АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 2, с. 172 - 178

УДК 539.3

АНАЛИЗ ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ КОМБИНИРОВАННЫМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ И ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

© 1996 г. С. М. Балабаев, Н. Ф. Ивина

Научно-исследовательский физико-технический институт при Дальневосточном госуниверситете

690600 Владивосток, ул. Уборевича, 25

Поступила в редакцию 15.02.95 г.

Рассмотрен универсальный комбинированный метод конечных и граничных элементов для анализа пьезокерамических преобразователей произвольной геометрической формы. Выполнен анализ водозаполненного (свободно-погруженного) пьезоцилиндра с тангенциальной поляризацией при изменении его геометрических размеров, а также коаксиальной системы из двух одинаковых цилиндров.

Полный анализ пьезопреобразователя (ПП) произвольной формы содержит две основные задачи, которые фактически являются связанными, – анализ многомерных колебаний ПП с учетом пьезоэффекта и анализ формирования акустического поля многомерными колебаниями ПП. Аналитические методы позволяют рассматривать только небольшой класс таких задач, используя различные приближенные модели теории колебаний и теории излучения.

Наиболее универсальными методами для анализа реальных ПП являются численные методы: метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ). Применение МКЭ к анализу собственных колебаний конкретных ПП рассмотрено в большом количестве статей, например, [1 - 5]. Работ, в которых ПП анализируются с учетом акустической нагрузки, опубликовано значительно меньше. Анализ осесимметричного ПП в плоском жестком экране рассмотрен в статье [6], в которой применен численно-аналитический метод, являющийся модификацией метода, изложенного в фундаментальной работе [7]. Несмотря на довольно большое количество зарубежных статей, опубликованных в последние годы, например, [8 - 10], в которых рассматриваются методы анализа колебаний изотропных твердых тел в жидкости и обсуждаются возникающие при этом проблемы, работ, в которых анализируются конечные ПП без экрана, также представляющие практический интерес, совсем немного [1, 11, 12]. Подчеркнем, что речь идет о так называемых "сквозных" задачах (в терминологии автора статьи [13]), когда задано электрическое напряжение, а не скорость (или сила) на поверхности тела, иначе говоря, учтен пьезоэффект.

В фундаментальной работе [1] этого направления рассмотрен комбинированный численный метод для подобных задач. В работе поставлена и решена задача "стыковки" ранее разработанных программ MARTSAM и CHIEF. Для учета акустического излучения фактически использован МГЭ с кусочно-постоянной аппроксимацией неизвестных функций, хотя сама терминология МГЭ была введена позже.

В данной работе рассмотрен универсальный метод решения "сквозных" задач для ПП произвольной геометрической формы, являющийся комбинацией МКЭ и МГЭ, а также его применение к анализу водозаполненного пьезоцилиндра с тангенциальной поляризацией и коаксиальной системы из двух одинаковых пьезоцилиндров. Отметим, что проблема, связанная с устранением погрешности МГЭ на резонансных частотах внутренней области здесь не рассматривается и будет обсуждена в следующей статье.

В МКЭ колебания ПП произвольной геометрической формы описываются системой линейных алгебраических уравнений (временной множитель взят в виде $\exp(i\omega t)$) [2 - 4]

$$(|H_{uu}| - \omega^2|M|)|u_i\rangle + |H_{uv}\rangle V = |F\rangle, \qquad (1)$$

$$\langle H_{uv}||u_i\rangle + H_{vv}V = -iI/\omega,$$

где $|u_i\rangle$ – матрица-столбец узловых смещений; V и I – электрическое напряжение и ток ПП; $|H_{uu}|$ – глобальная матрица жесткости с учетом пьезоэффекта; $|M|$ – глобальная матрица массы; $|H_{uv}\rangle$, $\langle H_{uv}|$ – глобальные матрица-столбец и матрица-строка пьезоэлектрической "жесткости"; H_{vv} – диэлектрическая "жесткость"; $|F\rangle$ – вектор внешних узловых сил. Отметим, что из системы МКЭ можно получить все известные аналитические выражения для описания одномерных колебаний ПП конкретной геометрической формы. В МКЭ ПП разбивается на небольшие по сравнению с длиной волны области – конечные элементы (КЭ) (рис. 1). Отметим, что на рис. 1 ПП взят в форме осесимметричной оболочки в виде полого конуса только для простоты и наглядности рисунка, сам же метод и приведенные

соотношения справедливы для ПП произвольной формы.

Если в системе (1) положить $|F\rangle = 0$, т.е. рассматривать свободные колебания, то из нее можно определить обобщенные матричные задачи для анализа режимов резонанса (2) и антирезонанса (3) [2 - 4]

$$(|H_{uu}| - \omega_p^2|M|)|u_i\rangle = 0, \tag{2}$$

$$(|H_{uu}| - |H_{uv}\rangle\langle H_{uv}|/H_{vv} - \omega_a^2|M|)|u_i\rangle = 0. \tag{3}$$

Зная собственные значения и собственные векторы задачи (2), можно вычислить динамический коэффициент электромеханической связи, характеризующий эффективность преобразования энергии, [2 - 4]

$$k_d = \frac{k_1}{(1+k_1^2)^{1/2}};\ k_1^2 = \frac{(\langle u_i|\ |H_{uv}\rangle)^2 H_{vv}^{-1}}{\omega_p^2\langle u_i|\ |M|\ |u_i\rangle}. \tag{4}$$

Для анализа вынужденных колебаний удобно пользоваться системой уравнений следующего вида, которую можно получить из (1), если положить $V = -1$ В

$$(|H_{uu}| - \omega^2|M|)|u_i\rangle = |H_{uv}\rangle + |F\rangle, \tag{5}$$

$$Y = i\omega(\langle H_{uv}||u_i\rangle - H_{vv}). \tag{6}$$

Система уравнений (5) определяет узловые смещения при заданном электрическом напряжении и заданных внешних механических силах. Уравнение (6) определяет электрическую проводимость Y ПП. Для учета механических потерь в уравнение (5) можно ввести демпфирующую матрицу $|C|$ [14]

$$(|H_{uu}| - \omega^2|M| + i\omega|C|)|u_i\rangle = |H_{uv}\rangle + |F\rangle. \tag{7}$$

