АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 3, с. 426–431

УДК 534.21

ОЦЕНКА УГЛОВЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ЗВУКА ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ КОЛЕБАНИЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

© 1996 г. В. Б. Степанов

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 01.03.95 г.

Предложена модель излучения звука колеблющимся телом, позволяющая определить угловые зависимости распределения интенсивности по энергетической пространственно-волновой спектральной плотности скорости вибрации излучающей поверхности. Полученные оценки удовлетворительно совпадают с расчетом по формуле Гельмгольца–Гюйгенса, учитывающей фазовую структуру виброакустического поля.

В ряде задач акустики возникает необходимость расчета углового распределения интенсивности I звукового поля, излучаемого колеблющимся телом. Для этого в точке наблюдения требуется знать величину давления p и радиальной составляющей скорости колебания $v_r = -\frac{1}{j\omega\rho}\partial p/\partial r$ частиц среды, поскольку

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(pv_r^*), \tag{1}$$

где r – радиус-вектор, связывающий "центр излучения" тела и точку наблюдения. Обычно величина p и v_r вычисляется при помощи интеграла Гельмгольца–Гюйгенса [1] по известному распределению амплитуды и фазы нормальной скорости v_{ns} и давления p_s на излучающей поверхности:

$$p(M) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_s\left\{z_s\left(\frac{1}{r}+jk\right)\times\right.$$
$$\left.\times\cos(\widehat{n,r_s})-j\omega\rho\right\}v_{ns}\frac{e^{-jkr}}{r}, \tag{2}$$

где $z_s = p_s/v_{ns}$ – импеданс нагрузки поверхности внешней средой, $\widehat{n,r_s}$ – угол между внешней нормалью в рассматриваемой точке поверхности и радиусом-вектором, соединяющим эту точку с точкой наблюдения. Вычисления подобного рода проделаны, например, С.Н. Ржевкиным [2]. Однако в ряде важных практических случаев определение пространственного распределения фазы колебания излучающей поверхности становится затруднительным. Так бывает, например, в случае наличия неоднородностей конструкции (оребренные пластины, оболочки) и ее колебания в полосе частот. При этом колебания обычно характеризуют энергетическими параметрами: интенсивностью, функцией пространственной автокорреляции $B(\Delta x)$ и связанной с ней преобразованием Фурье пространственно-волновой спектральной энергетической плотностью [3]

$$w(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}B(\Delta x)e^{-j\xi\Delta x}d(\Delta x).$$

Поэтому представляет интерес оценка углового распределения интенсивности звукового поля по энергетическим характеристикам вибрации конструкции.

Рассмотрим конструкцию с одномерным распределением нормальной компоненты v_{ns} скорости колебания поверхности вдоль прямолинейной координаты x. Пусть это будет, например, круговая цилиндрическая оболочка длиной l и радиусом R, совершающая осесимметричные колебания. Со стороны торцов к оболочке примыкают жесткие полубесконечные цилиндрические экраны, являющиеся ее продолжением так, что на поверхности экранов выполняется соотношение $v_{ns}(x) = 0$. Полная звуковая мощность, излученная оболочкой в окружающую среду, составляет

$$W = \frac{1}{2}\mathrm{Re}z_s\iint\limits_s v_{ns}^2 ds = \frac{1}{2}R_s\iint\limits_s v_{ns}^2 ds,$$

где R_s – активная часть (сопротивление излучения) импеданса нагрузки z_s, усредненного по по-

верхности оболочки. Определим угловое распределение мощности W в плоскости, проходящей через продольную ось x оболочки, на основе следующей модели излучения. Средняя по поверхности оболочки $s_{об} = 2\pi Rl$ величина $\overline{v_{ns}^2}$ может быть найдена по формуле [3]

$$\overline{v_{ns}^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} w(\xi)d\xi, \qquad (3)$$

где

$$w(\xi) = \int_{-l}^{l} B(\Delta x)e^{-j\xi\Delta x}d(\Delta x),$$

либо

$$w(\xi) = \frac{|s(\xi)|^2}{l}$$

– положительная функция, симметричная относительно $\xi = 0$,

$$s(\xi) = \int_{-l/2}^{l/2} v_{ns}(x)e^{-j\xi x}dx$$

– спектральная амплитудная плотность пространственного распределения скорости вибрации, ξ – волновое число бесконечных (вдоль оси x) пространственных гармонических составляющих $dv_{ns} = dce^{j(\omega t \pm \xi x)}$ разложения скорости, причем $dc = \frac{1}{2\pi}s(\xi)d\xi$. Соотношение (3) позволяет определить долю величины $\overline{v_{ns}^2}$, формируемую пространственными составляющими, волновые числа которых лежат в узком интервале $\delta\xi = \xi_2 - \xi_1$:

$$\overline{v_{ns}^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{\xi_1}^{\xi_2} w(\xi)d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\xi_2}^{-\xi_1} w(\xi)d\xi. \qquad (4)$$

