## СООБЩЕНИЯ

УДК 534.23

## ОБ УЧЕТЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН С ГРАНИЦАМИ ВОЛНОВОДА В МЕТОДЕ ВКБ

© 1997 г. А. И. Белов

Северный филиал Акустического института им. Н.Н. Андреева РАН 184600 Североморск, ул. Почтовая, 3 Поступила в редакцию 02.08.95 г.

Одним из наиболее быстрых с вычислительной точки зрения и вместе с тем достаточно точных методов расчета звуковых полей в океане является метод ВКБ [1]. Для типичных условий глубокого океана вычисление этим методом продольных волновых чисел, захваченных подводным звуковым каналом нормальных волн, дает результаты с точностью до пяти значащих цифр или еще лучше [2]. В отличие от глубокого океана, определяющей особенностью распространения звука в мелком море является взаимодействие нормальных волн с границами гидроакустического волновода, учету которого в рамках приближения ВКБ и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим гидроакустический волновод в виде водного слоя, расположенного в области  $0 \le z \le H$ . Внутри слоя задано распределение квадрата волнового числа  $k^2(z) = \omega^2/c^2(z)$  ( $\omega$  – круговая частота, c(z) – вертикальное распределение скорости звука), моделирующее придонный звуковой канал в мелком море. Верхнюю границу волновода (z = H) будем считать абсолютно мягкой, а граничное условие на дне (z = 0) зададим с помощью коэффициента отражения плоской волны  $V_1(\xi) = |V_1| \exp(i\phi_1)$ , где  $\xi$  – продольное волновое число.

Дисперсионное уравнение для определения продольных волновых чисел  $\xi_n$  нормальных волн  $\Psi_n(z)$  имеет вид [1]:  $1-V_1(\xi_n)V_2(\xi_n)=0$ . Здесь  $V_2(\xi_n)=\exp(i\varphi_2)$  является коэффициентом отражения плоской волны, падающей под углом  $\theta=$  =  $\arccos[\xi_n/k(0)]$  из фиктивного полупространства z<0, в котором  $k(z)\equiv k(0)$ . Поскольку предполагается, что морское дно обладает поглощением, все продольные волновые числа нормальных волн будут комплексными. На больших расстояниях звуковое поле формируют нормальные волны, у которых  $\text{Im}\,\xi_n$  мала. Для этих нормальных волн, пользуясь методом возмущений, дисперсионное уравнение можно представить в виде системы

двух уравнений, одно из которых служит для определения Re ξ<sub>n</sub>, а другое – для определения Im ξ<sub>n</sub>:

Физика атм. и океана, 2979. Т

$$\int \varphi_1(\operatorname{Re}\xi_n) + \varphi_2(\operatorname{Re}\xi_n) = 2\pi n, \tag{1}$$

Сер. Акустика, 1983/3/3 3. С. 75-78

$$\left| \operatorname{Im} \xi_n = \ln |V_1(\operatorname{Re} \xi_n)| / D(\operatorname{Re} \xi_n), \right|$$
 (2)

где 
$$D(\operatorname{Re}\xi_n) = \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_1 + \varphi_2) \big|_{\operatorname{Re}\xi = \operatorname{Re}\xi_n}$$
.

Определим теперь величину φ<sub>2</sub>(Reξ). В придонном звуковом канале поле, индуцируемое плоской волной, падающей из нижнего фиктивного полупространства, можно записать в виде [3]:  $\phi(z, \text{Re}\xi) = (dt/dz)^{-1/2} [\text{Ai}(t) - w \text{Bi}(t)],$  где Ai и Bi – функции Эйри [4],  $t(z, \text{Re}\xi) = \text{sign}[k(z_T) -$ -k(z)][3/2 $\int_{z_{\tau}}^{z} |k^{2}(\tau) - (\text{Re}\xi)^{2}|^{1/2} d\tau$ ]<sup>2/3</sup>. Точка поворота  $z_T$  для  $\text{Re } \xi \ge k(H)$  находится из условия  $k(z_T) =$  $= \text{Re} \xi$ . Для  $\text{Re} \xi < k(H)$  точка поворота также находится из этого условия при аналитическом продолжении k(z) в область z > H. Коэффициент wзависит от вида граничного условия при z = H. Для акустически мягкой границы  $w = \operatorname{Ai}[t(H,$  $Re\xi$ )]/ $Bi[t(H, Re\xi)]$ . Требование непрерывности давления и вертикальной компоненты скорости частиц при z = 0 дает