Для решения "сквозной" задачи нужно определить вектор сил $|F\rangle$, учитывающий реакцию жидкости на колебания ПП, и описать излучаемое акустическое поле. Для этих целей используется граничное интегральное уравнение (ГИУ) Гельмгольца, которое определяет давление в произвольной точке пространства, если известно распределение давления и нормальной компоненты скорости на замкнутой поверхности S [1, 10, 15]

$$C(X)P(X) = \iint_S (P(Q)\partial G(R)/\partial n + i\omega\rho G(R)V_n(Q))\,dS, \tag{8}$$

где $P(X)$, $P(Q)$ – давления в точке X акустического поля и в точке Q на замкнутой поверхности S; ρ – плотность жидкости; $V_n(Q)$ – колебательная скорость, нормальная к поверхности излучения; $\mathbf{n}$ – внешняя, по отношению к ПП, единичная нормаль; $G(R)$ – функция Грина, в общем случае трехмерного пространства она равна

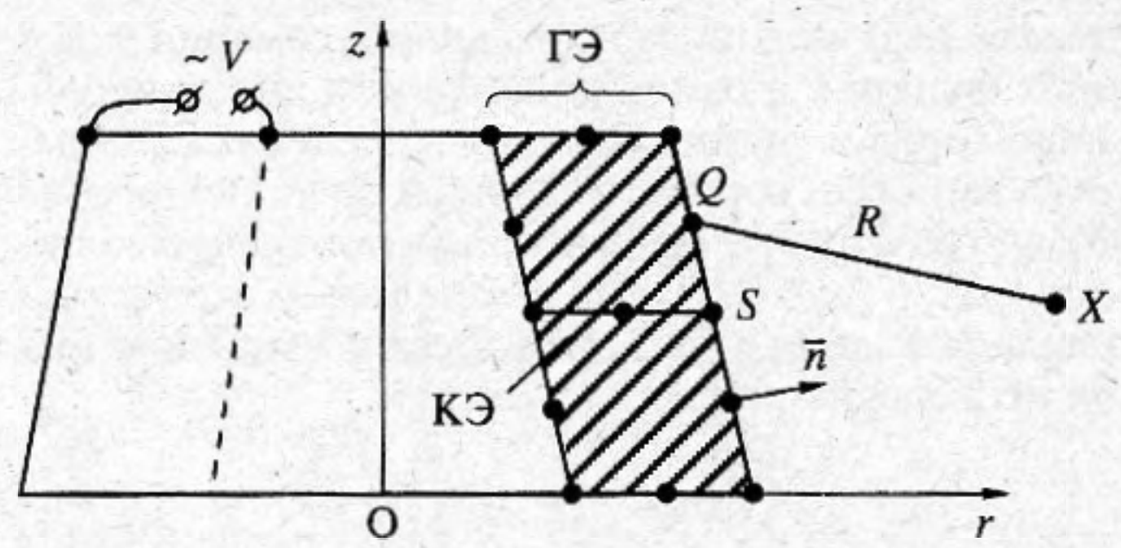

Рис. 1. Расчетная модель.

$$G(R) = \exp(-ikR)/R, \tag{9}$$

где $k = \omega/c$; c – скорость звука в жидкости; R – расстояние между точками X и Q. Коэффициент $C(X)$ определяется в зависимости от расположения точки X относительно поверхности S: $C(X) = 4\pi$, если точка X находится в пространстве вне поверхности S; $C(X) = 0$, если точка X находится внутри S и

$$C(X) = 4\pi + \iint_S \partial(R^{-1})/\partial n dS, \tag{10}$$

если X находится на S. Выражение (10) позволяет определить $C(X)$ даже если в точке X на поверхности S существует неединственная нормаль. На гладкой поверхности (существует единственная нормаль) $C(X) = 2\pi$. Если нельзя выполнить аналитическое интегрирование ГИУ (8), то применяют численные методы.

Для численного интегрирования ГИУ (8) поверхность интегрирования разбивается на конечное число небольших по сравнению с длиной волны участков. Можно приближенно предполагать, что искомые функции постоянны в пределах этих участков, и, выполнив интегрирование, получить линейную систему уравнений, связывающую граничные значения нормальной скорости и давления; такой метод применялся в ряде работ, например, [1, 15].

МГЭ является более универсальным и эффективным математическим аппаратом для численного интегрирования ГИУ. МГЭ позволяет сформировать решение ГИУ в виде линейной системы уравнений относительно дискретных значений нормальной скорости и давления в узлах граничных элементов (ГЭ). Для выполнения интегрирования поверхность S разбивается на конечное количество ГЭ, количество узловых точек которых зависит от порядка аппроксимирующих функций. На рис. 1 выделен один типичный кольцевой ГЭ второго порядка с тремя узловыми точками (точнее, узловыми окружностями). МГЭ позволяет

задать различный порядок аппроксимации искомых функций и самой поверхности интегрирования. Порядок аппроксимации в пределах ГЭ задается выбором соответствующих функций формы $N_j(x_1, x_2)$, которые определены в локальных координатах x_1, x_2 ГЭ. Тогда нормальную скорость и давление в пределах ГЭ с номером k можно определить следующим образом:

$$V_n^k = \sum_{j=1}^{l+1} N_j V_j^k, \quad P^k = \sum_{j=1}^{l+1} N_j P_j^k, \tag{11}$$

где l – порядок аппроксимации функций; V_j^k, P_j^k – узловые значения функций. Интегралы в ГИУ (8) можно представить как сумму интегралов по граничным элементам; K – количество ГЭ,

$$\sum_{k=1}^{K}\left(\iint_{S_k} P(Q)\partial G(R)/\partial n dS + \right.$$

$$\left. + i\omega\rho\iint_{S_k} V_n(Q)G(R)dS\right) =$$

$$= \left(4\pi + \sum_{k=1}^{K}\iint_{S_k}\partial(R^{-1})/\partial n dS\right)P(X).$$

Поместим точку поля X на поверхность ПП в точку с номером m. Значения неизвестных функций в пределах ГЭ аппроксимируем выражениями (II) и вынесем узловые значения функций из-под знака интеграла

$$\sum_k\sum_j\left(P_j^k\iint_{S_k} N_j\partial G/\partial n dS + \right.$$

$$\left. + i\omega\rho V_j^k\iint_{S_k} N_j G dS\right) = \tag{12}$$

$$= \left(4\pi + \sum_k\iint_{S_k}\partial(R^{-1})/\partial n dS\right)P_m.$$

При выполнении интегрирования в пределах каждого ГЭ удобно использовать локальные координаты; тогда компоненты элементных матриц можно определить следующим образом:

$$a_{jm}^k = \iint_{S_k} N_j\partial G/\partial n \det|J|\, dx_1 dx_2,$$

$$b_{jm}^k = \iint_{S_k} N_j G \det|J|\, dx_1 dx_2, \tag{13}$$

$$c_m^k = \iint_{S_k}\partial(R^{-1})/\partial n \det|J|\, dx_1 dx_2,$$

где $\det|J|$ – якобиан; функция Грина в выражениях (13) определяется расстоянием R между точками j и m.