Первый интеграл соответствует гармоническим составляющим (волнам) скорости, бегущим в положительном направлении вдоль оси x, второй – в отрицательном направлении. Данные компоненты скорости возбуждают в примыкающей среде волны, распространяющиеся под углами $\gamma_1 = \arccos\xi/k$ и $\xi_2 = \pi - \arccos\xi/k$ к оси x, где $k = \omega/c$ – волновое число в среде [4]. (В случае $\xi > k$ эти волны, являясь неоднородными, затухают вблизи от излучающей поверхности.) "Положительные" и "отрицательные" составляющие скорости излучают одинаковую акустическую мощность, равную

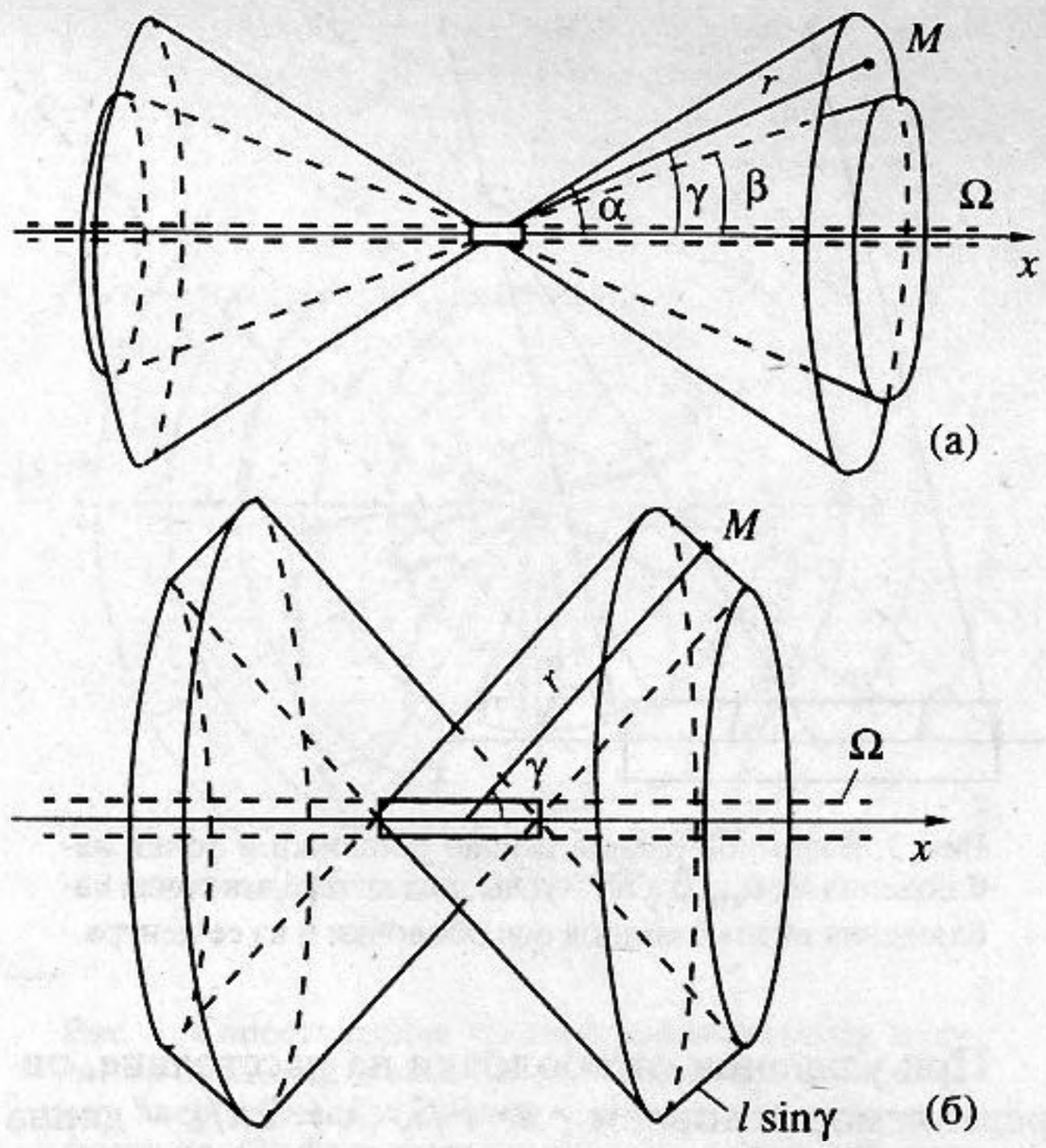

Рис. 1. К определению поверхности, по которой распределяется излученная оболочкой звуковая мощность: а) в дальней зоне, б) на близких расстояниях; M – точка наблюдения Ω – жесткий цилиндрический экран.

