АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 2, с. 179 - 182

УДК 534.22

СДВИГОВАЯ ПОВЕРХНОСТНАЯ ВОЛНА В СЛАБОНЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

© 1996 г. **М. В. Белубекян, А. Р. Мухсихачоян**

Институт Механики НАН Армении

375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-Б

Поступила в редакцию 10.01.95 г.

По методу медленно изменяющихся амплитуд получено волновое поле сдвиговых поверхностных волн, распространяющихся в слабонеоднородном по глубине упругом полупространстве. Получены условия существования этих волн и показано, что, задав неоднородность, можно управлять областью существования любых длин волн. Для конкретных неоднородностей приведены графические и численные исследования.

Исследование распространения поверхностных акустических волн в неоднородных твердых средах представляет в настоящее время быстро развивающуюся область прикладной физики. В основе функционирования большинства устройств обработки сигналов лежит взаимодействие поверхностных акустических волн с различного рода управляющими неоднородностями.

В книге [1] подробно рассмотрены процессы рассеяния, отражения и трансформации волн на локальных и периодических неоднородностях различного вида – выступов, канавок, поверхностных электродов, объемных включений, ребер клиньев и волноведущих структур. Как известно, поверхностные акустические волны могут вызвать не только поверхностные неоднородности вышеупомянутых типов, но и неоднородности по всему объему твердого упругого тела [2].

Проблеме распространения волн в подобных неоднородных средах посвящены немало работ. В этих работах исследуется распространение волн при конкретных законах неоднородности среды [2 - 6].

В настоящей работе исследуется вопрос распространения сдвиговой поверхностной волны (СПВ) в слабонеоднородных упругих средах.

В декартовой координатной системе xyz x – координата, совпадающая с направлением распространения СПВ, а y – координата, направленная в глубь полупространства. Слабая неоднородность среды заключается в том, что считаются медленно изменяющимся не только упругие характеристики рассматриваемой среды, но и амплитуда искомой волны, вследствие чего пренебрегается и второй производной амплитуды, и произведениями производных от амплитуд и от упругих характеристик. Пусть компоненты смещения имеют вид $u_x = u_y = 0$, $u = u_z(x, y) \neq 0$ и пусть плотность ρ и модуль сдвига μ являются переменными по глубине характеристиками рассматриваемой упругой изотропной среды. Тогда уравнение движения для неоднородного полупространства записывается в форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu(y)}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{1}{c^2(y)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

где $c(y) = [\mu(y)/\rho(y)]^{1/2}$ – переменная скорость сдвиговой объемной волны. Будем искать решение уравнения в виде

$$u = \varphi(y)\exp[i(kx - \omega t)],$$

где $\varphi(y)$ – неизвестная функция. Тогда уравнение (1) приводится к виду

$$\mu^{-1}(y)[\mu(y)\varphi'(y)]' - k^2(1 - \eta)\varphi(y) = 0; \qquad (2)$$

здесь $\eta = \eta(y) = v_\Phi^2/c^2(y)$, $v_\Phi = \omega/k$ – фазовая скорость СПВ.

Будем искать решение уравнения (2) по методу медленно изменяющихся амплитуд [3], для чего представим функцию $\varphi(y)$ в виде

$$\varphi(y) = A(y)\exp\left[-k\int_0^y \sqrt{1 - \eta(\xi)}\,d\xi\right]. \qquad (3)$$

Здесь считается, что $A(y)$ слабо изменяющаяся по y функция, т.е. пренебрежимы $A''(y)$, $\mu'(y)A'(y)$ и т.д. С учетом условия затухания волны на бесконечности

$$0 < \eta(y) < 1 \qquad (4)$$

и удовлетворением (3) уравнению (2) с точностью допущения слабо изменяющихся функций, окончательно получим решение в виде

$$u = B\exp\left[-k\int_0^y \sqrt{1 - \eta(\xi)}\,d\xi\right]\frac{\exp[i(kx - \omega t)]}{\mu^{1/2}(y)\,[1 - \eta(y)]^{1/4}}. \qquad (5)$$

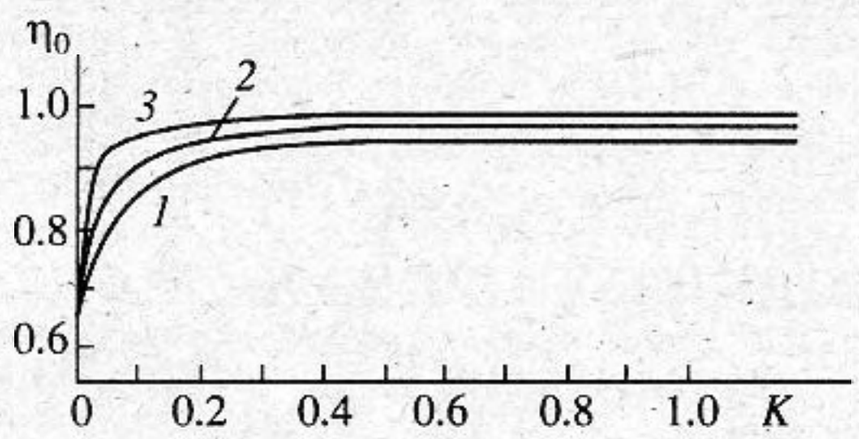

Рис. 1. Дисперсионные кривые в случае выполнения условий А). *1* – $\varepsilon_2 = 0.02$; *2* – $\varepsilon_2 = 0.01$; *3* – $\varepsilon_2 = 0.002$.

