddot{\beta}_k(t)$. Дополнительный член в s_4, связанный с $\beta_k(t)$, будет иметь вид

$$s_4' = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left[\Delta_\xi \frac{\beta_k(t-\xi)}{\xi} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\beta_k(t-\xi)}{\xi}\right]$$

и очевидно равен нулю. Таким образом, все дополнительные члены в (20) могут быть отброшены.

Условие $(2-4)_{in} = (4-2)_{ex}$ дает $A^{(4)}(t) = 0$. В результате для s_4 получим следующее выражение

$$A^{(4)} = B_i^{(4)} = C_{ij}^{(4)} = 0,$$
$$D_{ijk}^{(4)} = -\frac{1}{4\pi}\int T_{ij}^{0} y_k d^3\mathbf{y}. \tag{21}$$

Рассмотрим следующий член s_5 в разложении (13). Анализ сходимости интегралов, проведенный при исследовании асимптотического поведения внутреннего решения при больших $\mathbf{x}$, показал, что удается выписать члены не старше $(4-3)_{in}$. Однако, для определения монопольного члена $A^{(5)}$ требуется сращивание величин $(3-5)_{in}$ и $(5-3)_{ex}$. Поэтому s_4 в (13) оказывается последним членом, который можно получить в рамках общей процедуры.

Рассмотрим теперь вопрос замены в формулах (19) и (21) соленоидального поля скорости $\mathbf{v}$ полем скорости $\mathbf{U}$, вычисленным для несжимаемой жидкости. Поле $\mathbf{v}$ описывается системой (3), (4), которая включает акустическую переменную φ, т.е. соленоидальное поле не является независимым от акустических переменных. Применяя к уравнению (3) операцию rot, перепишем систему, определяющую эволюцию поля $\mathbf{v}$, следующим образом:

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{v} = \mathbf{\Omega},$$
$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,[\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}] = -\mathrm{rot}\,[\mathbf{\Omega}, \nabla\varphi]. \tag{22}$$

При равной нулю правой части уравнения (22) эта система будет описывать динамику поля скорости $\mathbf{U}$ в несжимаемой жидкости. Согласно выражению (8), правая часть уравнения (22) мала в области ядра вихря, так как в этой области $\nabla\varphi \sim vM^2$. Поэтому в ядре вихря справедлива оценка $\mathbf{v} = \mathbf{U}(1 + O(M^2))$. Обратим внимание, что интегралы, описывающие квадрупольный и октупольный моменты звукового поля (19) и (21), не локализованы по области завихренности, где справедлива эта оценка. Поэтому непосредственно заменить в них $\mathbf{v}$ на $\mathbf{U}$ с сохранением выписанной точности нельзя. Однако эти интегралы удается свести к области завихренности, используя только факт соленоидальности поля $\mathbf{v}$.

Действительно, для любого поля $\mathbf{v}$, удовлетворяющего условию $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, справедливы следующие тензорные тождества:

$$v_i v_j = -L_i x_j + \delta_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{L}) + \frac{\partial}{\partial x_n}(v_i v_n x_j) - \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial(v^2 x_j)}{\partial x_i} - \delta_{ij}\frac{\partial(v_n(\mathbf{vx}))}{\partial x_n} + \frac{1}{2}\delta_{ij}\frac{\partial(v^2 x_m)}{\partial x_m}, \tag{23}$$

$$2v_i v_j x_k = L_k x_i x_j - L_i x_j x_k - L_j x_i x_k + 2\delta_{ij} x_k(\mathbf{Lx}) - \\ -\delta_{ij} L_k x^2 - \frac{\partial}{\partial x_n}[v_n v_k x_i x_j - v_n v_i x_j x_k - v_n v_j x_i x_k - \\ -\delta_{ij} v_n v_k x^2 + 2\delta_{ij} v_n(\mathbf{vx}) x_k - \delta_{ij} x_n x_k v^2] - \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(v^2 x_j x_k) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(v^2 x_i x_k) + \frac{1}{2}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}(v^2 x^2),$$