$$W(\delta\xi) = \frac{1}{2}s_{об}R_s(\bar{\xi})\overline{v_{ns}^2}(\delta\xi) = \frac{1}{4\pi}s_{об}R_s(\bar{\xi})\int_{\xi_1}^{\xi_2} w(\xi)d\xi, \qquad (5)$$

где $R_s(\bar{\xi})$ – сопротивление излучения бесконечной пространственной составляющей скорости с волновым числом $\bar{\xi} = (\xi_1 + \xi_2)/2$, определяемое по формулам для бесконечной оболочки [1]. Такое приближение в определении величины $R_s(\bar{\xi})$ выполняется тем точнее, чем больше удлинение оболочки l/R. (Например, в случае $k/\xi = 1.5$ и $\xi R \simeq 1$ импеданс излучения ограниченной цилиндрической области становится близким к импедансу области бесконечной при $l/R \simeq 10$, [5]). Следует также учитывать, что результатом данного приближения является существенное возрастание величины R_s при углах скольжения, близких к $\gamma \simeq 0, \pi$ ($\xi/k \simeq 1$) [1, 4]. Поэтому окрестные к указанным углам области (шириной 5°–10°) должны быть исключены из рассмотрения во избежание появления ложных максимумов излучения.

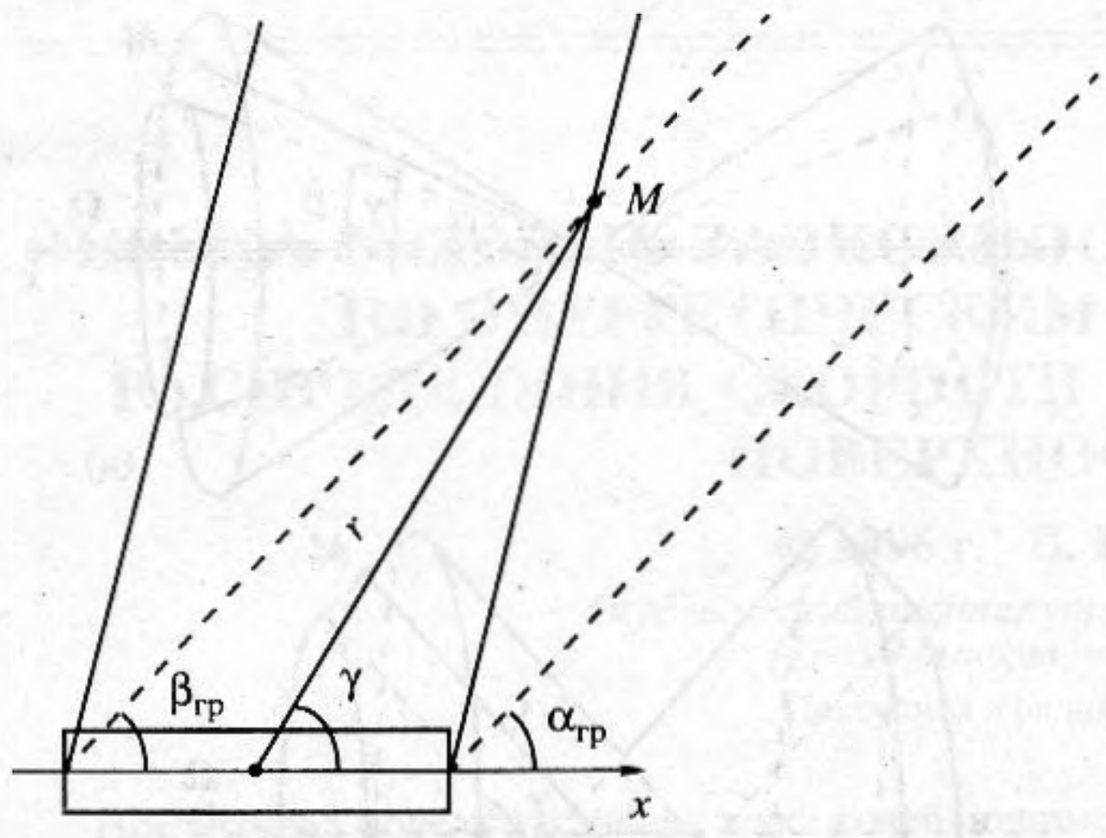

Рис. 2. Взаимное расположение оболочки и точки наблюдения M; $\alpha_{гр}$, $\beta_{гр}$ и γ – углы, под которыми точка наблюдения видна с концов оси оболочки и из ее центра.