Если точку m располагать последовательно во всех узловых точках, то получим систему линейных уравнений вида (12) относительно граничных узловых значений давления и нормальной скорости

$$\sum_k\sum_j a_{jm}^k P_j^k - \left(4\pi + \sum_k c_m^k\right)P_m =$$

$$= -i\omega\rho\sum_k\sum_j b_{jm}^k V_j^k, \tag{14}$$

$m = 1 - M$, M – количество узловых точек и количество уравнений системы (14).

Определим векторы давления $|P\rangle$ и нормальной скорости $|V_n\rangle$ как совокупность соответствующих узловых значений и перепишем систему уравнений (14) в виде

$$|A||P\rangle = -i\omega\rho|B||V_n\rangle, \tag{15}$$

где $|A|$ и $|B|$ – глобальные матрицы, полученные специальным суммированием [16] соответствующих элементных матриц вида (13). Соотношение (15) можно использовать для определения импеданса излучения. Для заданной точки X можно определить давление в акустическом поле по известным граничным значениям $|P\rangle$ и $|V_n\rangle$ в соответствии с уравнениями (8, 12) ($C(X) = 4\pi$):

$$P = (4\pi)^{-1}(\langle A_1||P\rangle + i\omega\rho\langle B_1||V_n\rangle), \tag{16}$$

где $\langle A_1|$, $\langle B_1|$ – матрицы-строки для заданной точки акустического поля. Выражение (16) применяется для определения поля излучения в ближней и дальней зоне, а также для определения границы ближней зоны.

Таким образом, уравнение (15) определяет связь давления и нормальной скорости на поверхности ПП. Это уравнение нужно добавить к системе МКЭ (7), описывающей колебания ПП под действием электрического напряжения. Полную систему уравнений для решения "сквозной" задачи можно записать в виде

$$(|H_{uu}| - \omega^2|M| + i\omega|C|)\,|u_i\rangle + |W||S||P\rangle = |H_{uv}\rangle,$$

$$\omega^2\rho|B||W|^T|u_i\rangle - |A||P\rangle = 0, \tag{17}$$

где $|W|$ – матрица направляющих косинусов внешней единичной нормали в узловых точках; $|S|$ – диагональная матрица площади. Нормальная скорость на поверхности ПП определена через узловые смещения $|V_n\rangle = i\omega|W|^T|u_i\rangle$, а реакция акустической среды определена через граничное давление $|F\rangle = -|W||S||P\rangle$.

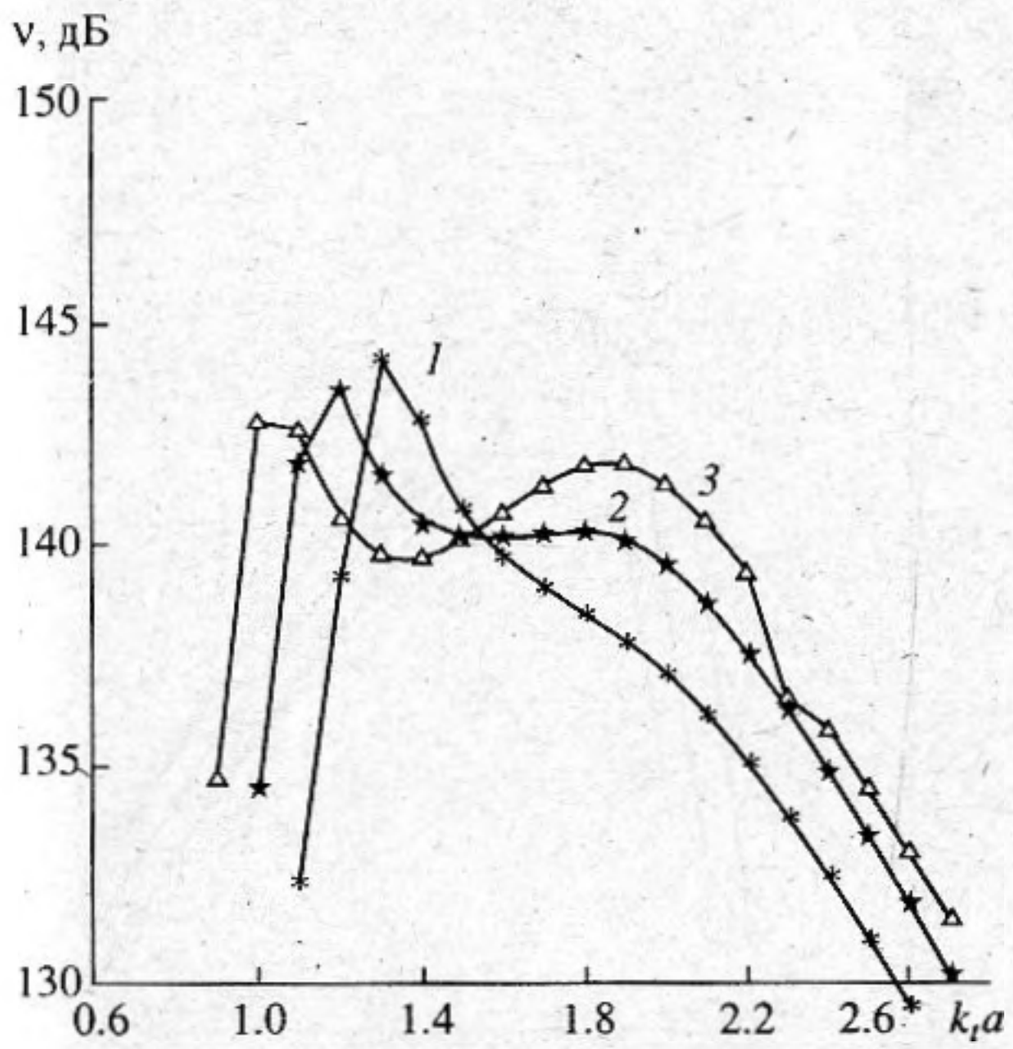

Рис. 2. Частотные характеристики чувствительности излучения, $h/a = 0.15$.