где $\mathbf{L} = [\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}]$. Подставим эти выражения в формулы (19) и (21). При интегрировании по всему пространству все члены, содержащие производные, обратятся в нуль после сведения объемных интегралов к поверхностным. В результате получим, что C_{ij} и D_{ijk} выражаются через интегралы от вектора $\mathbf{L}$, тождественно равного нулю вне вихря, то есть

$$C_{ij} = -\frac{1}{4\pi}\int [L_i y_j - \delta_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{L})]\, d^3\mathbf{y}, \tag{24}$$

$$D_{ijk} = \frac{1}{8\pi}\int [L_i y_j y_k + \delta_{ij} L_k y^2 - 2\delta_{ij} y_k(\mathbf{y}, \mathbf{L})]\, d^3\mathbf{y}. \tag{25}$$

Вторая формула упрощена с учетом симметричности тензора $\frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(1/x)$. В полученных интегралах (24) и (25) поле $\mathbf{U}$ уже может быть использовано вместо $\mathbf{v}$ с точностью $O(M^2)$. Второй член в (24) после такой подстановки будет представлять собой сохраняющуюся энергию несжимаемого течения (см. формулу (23)) и может быть опущен. Таким образом, строго показано, что в общем случае могут быть вычислены два члена разложения звукового поля по числу M, определяемые выражениями (19) и (21). Для их вычисления может использоваться поле $\mathbf{U}$, вычисленное в приближении несжимаемой жидкости.

Сделаем теперь несколько замечаний. Выражения (19) и (21) для квадрупольного и октупольного моментов могут быть получены также из решения уравнения Лайтхилла

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2\Delta\right)\rho = \rho_0 \frac{\partial^2 U_i U_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

с помощью свертки источника с функцией Грина волнового уравнения. Таким образом уравнение Лайтхилла с источником в правой части, вычисленным в рамках динамики несжимаемой жидкости, дает возможность правильно вычислять два члена разложения по M в звуковом поле – квадрупольный и октупольный. Обратим внимание, что при записи источника в форме Пауэлла $q = \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{L}$ в соответствии с акустической аналогией Пауэлла–Хоу октупольный момент будет содержать только первый член из формулы (25) [10]. Таким образом акустические аналогии Лайтхилла и Пауэлла–Хоу, совпадая в главном приближении, будут различаться в следующем приближении по M, т.е. при вычислении октупольного момента.

Обратимся к общей формуле для звукового поля. Выражение (15) в двух приближениях по M примет вид:

$$s = \frac{x_i x_j}{x^2}\frac{\ddot{C}_{ij}(t - \frac{x}{c})}{x} - \frac{x_i x_j x_k}{x^3}\frac{\dddot{D}_{ijk}(t - \frac{x}{c})}{x}, \tag{26}$$

где $\ddot{C}_{ij}$ и $\dddot{D}_{ijk}$ даются формулами (19) и (21) или (24) и (25) с полем скорости $\mathbf{U}$ вместо $\mathbf{v}$. Используя уравнение Гельмгольца $\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{L}$, можно еще больше упростить выражение (24), представив его в линейном по завихренности виде:

$$C_{ij} = \frac{1}{12\pi}\frac{d}{dt}\int [\mathbf{\Omega}, \mathbf{y}]_i y_j d^3\mathbf{y}. \tag{27}$$

В этом выражении отброшены постоянные члены, не дающие вклада в (26). Обратим внимание, что квадрупольный момент (27), впервые полученный в таком виде Мёрингом [3], удовлетворяет условию $C_{ii} = 0$. Октупольный член имеет более сложную структуру. Из него можно выделить часть, представляющую собой сумму компонент, свернутых по паре индексов

$$\beta_k = D_{iik} + D_{kii} + D_{iki} = \\ = -\frac{1}{4\pi}\int [4y_k(\mathbf{Ly}) - 3L_k y^2]\, d^3\mathbf{y} \tag{28}$$

и отнести к дипольной составляющей. При этом очевидно, что величина суммарного звукового поля никак не зависит от того, выделяется или не выделяется в (26) дипольная составляющая в явном виде. Выделение дипольной составляющей означает только, что в формуле (20) β_k не равно нулю.

