АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 4, с. 577–579

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.26

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКИХ МОД В КАНАЛЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

© 1996 г. А. Д. Лапин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева
117036 Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 04.04.95 г.

Задача о распространении звука в канале с однородными стенками, характеризующимися импедансом, рассматривалась многими авторами [1–4]. Методом разделения переменных были найдены моды в канале с прямоугольным и с круговым сечениями. Затухание этих мод можно определить по номограммам, рассчитанным на основе точных трансцендентных уравнений [1, 2], или вычислить по приближенным формулам [3, 4].

Представляет интерес исследовать поведение мод в канале с произвольным сечением и неоднородными стенками. В таком канале нельзя получить моды методом разделения переменных. Ниже на основе теоремы Грина получены общие интегральные соотношения для мод в канале с произвольным сечением и неоднородными стенками, и на их основе сделаны заключения о поведении мод в этом канале при изменении импеданса его стенок.

Пусть стенки канала характеризуются нормальной акустической проводимостью, и пусть в цилиндрической системе координат (r, φ, z) они описываются уравнением $r = R(\varphi)$. Величина акустической проводимости может изменяться по периметру сечения. Канал заполнен однородной средой, плотность этой среды и скорость звука в ней равны соответственно ρ и c. Исследуем зависимость волновых чисел мод от акустической проводимости стенок канала.

Возьмем какую-либо моду в канале. Звуковое давление, собственную функцию и волновое число этой моды в канале при акустической проводимости, равной $Y(\varphi)$, обозначим соответственно через p, ψ и ξ, $p(r, \varphi, z) = \psi(r, \varphi)\exp(i\xi z)$; соответственные величины для этой же моды в канале при акустической проводимости, равной $Y_0(\varphi)$, будем обозначать через p_0, ψ_0 и ξ_0, $p_0(r, \varphi, z) = \psi_0(r, \varphi)\exp(i\xi_0 z)$. Собственные функции ψ и ψ_0 удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta_\perp\psi = (\xi^2 - k^2)\psi, \quad \Delta_\perp\psi_0 = (\xi_0^2 - k^2)\psi_0,$$

где $\Delta_\perp$ – двумерный лапласиан по координатам r и φ, $k = \omega/c$, ω – частота звука. Умножая первое уравнение на ψ_0, а второе на ψ, вычитая почленно и интегрируя по сечению S канала, найдем

$$\int_S(\psi_0\Delta_\perp\psi - \psi\Delta_\perp\psi_0)dS = (\xi^2 - \xi_0^2)\int_S\psi\psi_0 dS.$$

В левой части интеграл преобразуем по теореме Грина и тогда получим соотношение:

$$\int_l\left(\psi_0\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{N}} - \psi\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{N}}\right)dl = (\xi^2 - \xi_0^2)\int_S\psi\psi_0 dS,$$

где $\mathbf{N}$ – внешняя нормаль к стенке канала, l – контур сечения S.

При учете граничных условий на стенках канала

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{N}} = ik\rho cY\psi, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{N}} = ik\rho cY_0\psi_0,$$

из этого соотношения получим точные выражения для волнового числа моды

$$\xi = \left\{\xi_0^2 + ik\rho c\frac{\int_l(Y - Y_0)\psi\psi_0 dl}{\int_S\psi\psi_0 dS}\right\}^{1/2},$$

$$\xi = \left\{\xi_0^2 + \frac{i}{k\rho c}\frac{\int_l(Z - Z_0)\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{N}}\frac{\partial\psi_0}{\partial N}dl}{\int_S\psi\psi_0 dS}\right\}^{1/2},$$

где $Z = 1/Y$, $Z_0 = 1/Y_0$.

При выполнении соотношения

$$|\zeta - \zeta_0|S/l \ll 1, \tag{1}$$

где $\zeta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ и $\zeta_0 = \sqrt{k^2 - \xi_0^2}$ – "поперечные" волновые числа моды, S/l – характерный линейный размер сечения канала, собственные функции ψ и ψ_0 мало отличаются друг от друга и тогда

для "продольного" волнового числа ξ получим следующие приближенные выражения:

$$\xi = \left\{ \xi_0^2 + ik\rho c \frac{\int_l (Y - Y_0)\psi_0^2 dl}{\int_S \psi_0^2 dS} \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

$$\xi = \left\{ \xi_0^2 + \frac{i}{k\rho c} \frac{\int_l (Z - Z_0)\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{N}}\right)^2 dl}{\int_S \psi_0^2 dS} \right\}^{1/2}. \quad (3)$$

"Поперечное" волновое число ζ определяется по формулам:

$$\zeta = \left\{ \zeta_0^2 - ik\rho c \frac{\int_l (Y - Y_0)\psi_0^2 dl}{\int_S \psi_0^2 dS} \right\}^{1/2}, \quad (4)$$

$$\zeta = \left\{ \zeta_0^2 - \frac{i}{k\rho c} \frac{\int_l (Z - Z_0)\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{N}}\right)^2 dl}{\int_S \psi_0^2 dS} \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

На основе этих формул можно сделать заключения о поведении мод в канале с произвольным сечением при изменении проводимости (импеданса) его стенок. Пусть $\mathrm{Re}\, Y_0 = 0$ и мода p_0 – распространяющаяся, ее фазовая скорость равна $\gamma_0 = \omega/\xi_0$. Если $\mathrm{Re}(Y - Y_0) = 0$, $\mathrm{Im}(Y - Y_0) > 0$, то, согласно формуле (2), имеем $\xi < \xi_0$. Фазовая скорость моды p_0 равна $\gamma = \omega/\xi > \gamma_0$, критическая частота моды повышается. При выполнении соотношений $\mathrm{Re}(Y - Y_0) = 0$, $\mathrm{Im}(Y - Y_0) < 0$ имеем $\xi > \xi_0$, $\gamma < \gamma_0$, критическая частота моды понижается.