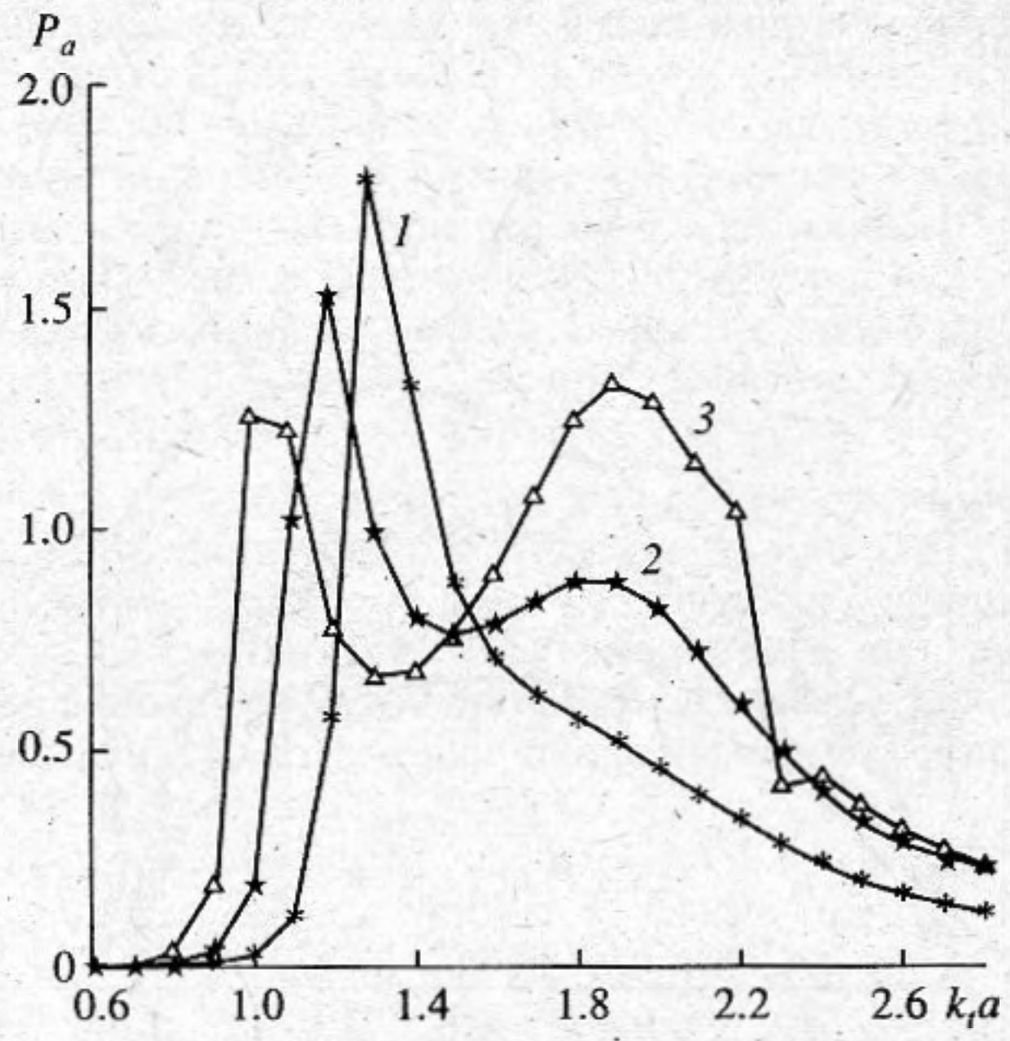

Рис. 3. Частотные характеристики безразмерной активной составляющей акустической мощности, $h/a = 0.15$.