При удалении от оболочки на расстояние, определяемое условием $r \gg l^2/\lambda$ ($\lambda = 2\pi/k$ – длина волны в среде), она, как и точечный источник, излучает сферическую волну [6]. Благодаря этому звуковое поле в удаленных точках формируется путем распределения мощности (5) по части сферической поверхности $s_{сф} = 2\pi r^2(\cos\beta - \cos\alpha)$, ограниченной телесным углом $0 \le \varphi \le 2\pi$ с раскрытием $\alpha - \beta$: ($\alpha = \arccos\xi_1/k$, $\beta = \arccos\xi_2/k$), в который происходит излучение (см. рис. 1а). Здесь r – радиус-вектор, проведенный из геометрического центра оболочки в точку наблюдения, φ – угол, отсчитываемый в окружном направлении относительно оси x. Интенсивность звука на поверхности $s_{сф}$ составляет

$$I(r) = \frac{W(\delta\xi)}{s_{сф}} = \frac{s_{об}R_s(\bar{\xi})}{2\pi s_{сф}}\int_{\xi_1}^{\xi_2} w(\xi)d\xi, \qquad (6)$$

Выбрав $\delta\xi$ достаточно малым с тем, чтобы выполнялось условие

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} w(\xi)d\xi = w(\bar{\xi})\delta\xi \qquad (7)$$

и учитывая, что $\cos\beta = \xi_2/k$, $\cos\alpha = \xi_1/k$, можно получить окончательное выражение для расчета углового распределения интенсивности излученного поля в плоскости оси x:

$$I(r,\gamma) = \frac{Rlk}{2\pi r^2}R_s(k\cos\gamma)w(k\cos\gamma), \qquad (8)$$

где $\cos\gamma = \xi/k$, γ – угол между осью x и радиусом-вектором r. Расчетные оценки показывают, что для распределения скорости колебания вдоль оболочки вида $v_{ns}(x) \sim \sin(m\pi x/l)$, $\cos(m\pi x/l)$ соотношение (7) выполняется при условии $\cos\delta\xi l \simeq 1$, $\sin\delta\xi l \simeq \delta\xi l$, или, с точностью порядка 10%,

$$\delta\xi l \le 0.45. \qquad (9)$$

Это условие является достаточным и при более сложном характере вибрации оболочки.

Величина $\delta\xi = \xi_2 - \xi_1$ зависит от расстояния, на котором находится точка наблюдения, и определяется разностью углов, под которыми точка наблюдения видна с концов оси оболочки (см. рис. 2):

$$\delta\xi = k(\cos\beta_{гр} - \cos\alpha_{гр}),$$

где

$$\alpha_{гр} = \gamma + \operatorname{arctg}\frac{\frac{l}{2r}\sin\gamma}{1 - \frac{l}{2r}\cos\gamma},$$
$$\beta_{гр} = \gamma - \operatorname{arctg}\frac{\frac{l}{2r}\sin\gamma}{1 + \frac{l}{2r}\cos\gamma}. \qquad (10)$$

Наибольшее изменение величины $\delta\xi$ при изменении угла γ происходит в окрестности его значения $\gamma \simeq \pi/2$, с учетом чего получается:

$$\alpha_{гр} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} l/2r, \quad \beta_{гр} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} l/2r,$$
$$\delta\xi = 2k\sin(\operatorname{arctg} l/2r).$$

Подстановка данной величины $\delta\xi$ в формулу (9) дает:

$$\frac{r}{l} \ge \frac{1}{2}\operatorname{ctg}(\arcsin 0.225/kl). \qquad (11)$$

Соотношение (11) определяет условие, при котором угловой размер оболочки, наблюдаемой из точки M, становится столь малым, что интеграл от функции $w(\xi)$ может быть заменен ее точечным отсчетом. Благодаря этому форма угловой характеристики (8) перестает изменяться при последующем увеличении расстояния до точки наблюдения, что свойственно дальней зоне излучения.

