АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 4, с. 570–572

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534

ПРОЯВЛЕНИЕ СВОЙСТВА ВЗАИМНОСТИ В ЗАДАЧЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫЙ СЛОЙ

© 1997 г. В. В. Тютекин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 26.12.96 г.

Принцип взаимности в акустике является одним из фундаментальных понятий, играющим большую роль как в теоретическом, так и в прикладном аспектах [1–3]. Физическая сущность этого принципа исследуется до сих пор (например, [4]), тем не менее не до конца исследованы его математические основы.

В настоящей работе на простом примере прохождения плоской звуковой волны через слой произвольной слоисто-неоднородной среды установлены математические "истоки" известного соотношения: коэффициент прохождения не зависит от направления падения звуковой волны. По нашему мнению, это соотношение является одним из проявлений принципа взаимности.

Слоисто-неоднородная среда является весьма удобной моделью для описания распространения звука в реальных средах, параметры которых зависят только от одной координаты (по толщине слоя среды). Теория распространения звука в таких средах к настоящему времени весьма детально разработана и изложена в большом числе публикаций, в том числе в широко известных монографиях [5, 6].

Пусть акустическая среда имеет переменные физические параметры $\rho(x)$ – плотность и $\beta(x)$ – сжимаемость, описывающие ее акустические свойства. Здесь x – координата, отсчитываемая по толщине слоя среды $0 \le x \le l$; полупространства $x < 0$ и $x > l$ занимает однородная среда с параметрами ρ_0 и β_0. Функции $\rho(x)$ и $\beta(x)$ можно для простоты полагать непрерывными по x и с учетом поглощения в среде комплексными. Например, $\rho(x) = \rho_0(x)(1 + i\eta_1)$, $\beta(x) = \beta_0(x)(1 - i\eta_2)$, где η_1 и η_2 – коэффициенты потерь, обусловленные поглощением звука при "инерционных" и "деформационных" процессах в среде соответственно.

Предполагаем, что в соответствии с поставленной задачей на слой падают две волны: из полупространства $x \le 0$ (слева) – плоская звуковая волна $p_0^+ = \exp(i(kx - \omega t))$ и из полупространства $x \ge l$ (справа) – волна $p_0^- = \exp(i(-kx - \omega t))$, где $k = \omega\sqrt{\rho_0\beta_0}$ – волновое число, ω – круговая частота (множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду в дальнейшем опускаем).

Звуковые поля можно представить в виде:

при $x \le 0$

$$p^+ = \exp(ikx) + R^+\exp(-ikx),$$

$$p^- = D^-\exp(-ikx)$$

и при $x \ge l$

$$p^- = \exp(-ikx) + R^-\exp(ikx),$$

$$p^+ = D^+\exp(ikx).$$

Величины R и D являются коэффициентами отражения и прохождения соответствующих волн; знак (+) соответствует падению волны слева, знак (–) – падению волны справа.

Волновые процессы в слое неоднородной среды при гармоническом возбуждении $\exp(-i\omega t)$ описываются системой двух однородных дифференциальных уравнений:

$$-i\omega\rho(x)u = p', \tag{1}$$

$$-i\omega\beta(x)p = u'. \tag{2}$$

Здесь $p(x)$ – звуковое давление, $u(x)$ – колебательная скорость, штрих обозначает дифференцирование по x. Уравнение (1) представляет собой уравнение Эйлера, а уравнение (2) – закон Гука, записанный через скорость деформации. Обращает на себя внимание своеобразная симметрия этих двух уравнений. Дифференцируя уравнение (1) и исключая u и u', можно, как обычно, получить уравнение Гельмгольца для слоистой среды в форме:

$$p'' - (\rho'(x)/\rho(x))p' + k^2(x)p = 0. \tag{3}$$

Аналогично, дифференцируя уравнение (2) и исключая p и p', получим другое уравнение Гельмгольца:

$$u'' - (\beta'(x)/\beta(x))u' + k^2(x)u = 0. \quad (4)$$

Здесь $k^2(x) = \omega^2\rho(x)\beta(x)$ – квадрат волнового числа. Отметим, что, если в среде изменяется только β, удобнее пользоваться уравнением (3), если изменяется только ρ – уравнением (4).

Решение уравнения (3) представим в виде суммы двух линейно-независимых функций $p_1(x)$ и $p_2(x)$ (c_1 и c_2 – произвольные постоянные):

$$p^{\pm}(x) = c_1^{\pm}p_1(x) + c_2^{\pm}p_2(x). \quad (5)$$

Соответственно для уравнения (4) будем иметь

$$u^{\pm}(x) = c_1^{\pm}u_1(x) + c_2^{\pm}u_2(x). \quad (6)$$

Знаки (+) и (–) соответствуют тем же волнам. Решения (5) и (6) не являются независимыми, а связаны между собой попарно соотношениями (1) и (2), например, $-i\omega\beta(x)p_1^{\pm}(x) = u_1^{\pm}(x)$ и т.д.

Граничные условия при $x = 0$ можно удовлетворить, выбрав начальные условия для уравнения (1) в виде: $p_1(0) = 1$, $p_1'(0) = 0$, $p_2(x) = 0$, $p_2'(x) = 1$. Соответственно для решения уравнения (2) будем иметь $u_1(0) = 0$, $u_1'(0) = -i\omega\beta(0)$, $u_2(0) = (-i\omega\rho(0))^{-1}$, $u_2'(0) = 0$.

Поэтому $p(0) = c_1^{\pm}$, $u(0) = c_2^{\pm}(-i\omega\rho(0))^{-1}$.