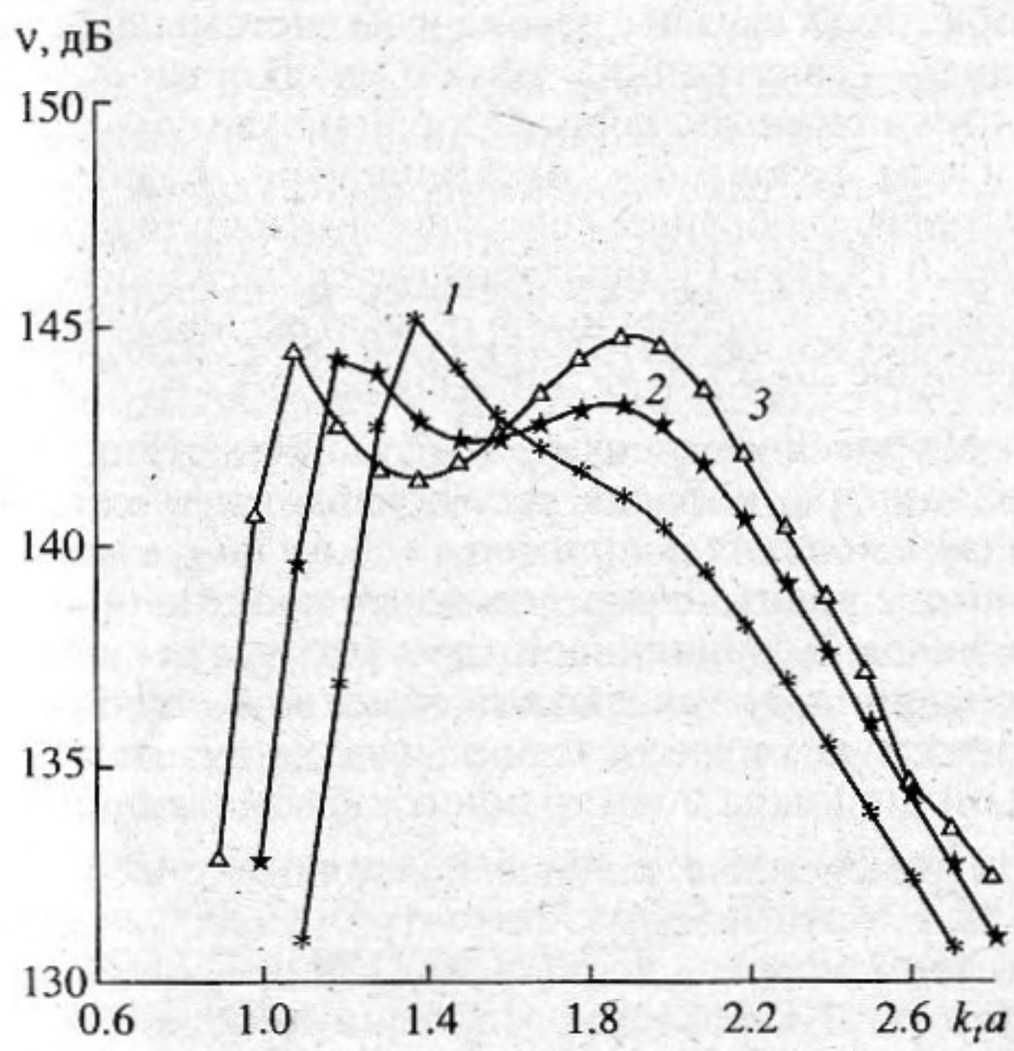

Рис. 4. Частотные характеристики чувствительности излучения, $h/a = 0.2$.

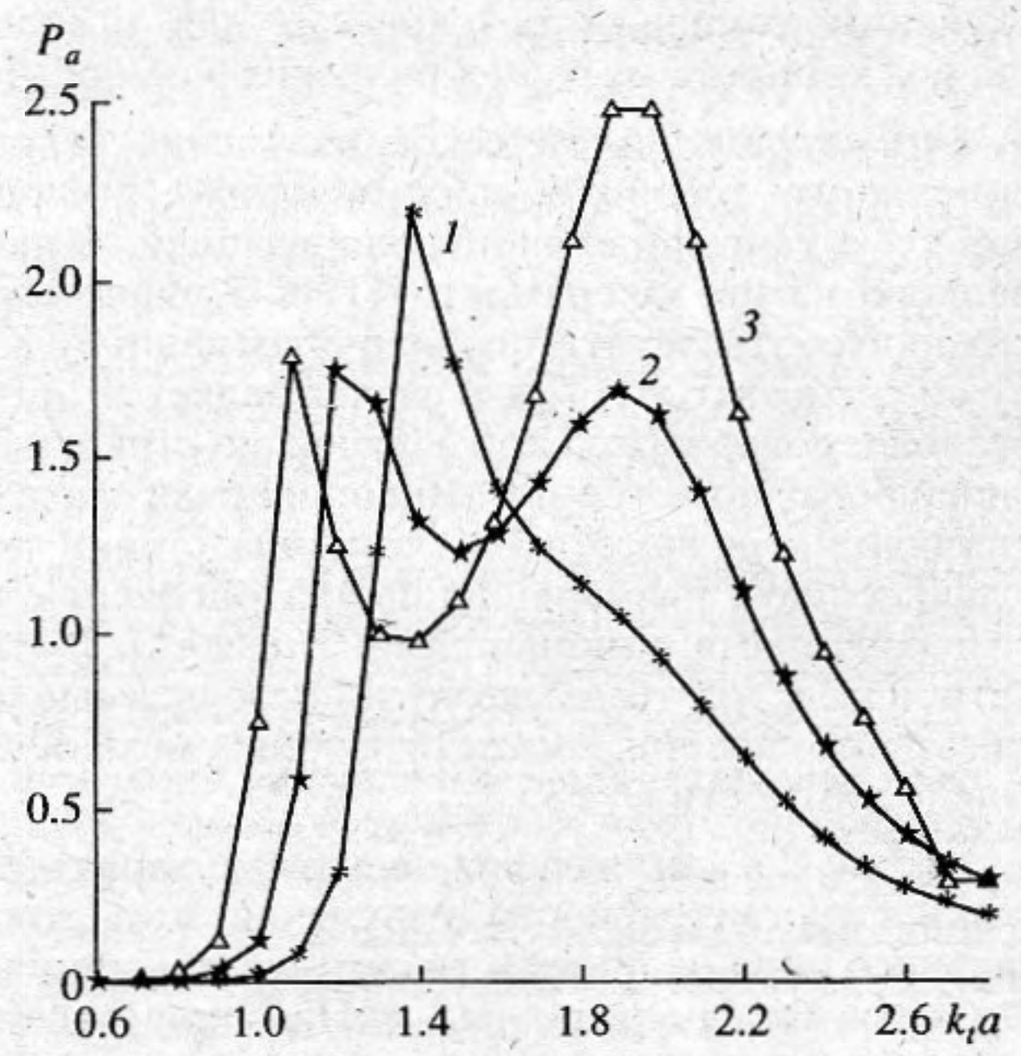

Рис. 5. Частотные характеристики безразмерной активной составляющей акустической мощности, $h/a = 0.2$.

Таким образом, совокупность системы уравнений (17), уравнений (6) и (16) определяет все характеристики ПП с учетом акустической нагрузки.

На основе изложенного алгоритма разработан пакет программ с использованием элементов второго порядка, дополняющий пакет программ МКЭ [3, 4], который позволяет анализировать ПП любой осесимметричной формы, состоящий из пьезоактивных и пассивных элементов при любом типе поляризации и произвольной форме электродов. Возможности пакета программ позволяют говорить о компьютерном моделировании ПП и оптимизации его параметров. Пакет программ проверен по известным численным и