Сопоставим полученную энергетическую оценку (11) расстояния до дальней зоны с классической оценкой $r \gg l^2/\lambda$, или $r \ge 10l^2/\lambda$. Например, для оболочки длиной $l = 1.2$ м радиусом $R = 0.4$ м с толщиной стенки $h = 4 \times 10^{-3}$ м в воде для формы колебания $v_{ns} = V_n\sin(m\pi x/l)$ при $m = 1$ получается: $f = 433$ Гц, $\lambda = 3.45$ м, $kl = 2.18$, $r_{кл} = 10l^2/\lambda = 4.2$ м, $r_э = \frac{l}{2}\operatorname{ctg}(\arcsin 0.225/kl) = 5.8$ м; при $m = 3$ – $f = 721$ Гц, $\lambda = 2.08$ м, $kl = 3.62$, $r_{кл} = 6.9$ м, $r_э = 9.6$ м.

Имея одинаковый порядок величины, полученные оценки расходятся незначительно.

На расстояниях $r_{бл}$, меньших определяемых условием (11), угловой размер оболочки не может считаться малым, что обусловливает необходимость суммирования в точке наблюдения M излучения оболочки в интервале углов $\beta_{гр}$–$\alpha_{гр}$ (см. рис. 2). Учитывая, что граничным углам соответствуют волновые числа $\xi_{1,гр} = k\cos\alpha_{гр}$, $\xi_{2,гр} = k\cos\beta_{гр}$ и считая, что излученная оболочкой акустическая мощность распределяется вблизи от нее по поверхности вращения $s_{вр} = 2\pi r l \sin^2\gamma$ с плоской образующей $l\sin\gamma$, перпендикулярной радиусу-вектору r (см. рис. 1б), можно определить интенсивность поля на расстоянии $r_{бл}$:

$$I(r_{бл}, \gamma) = \frac{RR_s(\bar{\xi})}{4\pi r_{бл}\sin^2\gamma}\int_{\xi_{1,гр}}^{\xi_{2,гр}} w(\xi)d\xi, \qquad (12)$$

где $\bar{\xi} = \dfrac{\xi_{1,гр} + \xi_{2,гр}}{2} = k\cos\gamma$.

Применение формулы (12) правомерно на расстояниях от оболочки, где несущественно влияние неоднородных волн. Учитывая выражения (7) и (10), можно показать, что при $r \gg l$ формула (12) переходит в (8). На рис. 3 в качестве примера сопоставлены уровни интенсивности звукового поля рассматриваемой оболочки в воздухе, рассчитанные по полученным энергетическим формулам (8), (12) и на основании формулы Гельмгольца–Гюйгенса (2) с учетом соотношения (1). Нормальная компонента скорости колебания боковой поверхности оболочки задавалась в виде $v_{ns} = V_n\sin(m\pi x/l)$. В этом случае спектральная энергетическая плотность распределения имеет вид:

$$w(\xi) = \frac{4}{l}\left(\frac{\frac{m\pi}{l}\cos\xi l/2}{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - \xi^2}\right)^2$$

– для нечетных m и

$$w(\xi) = \frac{4}{l}\left(\frac{\frac{m\pi}{l}\sin\xi l/2}{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - \xi^2}\right)^2$$

– для четных m. Вид функции $w(\xi)/l$ показан на рис. 4. Совпадение энергетического расчета и расчета, учитывающего фазовую структуру виброакустического поля оболочки, удовлетворительное. Энергетический расчет позволяет достаточно точ-