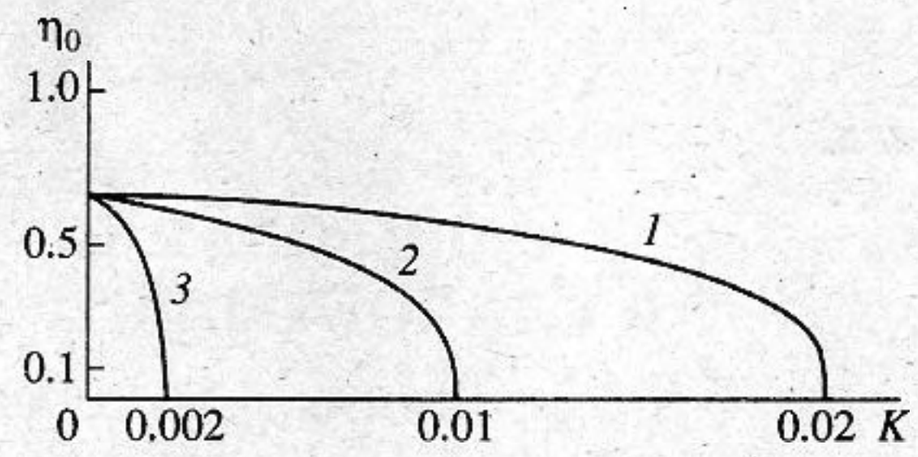

Рис. 2. Дисперсионные кривые в случае выполнения условий Б). *1* – $\varepsilon_2 = -0.02$; *2* – $\varepsilon_2 = -0.01$; *3* – $\varepsilon_2 = -0.002$.

Решение (5) должно удовлетворять граничному условию отсутствия сдвиговых напряжений на плоскости $y = 0$, т.е.

$$\partial u/\partial y|_{y=0} = 0. \tag{6}$$

Производя вычисления, получим дисперсионное уравнение для нахождения фазовой скорости v_Φ:

$$L(\eta_0) = 2k\frac{\mu_0}{\mu_0'}(1-\eta_0)^{3/2} + \left(\frac{c_0'}{c_0}\frac{\mu_0}{\mu_0'} - 1\right)\eta_0 + 1 = 0, \tag{7}$$

где

$$\eta_0 = \eta(0), \mu_0 = \mu(0), c_0 = c(0).$$

В это уравнение входят параметры среды и их первые производные только при $y = 0$, т.е. фазовая скорость не зависит от "формы" объемных неоднородностей. Это следствие как сильных требований на "слабость" неоднородностей, так и того, что искомая волна локализована вблизи поверхности.

Таким образом, дисперсионное уравнение позволит выводить условия существования СПВ, распространяющихся в слабонеоднородном упругом полупространстве. Уравнение (7) будет иметь решение, если функция $L(\eta_0)$, являющаяся монотонной, на краях области своего определения ($0 < \eta_0 < 1$) принимает значения противоположных знаков. Исходя из этого соображения, условия существования волны запишутся следующим образом:

А) Если $\mu_0(\mu_0')^{-1} > 0$ и $c_0'c_0^{-1} < 0$, то могут распространяться СПВ любой длины.

Б) Если $\mu_0(\mu_0')^{-1} < 0$ и $c_0'c_0^{-1} \geq 0$, то могут распространяться СПВ длиною $k < k_* = -\mu_0'(2\mu_0)^{-1}$.

В) Если $\mu_0(\mu_0')^{-1} < 0$ и $c_0'c_0^{-1} < 0$, то могут распространяться СПВ длиною $k < k_*$.

Если не выполняется ни одно из перечисленных условий, то среда не допускает существования СПВ.

Необходимо отметить, что в пределе при $k \longrightarrow 0$ (а это возможно лишь только в случаях А) и Б)), фазовая скорость становится равной

$$v_\Phi = v_0 = c_0\left[1 - (c_0'\mu_0)(c_0\mu_0')^{-1}\right]^{-1/2}. \tag{8}$$

Для наглядности рассмотрим конкретные примеры слабонеоднородных сред.