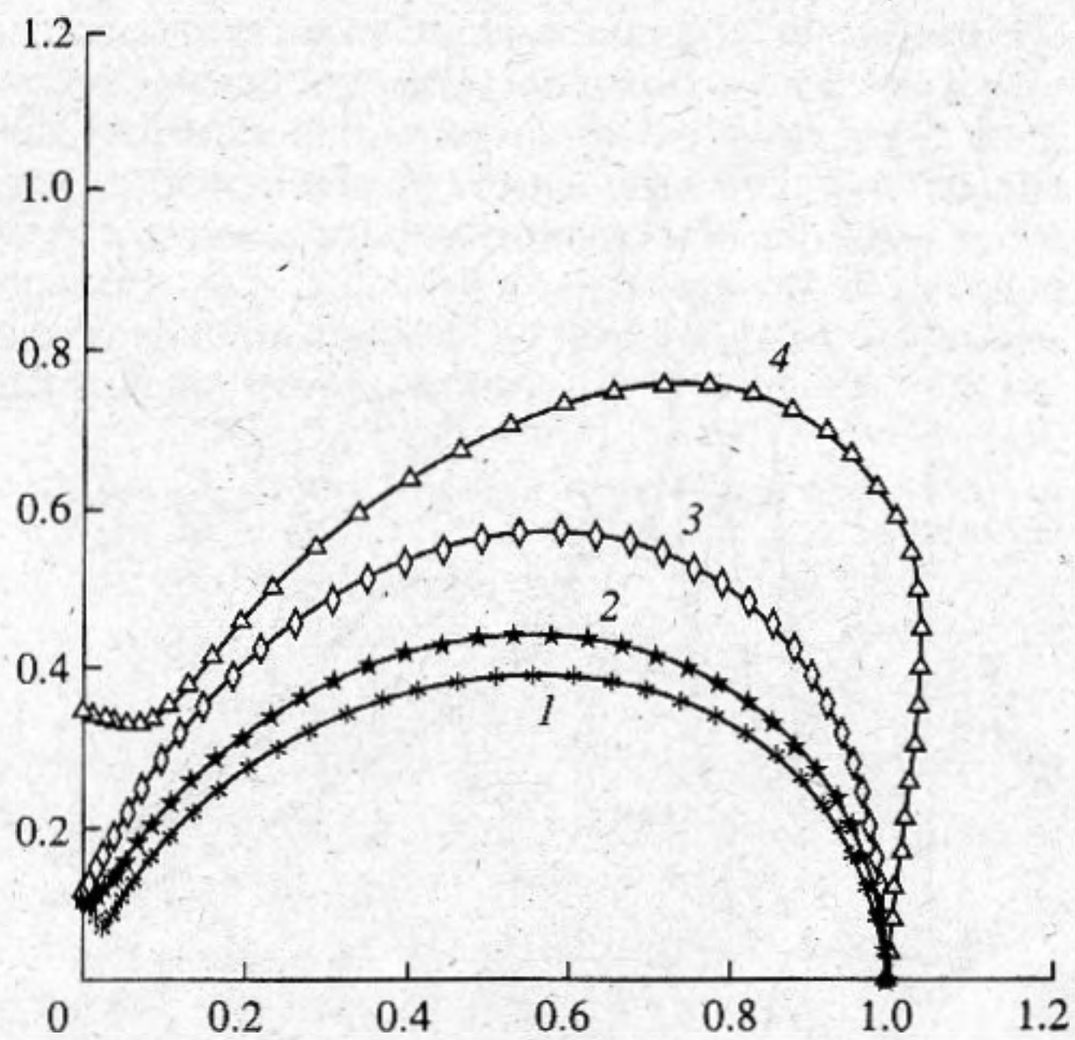

Рис. 6. Диаграммы направленности в вертикальной плоскости, $h/a = 0.15$; $l/a = 1.0$.

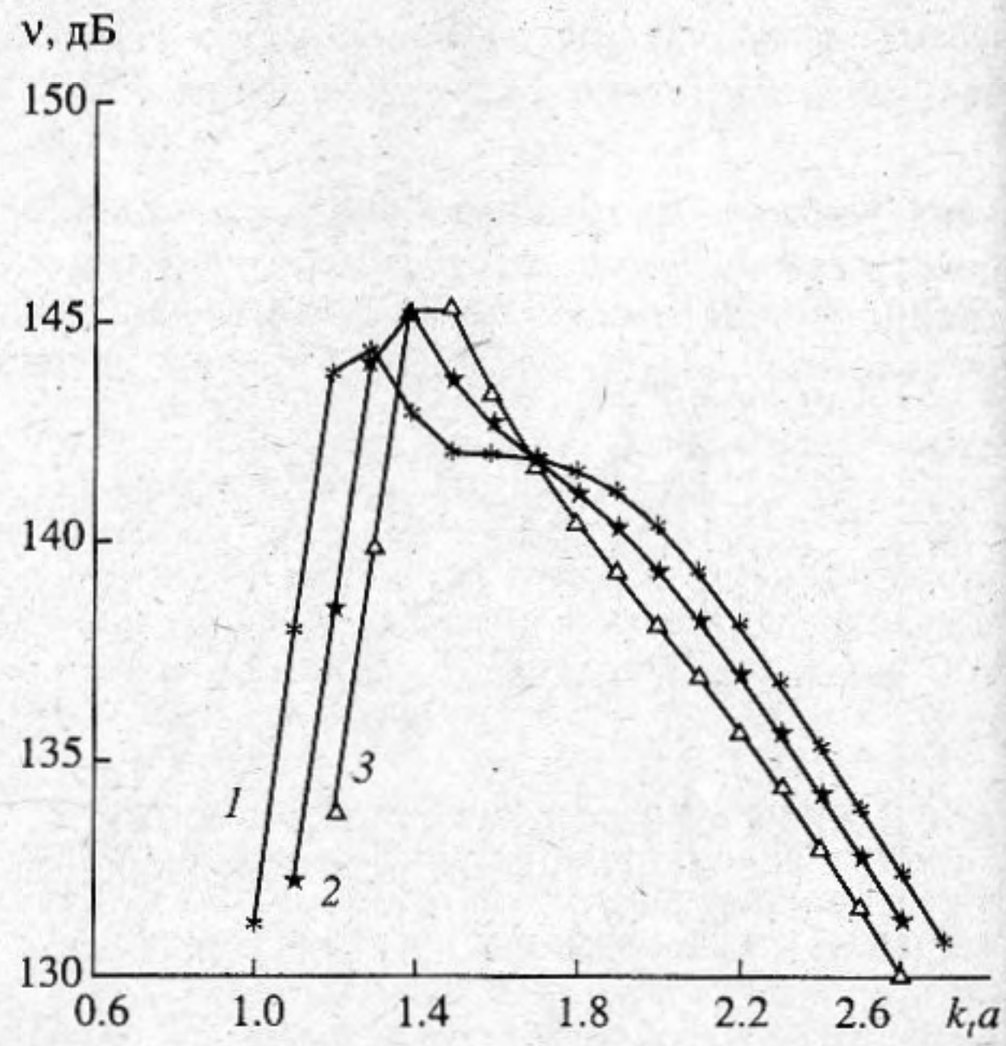

Рис. 7. Частотные характеристики чувствительности излучения коаксиальной системы, $h/a = 0.15$; $l_1/a = 1.0$.

экспериментальным результатам для пьезоцилиндра конкретных геометрических размеров [1].