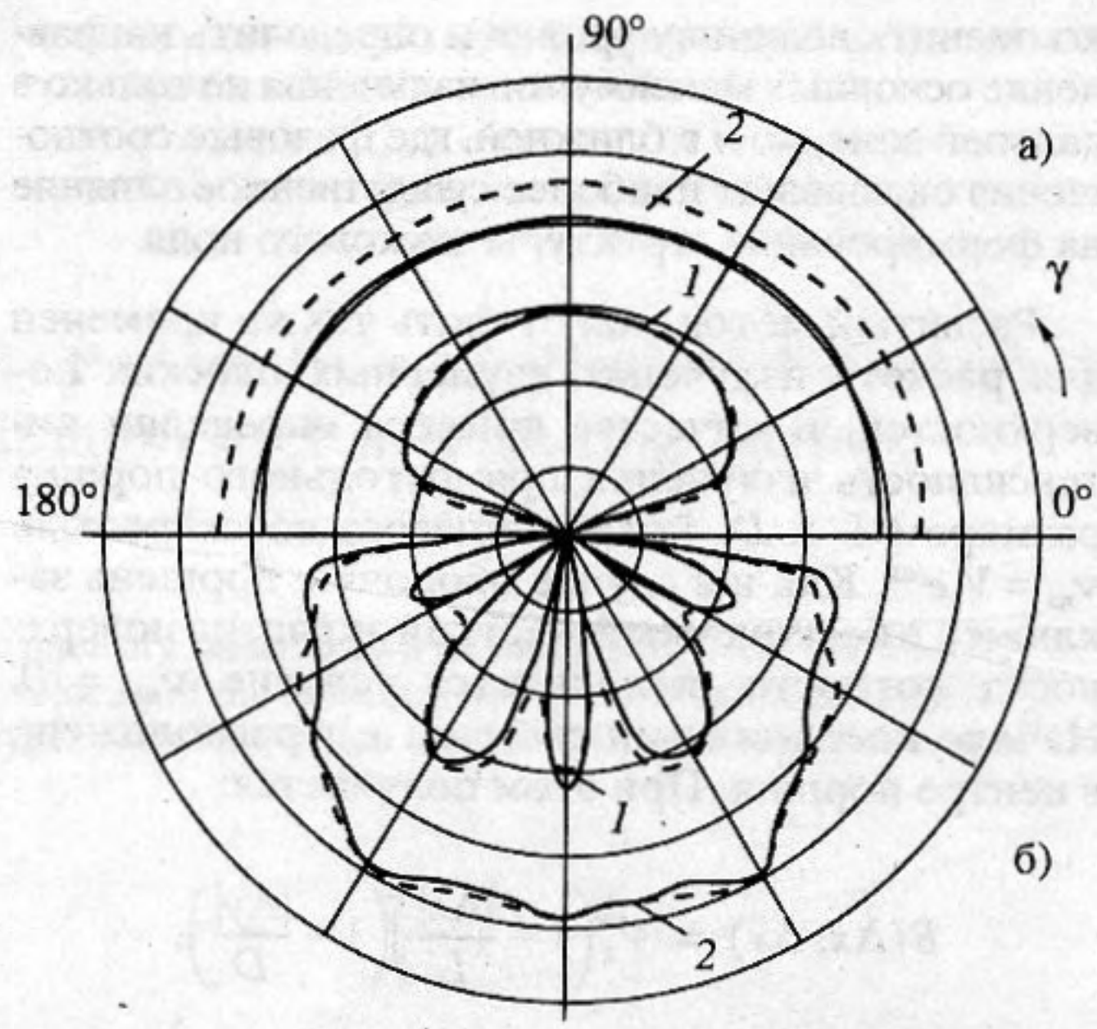

Рис. 3. Сопоставление уровней интенсивности излучения оболочки в воздухе, рассчитанных на основании энергетической модели (сплошные кривые) и по формуле (2) (штриховые кривые) в дальней зоне $r = 250$ м (кривые *1*) и на близком расстоянии $r = 5$ м (кривые *2*) для частот: а) $f = 2116$ Гц, $m = 1$ и б) $f = 2117$ Гц, $m = 3$; окружности равных уровней проведены через 10 дБ.