В заключение отметим, что при решении модельной задачи об излучении звука конкретным распределением вихрей естественно предположить, что динамика поля завихренности в несжимаемой жидкости уже известна. Это означает, что известна дальняя асимптотика потенциала, вычисление которой необходимо для удовлетворения граничному условию на бесконечности.

В этом случае для вычисления квадрупольного звукового поля (первый член в формуле (26)) нет необходимости вычислять интеграл (27). Это поле может быть сразу получено заменой аргумента t в квадрупольном моменте несжимаемого течения на аргумент $(t - r/c)$, т.е. введением запаздывания. Единственное условие, которое надо проверить – это равенство нулю суммы диагональных элементов используемого момента. Это будет гарантировать, что $\alpha(t)$ в формуле (17) равно нулю. (Использование квадрупольного момента не для S_0, а для потенциала Φ не принципиально, поскольку S_0 (9) после подстановки **U** вместо **v** есть в точности давление в несжимаемом течении P_0, удовлетворяющее, как и S_0, уравнению $\Delta P_0 = -\partial^2 U_i U_j / \partial x_i \partial x_j$ и связанное в дальнем поле с потенциалом Φ простым соотношением $\dot{\Phi} = P_0/\rho_0$.) Такая процедура естественного сращивания использовалась в [11] для тела с пульсирующим объемом (монополь) или для колеблющегося тела (диполь). Для вихревых течений (квадруполь) такую возможность дает знание $\alpha(t)$.

Сказанное выше не относится к вычислению октупольного члена в звуковом поле. Это связано с тем, что свертка D_{ijk} (25) по любой паре индексов равна не нулю, а неизвестной функции вида (28). Для уверенности, что вычисленный в несжимаемой задаче октупольный момент совпадает с (25), достаточно проверить, что совпадают функции (28). Эта проверка, очевидно, влечет за собой вычисление самого интеграла (28), что не проще вычисления (25). Поэтому использование октупольной асимптотики несжимаемого течения не дает существенных преимуществ при вычислении звукового поля.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94-01-01135) и Международного научного фонда (грант MC9000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Obermeier F.* Die Wechselwirkung zwischen Strömungsfeldern und Schallfeldern als singluläres Störungsproblem. Ph.D thesis, Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Bericht 4/1968.
2. *Crow S.C.* Aerodynamic Sound Emission as a Singular Perturbation Problem // Stud. Appl. Math. 1970. V. 49. № 1. P. 21 - 44.
3. *Möhring W.* On Vortex Sound at Low Much Number // J. of Fluid Mech. 1978. V. 85. P. 685 - 691.
4. *Obermeier F.* On a New Representation of Aerodynamic Source Distribution // Acustica. 1979. V. 42. P. 56 - 71.
5. *Kambe T.* Acoustic Emission by Vortex Motions // J. of Fluid Mech. 1986. V. 173. P. 643 - 666.
6. *Найфэ А.Х.* Методы возмущения. М.: Мир, 1976. 455 с.
7. *Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А.* Излучение и рассеяние звука вихревым кольцом // Изв. АН СССР МЖГ. 1987. № 3. С. 83 - 95.
8. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A.* Sound Radiation by High Frequensy Oscillations of the Vortex Ring // AIAA Paper 93 - 4362.
9. *Крайтон Д.* Акустика как ветвь гидромеханики // Современная гидродинамика: успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. С. 359 - 412.
10. *Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А.* Некоторые замечания к теории Лайтхилла в связи с излучением звука компактными вихрями // Акустический журнал. 1986. Т. 32. № 2. С. 184 - 189.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.

Higher-Order Terms of the Mach-Number Expansion of the Sound Field Produced by Localized Vortices

V. F. Kop'ev and S. A. Chernyshev

For a weakly compressible inviscid fluid (with the Mach number $M \ll 1$), we consider the problem of obtaining the maximum possible number of terms of the asymptotic expansion of a sound field in powers of the Mach number for the aerodynamic sound generated by localized vortices. Using Crow's approach and the matching procedure of Van Dyke, quadrupole and octopole terms are obtained in the asymptotic expansion. It is shown that higher moments of the sound field cannot be obtained because of the divergence of the respective integrals. We discuss the possibility of representing the sound field in terms of expressions for the quadrupole and octopole moments of an incompressible flow with a retarded argument.