Граничные условия для каждой из волн в отдельности, состоящие в равенстве давлений и равенстве колебательных скоростей на границах слоя ($x = 0$ и $x = l$), с использованием решений уравнения (3) могут быть записаны в виде двух отдельных систем:

$$\begin{cases} -R^+ + c_1^+ = 1, \\ \alpha(0)R^+ + c_2^+ = \alpha(0), \\ -D_1^+ + c_1^+p_1(l) + c_2^+p_2(l) = 0, \\ -\alpha(l)D_1^+ + c_1^+p_1'(l) + c_2^+p_2'(l) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R_1^- + c_1^-p_1(l) + c_2^-p_2(l) = \exp(-ik_0l), \\ \alpha(l)R_1^- - c_1^-p_1'(l) - c_2^-p_2'(l) = \alpha(l)\exp(-ik_0l), \\ D^- - c_1^- = 0, \\ \alpha(0)D^- + c_2^- = 0. \end{cases}$$

Здесь $\alpha(x) = ik_0\dfrac{\rho(x)}{\rho_0}$, $D_1^+ = D^+\exp(ik_0l)$, $R_1^- = R^-\exp(ik_0l)$.

Решая эти системы, для интересующих нас величин $R^{\pm}$ и $D^{\pm}$ получим

$$R^+ = -\frac{\Delta_1}{\Delta^-},\ D^+ = \frac{2\alpha(0)W(l)}{\Delta^-}\exp(-ik_0l), \quad (7)$$

$$R^- = -\frac{\Delta^+}{\Delta^-}\exp(-i2k_0l),\ D^- = \frac{2\alpha(l)}{\Delta^-}\exp(-ik_0l). \quad (8)$$

Здесь $W_p(x) = p_1(x)p_2'(x) - p_2(x)p_1'(x)$ – вронскиан уравнения (3), $\Delta^{\pm} = A_1^{\pm}(l) - \alpha(0)A_2^{\pm}(l)$, $\Delta_1 = A_1^-(l) + \alpha(l)A_2^-(l)$, $A_i^{\pm}(l) = \alpha(l)p_i(l) \pm p_i'(l)$, $i = 1, 2$.

Перейдем к обсуждению полученных результатов. На первый взгляд, величины D^+ и D^- не равны между собой. Их равенство будет достигнуто только при условии

$$\alpha(0)W(l) = \alpha(l), \quad (9)$$

которое легко доказывается из следующих соображений.

Одним из важнейший свойств решения дифференциальных уравнений типа (1) и (2) является свойство, определяемое формулой Лиувилля [7]:

$$W_p(x) = W_p(0)\exp\left(-\int_0^x a_1(x)dx\right), \quad (10)$$

где $a_1(x)$ – коэффициент при $(n-1)$-производной в дифференциальном уравнении n-го порядка. Для уравнения (3) $a_1(x) = -\rho'(x)/\rho(x)$. Поэтому

$$\frac{W_p(x)}{\rho(x)} = \frac{W_p(0)}{\rho(0)} = \frac{1}{\rho(0)}, \quad (11)$$

что совпадает с (9) при $x = l$.

Если для решения задачи использовать уравнение (4), то получится идентичный результат. Для этого уравнения $a_1(x) = -\beta'(x)/\beta(x)$, и поэтому формула Лиувилля, примененная к этому уравнению, приводит к соотношению

$$\frac{W_u(x)}{\beta(x)} = \frac{W_u(0)}{\beta(0)} = -\frac{1}{\rho(0)}, \quad (12)$$

которое также обеспечивает равенство коэффициентов прохождения звука. Здесь $W_u(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)$ – вронскиан уравнения (4). Из уравнений (11) и (12) следует соотношение:

$$\beta(x)W_p(x) + \rho(x)W_u(x) = 0. \quad (13)$$

Что касается величин R^+ и R^-, то они не равны друг другу, и только в случае слоистой среды без потерь выполняется соотношение $\Delta^+ = \Delta_1^*$, что

приводит к равенству $|R^+| = |R^-|$. (Знак (*) означает комплексно сопряженную величину.)

Полученные результаты легко обобщаются на случай произвольного угла падения волны на слой.

Соотношение

$$D^+ = D^- \tag{14}$$

в рассмотренном случае можно, по нашему мнению, трактовать как одно из проявлений принципа взаимности. Поскольку это соотношение обусловлено общематематическим соотношением (10), примененным к уравнениям (1)–(4), описывающим конкретный физический процесс, то можно сделать вывод, что принцип взаимности изначально присущ этому процессу, а соотношение (14) является инвариантом для исходных уравнений.

Можно высказать предположение, что это соотношение, справедливое из общих физических соображений для более сложных задач (например, прохождения звука через слой слоисто-неоднородной упругой среды, прохождения изгибных волн через неоднородные участки стержней или пластин и др.) также обусловлено формулой Лиувилля (10), хотя эти задачи описываются уравнениями более высоких порядков.

В заключение выражаю признательность Ю.И. Бобровницкому и А.Е. Вовк за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурдуев В.В.* Теоремы взаимности. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948.
2. *Lyamshev L.M.* Reciprocity principle and its applications in acoustics // Proc. Intern. Noise and Vibration Control Conference NOISE-93. St.-Petersburg, 1993. V. 5. P. 41–51.
3. *Fahy F.J., Mason J.M.* Development of reciprocity technique for the prediction of propeller noise transmission through aircraft fuselages // Noise Control Engineering Journal. 1990. V. 34. № 2. P. 43–52.
4. *Бобровницкий Ю.И.* Физический смысл теоремы взаимности Максвелла–Бетти // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 2. С. 267–268.
5. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1972.
6. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
7. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: ГИТТЛ, 1956. 452 с.

Reciprocity Properties in Sound Transmission through a Stratified Inhomogeneous Layer

V. V. Tyutekin