Рассмотрим акустическое излучение водозаполненного (свободно-погруженного) пьезоцилиндра с тангенциальной поляризацией, выполненного из пьезокерамики ЦТБС-3, параметры которой соответствуют справочным данным. Как отмечено в статье [13], эта задача является "интересной и содержательной задачей акустики, имеющей богатую историю". Внешний радиус пьезоцилиндра – a, высота – l, толщина стенки – h; в дальнейшем размеры цилиндра определяются безразмерными отношениями: l/a и h/a. В расчетной модели учтены частотно-независимые механические потери, соответствующие механической добротности $Q = 35$.

На рис. 2 и 4 приведены частотные характеристики чувствительности излучения ν в точке дальнего поля на плоскости симметрии цилиндра (в дБ относительно уровня 1 мкПа/В при 1 м), а на рис. 3 и 5 – соответствующие частотные характеристики безразмерной активной составляющей акустической мощности P_a при фиксированных значениях толщины стенки цилиндра h/a и изменении его высоты l/a (кривые *1* – $l/a = 0.6$; *2* – $l/a = 0.8$; *3* – $l/a = 1.0$). По оси абсцисс отложен безразмерный частотный параметр $k_t a$, k_t – волновое число, $k_t = \omega/c_t$; c_t – скорость поперечной волны, $c_t^2 = c_{44}/\rho_1$; c_{44} – элемент матрицы упругих постоянных пьезокерамики при постоянном электрическом поле; ρ_1 – плотность пьезокерамики. Первый (низкочастотный) максимум на частотных характеристиках связан с резонансом системы пьезоцилиндр – внутренний объем жидкости – часть окружающей жидкости. Второй максимум – с радиальным резонансом пьезоцилиндра. Радиальный резонанс свободных колебаний пьезоцилиндра при $h/a = 0.15$, $l/a = 1.0$ характеризуется следующими величинами, вычисленными по выражениям (2) - (4): резонанс $k_t a = 1.8$, антирезонанс $k_t a = 2.2$, $k_d = 0.6$.

Из рис. 2 - 5 следует, что толщина стенки пьезоцилиндра, которая не учитывается в аналитических моделях (например, [17]) и слабо влияет на частоту радиального резонанса собственных колебаний пьезоцилиндра (при рассмотренном изменении h/a), оказывает заметное влияние на частотные характеристики связанных колебаний пьезоцилиндра и внутреннего объема жидкости.

Приведенные кривые позволяют обосновать выбор оптимальных геометрических размеров пьезоцилиндра для получения широкополосной частотной характеристики при ее заданной неравномерности.

На рис. 6 приведены нормированные диаграммы направленности в вертикальной плоскости при размерах пьезоцилиндра $h/a = 0.15$, $l/a = 1.0$ (кривая *1* – $k_t a = 1.0$; *2* – $k_t a = 1.5$; *3* – $k_t a = 2.0$; *4* – $k_t a = 2.5$).

Для тонкостенного ($h/a = 0.15$) и длинного пьезоцилиндра к его рабочей полосе частот может приблизиться вторая, слабо возбуждаемая изгибная мода [1, 3, 5], которая искажает его частотные характеристики: небольшая немонотонность при $k_t a \approx 2.3$, более заметная на рис. 3

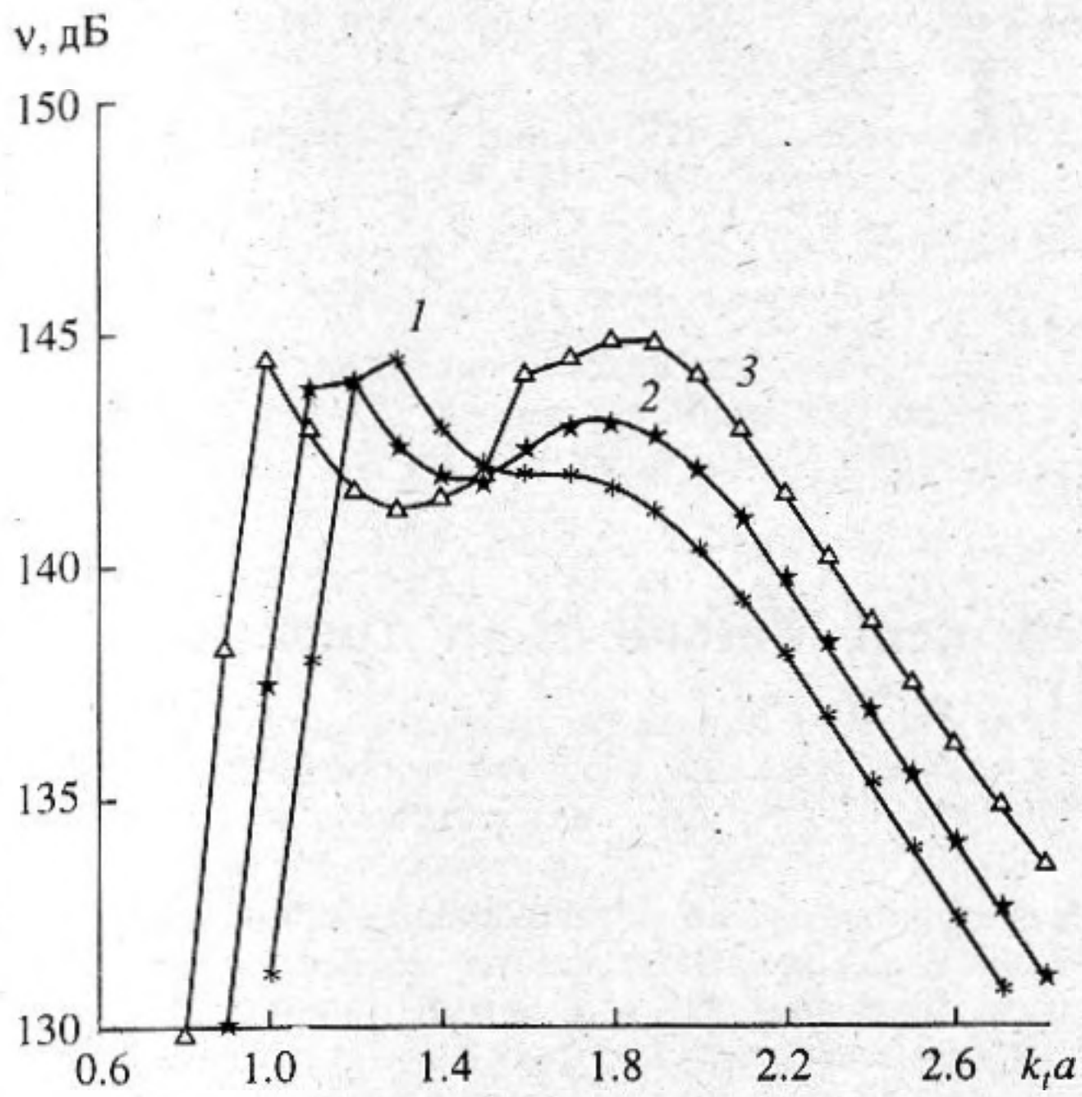

Рис. 8. Частотные характеристики чувствительности излучения коаксиальной системы, $h/a = 0.15$; $h_1/a = 0.1$.