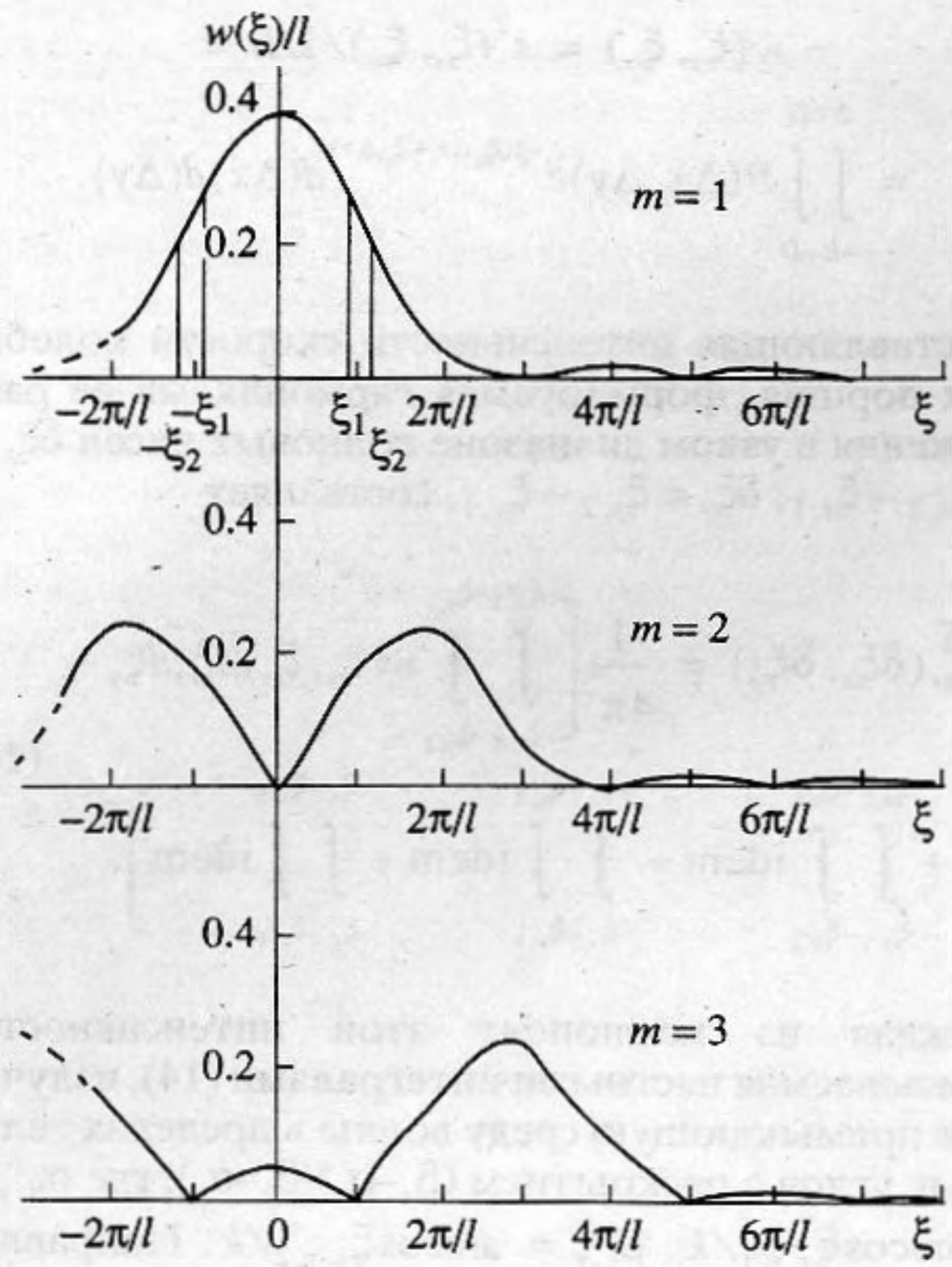

Рис. 4. Спектральная энергетическая плотность распределения скорости колебания оболочки; ξ_1, ξ_2 – пределы интегрирования.

но оценить величину уровня и определить направление основных максимумов излучения не только в дальней зоне, но и в ближней, где фазовые соотношения оказывают наиболее существенное влияние на формирование структуры звукового поля.

Развитый метод может быть также применен для расчета излучения двумерных плоских поверхностей. В качестве примера определим интенсивность излучения прямоугольного поршня размером $L \times D$, колеблющегося со скоростью $v_{ns} = V_z e^{j\omega t}$. Как и в случае оболочки, поршень заключен в бесконечный жесткий экран, на поверхности которого выполняется условие $v_{ns} = 0$. Начало координатной системы x, y расположено в центре поршня. При этом получается:

$$B(\Delta x, \Delta y) = V_z^2\left(1 - \frac{|\Delta x|}{L}\right)\left(1 - \frac{|\Delta y|}{D}\right),$$

$$s(\xi_x, \xi_y) = V_z \int_{-L/2}^{L/2}\int_{-D/2}^{D/2} e^{-j(\xi_x x + \xi_y y)} dx dy = \tag{13}$$

$$= V_z DL \frac{\sin \xi_x L/2}{\xi_x L/2} \frac{\sin \xi_y D/2}{\xi_y D/2},$$

$$w(\xi_x, \xi_y) = s^2(\xi_x, \xi_y)/DL =$$

$$= \int_{-L}^{L}\int_{-D}^{D} B(\Delta x, \Delta y) e^{-j(\xi_x \Delta x + \xi_y \Delta y)} d(\Delta x) d(\Delta y).$$

Составляющая интенсивности скорости колебания поршня, формируемая гармониками ее разложения в узком диапазоне волновых чисел $\delta\xi_x = \xi_{x,2} - \xi_{x,1}$, $\delta\xi_y = \xi_{y,2} - \xi_{y,1}$, составляет

$$\overline{v_{ns}^2}(\delta\xi_x, \delta\xi_y) = \frac{1}{4\pi^2}\left[\int_{-\xi_{x,2}}^{-\xi_{x,1}}\int_{-\xi_{y,2}}^{-\xi_{y,1}} w(\xi_x, \xi_y) d\xi_x d\xi_y + \right. \tag{14}$$

$$\left. + \int_{\xi_{x,1}}^{\xi_{x,2}}\int_{-\xi_{y,2}}^{-\xi_{y,1}} \text{idem} + \int_{-\xi_{x,2}}^{-\xi_{x,1}}\int_{\xi_{y,1}}^{\xi_{y,2}} \text{idem} + \int_{\xi_{x,1}}^{\xi_{x,2}}\int_{\xi_{y,1}}^{\xi_{y,2}} \text{idem}\right].$$