Исследуем распространение СПВ в периодической слабонеоднородной среде. Пусть плотность и модуль сдвига среды изменяются по следующим законам:

$$\rho = \rho_0(1 + \varepsilon_1 \sin \pi y/l),$$
$$\mu = \mu_0(1 + \varepsilon_2 \sin \pi y/l) \tag{9}$$

с условием

$$0 < \varepsilon_{1,2} \ll 1, \tag{10}$$

где ρ_0, μ_0 – соответствующие значения ρ и μ на границе $y = 0$, а l – период изменения неоднородности по глубине полупространства. Нетрудно убедиться в том, что для среды, характеристики которой заданы в виде (9), (10), выполняются условия существования волны А), если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Дисперсионное уравнение (7) в рассматриваемом случае примет вид

$$K(1-\eta_0)^{3/2} - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\eta_0}{2} + \varepsilon_2 = 0, \tag{11}$$

где

$$K = 2kl/\pi.$$

Предположим, что $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ и рассмотрим дисперсионные кривые для трех значений ε_2 (рис. 1). Если длина поверхностной волны велика по сравнению с периодом неоднородностей ($K \longrightarrow 0$), то фазовая скорость стремится к значению $v_0 = (2/3)^{1/2}c_0$, а если длина поверхностной волны намного меньше периода неоднородностей ($K \longrightarrow \infty$), то фазовая скорость, монотонно возрастая, асимптотически стремится к значению c_0. Предполагая $\varepsilon_1 = 5\varepsilon_2$, для тех же значений ε_2 приведем таблицу зависимости $\eta_0(K)$ (табл. 1). Из нее видно, что с возрастанием K

Таблица 1

$\varepsilon_2 = 0.02$	K	0.0639	0.1490	0.3897	1.2120	3.1829	79.1800
	η_0	0.6013	0.7138	0.8218	0.9070	0.9487	0.9932
$\varepsilon_2 = 0.01$	K	0.0320	0.0745	0.1948	0.6060	1.5914	39.5900
	η_0	0.6013	0.7138	0.8218	0.9070	0.9487	0.9932
$\varepsilon_2 = 0.002$	K	0.0064	0.0150	0.0390	0.1212	0.3183	7.9180
	η_0	0.6013	0.7138	0.8218	0.9070	0.9487	0.9932

Таблица 2

$\varepsilon_2 = -0.02$	K	0.0182	0.0163	0.0140	0.0103	0.0034	0.0004
	η_0	0.0547	0.1011	0.1500	0.2133	0.2998	0.3293
$\varepsilon_2 = -0.01$	K	0.0091	0.0096	0.0070	0.0051	0.0017	0.0002
	η_0	0.0547	0.1011	0.1500	0.2133	0.2998	0.3293
$\varepsilon_2 = -0.002$	K	0.0018	0.0019	0.0014	0.0010	0.0003	0.0000
	η_0	0.0547	0.1011	0.1500	0.2133	0.2998	0.3293

Таблица 3

$\varepsilon_2 = 0.02$	K	0.0222	0.0383	0.0662	0.1186	0.2508	0.5969
	η_0	0.0985	0.4534	0.6543	0.7805	0.8737	0.9316
$\varepsilon_2 = 0.01$	K	0.0111	0.0191	0.0331	0.0593	0.1254	0.2984
	η_0	0.0985	0.4534	0.6543	0.7805	0.8737	0.9316
$\varepsilon_2 = 0.002$	K	0.0022	0.0038	0.0066	0.0118	0.0251	0.0597
	η_0	0.0985	0.4534	0.6543	0.7805	0.8737	0.9316

η_0 также возрастает, начиная со значения $\eta_0^* = 1/3$ и приближается к 1.

Теперь рассмотрим упругие характеристики слабонеоднородной среды (9) с условием

$$-1 \ll \varepsilon_{1,2} < 0. \tag{12}$$

Легко заметить, что при $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$ выполняются условия существования СПВ Б), т.е. в данной неоднородной среде могут распространяться волны только определенной длины при $k < k_*$. Тогда дисперсионное уравнение (7) запишется в виде (11) с учетом (12). В этом случае также графическое исследование дисперсионных кривых приведено для случая $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$. Из графика (рис. 2) видно, что в данной среде могут распространяться волны, длина которых определяется условием $0 < K < -\varepsilon_2$. Фазовая скорость этих волн с возрастанием K монотонно убывает, начиная со значения $v_0 = (2/3)^{1/2} c_0$ ($\eta_0^* = 2/3$). Действительно, заметим, что в уравнении (11) при предельном переходе $\eta_0 \longrightarrow 0$ получим $K = -\varepsilon_2$. Численное исследование зависимости $\eta_0(K)$ в случае $\varepsilon_1 = 5\varepsilon_2$ приведено в табл. 2.