(кривые $3 - l/a = 1.0$). Отметим, что аналитическая модель водозаполненного цилиндра [17], в которой используется программа SHIP, не учитывает изгибные моды, поэтому полученная этим методом информация является неполной.

Из рис. 2 - 5 следует, что оптимальным (в указанном смысле) является пьезоцилиндр с высотой $l/a \approx 1$. Однако, изготовление низкочастотного (крупногабаритного) секционированного пьезокерамического цилиндра такой высоты может вызвать определенные технологические трудности. Поэтому целесообразно исследовать возможности ПП в виде коаксиальной системы из двух более коротких пьезоцилиндров, разделенных щелью высотой h_1/a.

На рис. 7 приведены частотные характеристики чувствительности ν коаксиальной системы из двух одинаковых пьезоцилиндров в точке дальнего поля на плоскости симметрии системы (отметим, что пакет программ позволяет анализировать цилиндры разного радиуса) при $h/a = 0.15$ и общей фиксированной высоте двух цилиндров и щели между ними $l_1/a = 1.0$ ($l_1 = 2l + h_1$; кривая $1 - h_1/a = 0.1$; $2 - h_1/a = 0.2$; $3 - h_1/a = 0.3$). Из приведенных кривых следует, что полоса частот коаксиальной системы меньше, чем у одного пьезоцилиндра (при одинаковой общей высоте) и что с уменьшением высоты каждого цилиндра и увеличением высоты щели полоса частот уменьшается.

На рис. 8 приведены частотные характеристики чувствительности ν этой же коаксиальной системы при фиксированной высоте щели $h_1/a = 0.1$ и увеличении высоты пьезоцилиндров (общая высота $l_1/a \geq 1$, кривая $1 - l/a = 0.45$; $2 - l/a = 0.55$; $3 - l/a = 0.7$). Из рис. 8 следует, что увеличение высоты цилиндров коаксиальной системы увеличивает полосу частот и позволяет получить широкополосную характеристику при использовании пьезоцилиндров меньшей высоты, чем в случае одного цилиндра, но при большей общей высоте системы.

В заключение отметим, что анализ пьезоцилиндра, выполненного из пьезокерамики НБС-I, показывает, что его полоса частот примерно одинакова, а чувствительность – немного меньше по сравнению с пьезоцилиндром из керамики ЦТБС-3; качественного изменения частотных характеристик не происходит.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smith R.R., Hunt J.T., Barach D.* Finite element analysis of acoustically radiating structures with applications to sonar transducers // Journ. Acoust. Soc. Am. 1973. V. 54. № 5. P. 1277 - 1288.
2. *Boucher D., Lagier M., Maerfeld C.* Computation of the vibrational modes for piezoelectric array transducers using a mixed finite element-perturbation method // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. 1981. V. 28. № 5. P. 318 - 330.
3. *Балабаев С.М., Ивина Н.Ф.* Анализ собственных колебаний пьезокерамических цилиндров произвольных размеров // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 10. С. 37 - 41.
4. *Ивина Н.Ф.* Численный анализ собственных колебаний круглых пьезокерамических пластин конечных размеров // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 667 - 673.
5. *Балабаев С.М., Ивина Н.Ф.* Численный анализ собственных колебаний тангенциально поляризованных цилиндров - В кн.: Антенны и преобразователи. Владивосток: ДВГУ. 1988. С. 134 - 141.
6. *Балабаев С.М., Ивина Н.Ф.* Акустическое излучение конечных пьезопреобразователей в экране // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 2. С. 181 - 184.
7. *Kagawa Y., Yamabuchi T.* Finite element simulation of a composite piezoelectric ultrasonic transducer // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. 1979. V. 26. № 2. P. 81 - 88.
8. *Seybert A.F., Soenarko B., Rizzo F.J., Shippy D.J.* Application of BIE method to sound radiation problems using an isoparametric element // Trans. ASME: Journ. Vibr., Acoust., Stress and Reliab. Des. 1984. V. 106. № 3. P. 414 - 420.
9. *Everstine G.C., Henderson F.M.* Coupled finite element/boundary element approach for fluid-structure interaction // Journ. Acoust. Soc. Am. 1990. V. 87. № 5. P. 1938 - 1947.
10. *Jeans R.A., Mathews I.C.* Solution of fluid-structure interaction problems using a coupled finite element and variational boundary element technique // Journ. Acoust. Soc. Am. 1990. V. 88. № 5. P. 2459 - 2466.

11. *Hunt J.T., Knittel M.R., Barach D.* Finite element approach to acoustic radiation from elastic structures // Journ. Acoust. Soc. Am. 1974. V. 55. № 2. P. 269 - 280.

12. *Bossut R., Decarpigny J.-N.* Finite element modeling of radiating structures using dipolar damping elements // Journ. Acoust. Soc. Am. 1989. V. 86. № 4. P. 1234 - 1244.

13. *Вовк И.В.* Излучение звука конечной решеткой, состоящей из открытых цилиндрических пьезокерамических оболочек // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 427 - 434.

14. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с.

15. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.

16. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.

17. *Rogers P.H.* Mathematical model for a free-flooded piezoelectric cylinder transducer // Journ. Acoust. Soc. Am. 1986. V. 80. № 1. P. 13 - 18.

A Mixed Finite Element–Boundary Element Method in an Analysis of Piezoceramic Transducers

S. M. Balabaev and N. F. Ivina

A combination of the finite and boundary element methods is examined as a universal technique for the analysis of arbitrarily configured piezoceramic transducers. An analysis is undertaken of a free-flooded, tangentially polarized, piezoceramic cylinder varying in geometrical dimensions, and of a coaxial system of two identical cylinders.