Каждая из компонент этой интенсивности, описываемая частными интегралами (14), излучает в примыкающую среду волны в пределах телесных углов с раскрытием $(\beta_x - \alpha_x)(\beta_y - \alpha_y)$, где $\alpha_{x,y} = \arccos \xi_{x,y,1}/k$, $\beta_{x,y} = \arccos \xi_{x,y,2}/k$. Направление излучения определяется углами γ_x и γ_y, отсчитываемыми от осей x и y и составляющими $\gamma_x = \arccos \bar{\xi}_x/k$, $\gamma_y = \arccos \bar{\xi}_y/k$ в случае положительных $\bar{\xi}_x = (\xi_{x,1} + \xi_{x,2})/2$, $\bar{\xi}_y = (\xi_{y,1} + \xi_{y,2})/2$ и $\gamma_x = \pi - \arccos \bar{\xi}_x/k$, $\gamma_y = \pi - \arccos \bar{\xi}_y/k$ – в случае отрицательных $\bar{\xi}_x$ и $\bar{\xi}_y$. Учитывая при этом, что активная мощность, излучаемая поршнем в каждый телесный угол, составляет

$$W(\delta\xi_x, \delta\xi_y) = \frac{DLR_s}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(\xi_x, \xi_y) d\xi_x d\xi_y =$$

$$= \frac{DLR_s k^2}{8\pi^2} w(k\cos\gamma_x, k\cos\gamma_y) \times$$

$$\times (\cos\beta_x - \cos\alpha_x)(\cos\beta_y - \cos\alpha_y)$$

и что в дальней зоне эта мощность распределяется по части сферической поверхности площадью $s_{сф} = r^2(\cos\beta_x - \cos\alpha_x)(\cos\beta_y - \cos\alpha_y)$, для интенсивности излученного звука получается выражение:

$$I(r) = \frac{W(\delta\xi_x, \delta\xi_y)}{s_{сф}} = \frac{D^2 L^2 V_z^2 f^2 R_s}{2r^2 c^2} \times$$

$$\times \frac{\sin^2\left(\frac{kL\cos\gamma_x}{2}\right)}{\left(\frac{kL\cos\gamma x}{2}\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{kD\cos\gamma_y}{2}\right)}{\left(\frac{kD\cos\gamma_y}{2}\right)^2}. \tag{15}$$

При этом амплитуда давления составляет

$$p = \sqrt{2I\rho c} = \frac{2c^2 A_z}{\pi r}\sqrt{\frac{R_s \rho}{c}} \times$$

$$\times \left|\frac{\sin\left(\frac{kL\cos\gamma_x}{2}\right)}{\cos\gamma_x} \frac{\sin\left(\frac{kD\cos\gamma_y}{2}\right)}{\cos\gamma_y}\right|, \tag{16}$$

где $A_z = V_z/\omega$ – амплитуда смещения поршня. В предположении, что для всех пространственных составляющих разложения скорости v_{ns} сопротивление излучения равно волновому $R_s = \rho c$ и что справедливо соотношение $\rho c^2 = E$ (E – модуль упругости среды) выражение (16) полностью совпадает с формулой, полученной Г.С. Гореликом [6, формула (8.23)] с учетом фазового набега волн, пришедших в точку наблюдения от разных частей поверхности поршня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. С. 191.
2. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960. С. 287.

3. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 1. М.: Мир, 1976. С. 221.
4. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, Гл. ред. ф.-м. литер., 1973. С. 98.
5. *Музыченко В.В.* Дифракция звука на упругих оболочках. М.: Наука, 1993. С. 121–130.
6. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. 2-е изд-е. М.: Гос. изд-во ф.-м. литер., 1959. С. 303.

Estimation of the Angular Sound Intensity Pattern from the Power Characteristics of the Vibration Velocity Distribution over a Radiating Surface

V. B. Stepanov

A theory is proposed to determine the angular acoustic intensity radiated by a vibrating body from the distribution of the energy spatial-wave spectral density of the velocity of the vibrating surface. Our estimates satisfactionly agree with those obtained by the Helmholtz–Huygens formula, which incorporates the phase structure of the vibroacoustic field.