Пусть $Y_0 = 0$. Тогда волновое число ξ получим по формуле:

$$\xi = \left\{ \left[\xi_0^{(ж)}\right]^2 + ik\rho c \frac{\int_l Y\left[\psi_0^{(ж)}\right]^2 dl}{\int_S \left[\psi_0^{(ж)}\right]^2 dS} \right\}^{1/2}, \quad (6)$$

где $\psi_0^{(ж)}$ – собственная функция в канале с жесткими стенками. Согласно этой формуле, волновое число нулевой моды ($\psi_0^{(ж)} \equiv \mathrm{const}$) в канале с произвольным сечением и неоднородными стенками равно

$$\xi = \left\{ k^2 + ik\rho c \frac{1}{S} \int_l Y dl \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

Волновое число нулевой моды в канале с однородными стенками ($Y \equiv \mathrm{const}$) равно

$$\xi = \{k^2 + ik\rho c Y l/S\}^{1/2}, \quad (8)$$

где l и S – соответственно периметр и площадь сечения канала. Затухание нулевой моды определяется экспоненциальным множителем

$$\exp(-\mathrm{Im}\sqrt{k^2 + ik\rho c Y l/S}\, z).$$

Впервые формула (8) была получена в работе [5]. Она справедлива при выполнении соотношения $k\rho c|Y|S/l \ll 1$.

В качестве примера рассчитаем волновые числа мод в канале с прямоугольным сечением и однородными стенками, характеризующимися акустической проводимостью Y, $\rho c|Y| \ll 1$. Выберем декартову систему координат так, чтобы две стенки канала совпадали с координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$. Моду (m, n) в канале с жесткими стенками можно записать в виде:

$$p_0^{(ж)}(x, y, z) = \psi_0^{(ж)}(x, y)\exp(i\xi_0^{(ж)} z),$$

где

$$\psi_0^{(ж)}(x, y) = \cos\left(\frac{m\pi}{H_x}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{H_y}y\right),$$

$$\xi_0^{(ж)} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{H_x}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{H_y}\right)^2},$$

H_x и H_y – длины сторон поперечного сечения канала, а m и n – любые целые числа. Волновое число моды (m, n) в канале с однородными стенками, характеризующимися акустической проводимостью Y, получим по формуле (6):

$$\xi = \left\{ [\xi_0^{(ж)}]^2 + ik\rho c Y \frac{\int_l [\psi_0^{(ж)}]^2 dl}{\int_S [\psi_0^{(ж)}]^2 dS} \right\}^{1/2} = \quad (9)$$

$$= \left\{ [\xi_0^{(ж)}]^2 + i4k\rho c Y \frac{\theta_m H_x + \theta_n H_y}{\theta_m \theta_n H_x H_y} \right\}^{1/2},$$

где θ_n равно 2 при $n = 0$ и равно 1 при $n \neq 0$.

Для создания большой звукоизоляции в канале его стенки часто "облицовывают" резонаторами Гельмгольца. При частоте звука, равной собственной частоте резонаторов и близкой к ней, эффективный импеданс Z "облицованных" стенок мал и эти стенки почти абсолютно мягкие. Волновые числа мод в таком "облицованном" канале можно вычислить по формуле (3), полагая в ней $Z_0 = 0$. Пусть канал имеет прямоугольное сечение и его стенки характеризуются эффективным импедансом Z, $|Z| \ll \rho c$. Моду (m, n) в канале с мягкими стенками можно записать в виде

$$p_0^{(м)}(x, y, z) = \psi_0^{(м)}(x, y)\exp(i\xi_0^{(м)} z),$$

где

$$\psi_0^{(м)}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi}{H_x}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{H_y}y\right),$$

$$\xi_0^{(м)} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{H_x}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{H_y}\right)^2},$$

m и n – любые целые числа. Волновое число моды (m, n) в канале с однородными стенками, характеризующимися эффективным импедансом Z, получим по формуле (3):

$$\xi = \left\{[\xi_0^{(м)}]^2 + \frac{iZ}{k\rho c}\frac{\int_l \left[\frac{\partial\psi_0^{(м)}}{\partial \mathbf{N}}\right]^2 dl}{\int_S \left[\psi_0^{(м)}\right]^2 dS}\right\}^{1/2} = \tag{10}$$

$$= \left\{\left[\xi_0^{(м)}\right]^2 + i4\frac{Z}{k\rho c}\left[\frac{1}{H_x}\left(\frac{m\pi}{H_x}\right)^2 + \frac{1}{H_y}\left(\frac{n\pi}{H_y}\right)^2\right]\right\}^{1/2}$$

Отметим, что приближенные формулы (9) и (10) получены из общих интегральных соотношений для мод без решения соответственных дисперсионных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Morse P.M.* The transmission of sound inside pipes // J. Acoust. Soc. Amer. 1939. V. 11 № 2. P. 205–210.
2. *Molloy C.T., Honigman E.* Attenuation of sound in lined circular ducts // J. Acoust. Soc. Amer. 1945. V. 16. № 4. P. 267–272.
3. *Морз Ф.* Колебания и звук. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
4. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
5. *Лапин А.Д.* Затухание нулевой моды в волноводе с произвольным сечением вследствие поглощения на стенках // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 3. С. 581–582.