Исследуя вопрос существования СПВ для среды (9) условиями

$$0 \leq \varepsilon_1 \ll 1, -1 \ll \varepsilon_2 < 0, \tag{13}$$

убедимся в том, что в данном случае удовлетворяются условия существования волны B). Среда допускает распространение поверхностной волны меньше определенной длины $K > -\varepsilon_2$. Из графиков, приведенных на рис. 3 для трех значений ε_2 при $\varepsilon_1 = 0$), видно, что все три дисперсионные кривые, начинаясь со значений $K = -\varepsilon_2$, монотонно возрастают и стремятся к 1, когда длина СПВ становится намного меньше периода неоднородностей ($K \longrightarrow \infty$). Численное исследование (табл. 3) при $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ подтверждает вышеприведенные графические результаты.

Исследован другой типичный вариант слабонеоднородной среды:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_\infty [1 + \varepsilon_1 \exp(-y/y_\infty)], \\ \mu &= \mu_\infty [1 + \varepsilon_2 \exp(-y/y_\infty)], \end{aligned} \tag{14}$$

где y_∞ – характерная глубина неоднородности, $\varepsilon_1 = \Delta\rho/\rho_\infty$, $\varepsilon_2 = \Delta\mu/\mu_\infty$, а ρ_∞ и μ_∞ соответствующие значения ρ и μ на большой глубине. При условиях (12) получаются такие же результаты, что и для исследованной среды, но с условиями (10). При усло-

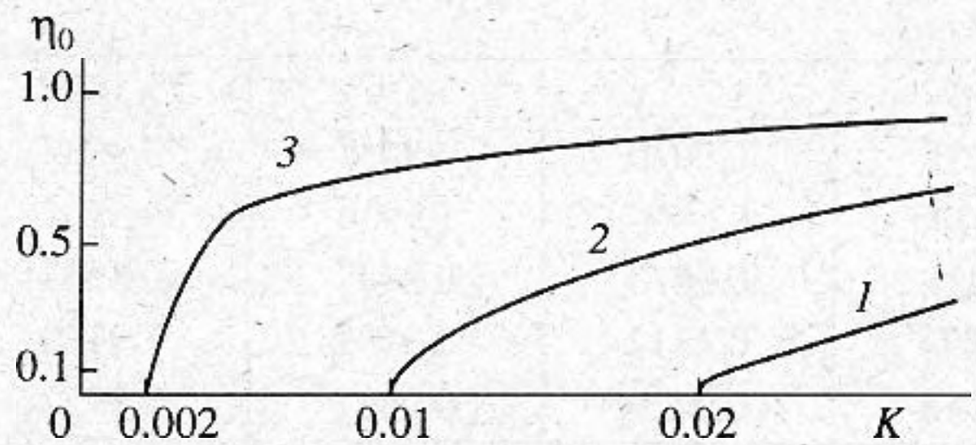

Рис. 3. Дисперсионные кривые в случае выполнения условий В). *1* – $\varepsilon_2 = 0.02$; *2* – $\varepsilon_2 = 0.01$; *3* – $\varepsilon_2 = 0.002$.

виях (10) получаются те же результаты, что и для среды (9), но с условиями (12). При условиях

$$-1 \ll \varepsilon_1 < 0, \ 0 \le \varepsilon_2 \ll 1 \qquad (15)$$

результаты совпадают с результатами для среды (9), но с условиями (13).

Случай неоднородности (14) с условиями (13) исследован также в работе [2] при пренебрежении членом $\mu'(y)\partial u/\partial y$ в уравнении (1). Из полученного таким образом приближенного решения следует, что в этом случае СПВ существует, что противоречит результатам настоящей работы. Возможно, это объясняется тем, что пренебрегаемый член работы [2] здесь частично учитывается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991, С. 415.
2. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. С. 288.
3. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухорукова А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. С. 383.
4. *Bakirtas I., Maugin G.A.* Ondes de surfase SH pures on elasticite inhomogene // Journ. de Mecanique theorique et appliquee. 1982. V. 1. № 6. P. 995 - 1013.
5. *Maugin G.A.* Elastic Surface Waves With Transverse Horizontal Polarization // Advances In Applied Mechanics. V. 23. P. 373 - 434.
6. *Bhattacharya S.H.* Exact solutions of SH wave equation in transversely isotropic inhomogeneous elastic media // Pure and Appl. Geophys. 1971. V. 93. № 1. P. 19 - 35.

Shear Surface Waves in Weakly Inhomogeneous Elastic Media

M. V. Belubekyan and A. R. Mukhsikhachoyan

The wave field of shear surface waves propagating in a weakly inhomogeneous elastic half-space was obtained by the method of slowly varying amplitudes. Conditions allowing the propagation of these waves were determined. It was shown that specification of the inhomogeneity permits control over the propagation of waves of any wavelengths. Certain specific inhomogeneities were studied graphically and numerically.