$$\varphi_2(0, \operatorname{Re}\xi) = -\pi +$$

$$+ 2 \operatorname{arctg} \left\{ t^{1/2} \left[ \frac{\operatorname{Ai}(t) - w \operatorname{Bi}(t)}{\operatorname{Ai}'(t) - w \operatorname{Bi}'(t)} \right] \right\},$$
(3)

где штрих означает дифференцирование по t.

Пусть точка поворота  $z_T$  достаточно удалена от границы z=0 и параметр  $t(0, \text{Re}\xi)$  в выражении (3) большой и отрицательный. В этом случае можно ограничиться первым членом асимптотических разложений функций Эйри и после несложных преобразований получить

$$\varphi_2(0, \text{Re}\xi) = 2\int_{z_a}^{0} [k^2(\tau) - (\text{Re}\xi)^2]^{1/2} d\tau + \varphi_3(\text{Re}\xi),$$
(4)

где

$$\phi_{3}(\text{Re}\xi) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan\left\{\frac{\text{Ai}[t(H, \text{Re}\xi)]}{\text{Bi}[t(H, \text{Re}\xi)]}\right\} + \frac{4}{3}[-t(H, \text{Re}\xi)]^{2/3}.$$
(5)

Параметр є и предел интегрирования  $z_a$  связаны с точкой поворота  $z_T$  и верхней границей волновода следующими соотношениям:  $z_a = z_T$ ,  $\varepsilon = 0$  при  $z_T \le H$ ;  $z_a = H$ ,  $\varepsilon = 1$  при  $z_T > H$ . Интеграл в правой части выражения (4) является обычным фазовым интегралом приближения ВКБ. Функция  $\phi_3$ , определенная по формуле (5), является непрерывной функцией, что существенно отличает выражение (5) от обычного приближения ВКБ, в котором  $\phi_3$  имеет вид [1]:

$$\varphi_3 = \begin{cases} \pi, & \text{Re}\xi < k(H), \\ \pi/2, & \text{Re}\xi \ge k(H). \end{cases}$$
 (6)

Функция  $\phi_3$ , определенная по (5), при больших и отрицательных  $t(H, \text{Re}\,\xi)$  стремится  $\kappa - \pi$ , с ростом t она монотонно возрастает и при t больших и положительных стремится  $\kappa - \pi/2$ . Следует отметить, что выражение для  $\phi_3$ , аналогичное (5), было получено в работе [5] и использовано в программах расчета звуковых полей М.И. Явора [6].

С учетом (4) дисперсионные уравнения (1), (2) запишутся в виде:

$$2\int_{z_a}^{0} [k^2(\tau) - (\text{Re}\xi_n)^2]^{1/2} d\tau + (7)$$

$$+ \varphi_1(\text{Re}\xi_n) + \varphi_3(\text{Re}\xi_n) = 2\pi n,$$

Im
$$\xi_n = -\frac{\ln|V_1(\text{Re}\xi_n)|}{d_1(\text{Re}\xi_n) + d_2(\text{Re}\xi_n) + d_3(\text{Re}\xi_n)}.$$
 (8)

В терминах лучевой акустики  $d_1 = -\partial \phi_1/\partial \xi$  есть смещение луча при отражении от дна [1, 7],  $d_2 = 2 \operatorname{Re} \xi_n \int_{z_a}^0 \left[ k^2(\tau) - (\operatorname{Re} \xi_n)^2 \right]^{-1/2} d\tau$  представляет собой длину цикла луча,  $d_3 = -\partial \phi_3/\partial \xi$  согласно [8] является смещением луча на глубине  $z_a$ . Не трудно показать, что величина  $d_3$  всегда отрицательна, т.е. смещение луча на глубине  $z_a$  происходит по направлению к источнику. Минимального значения величина  $d_3$  достигает при  $t(H, \operatorname{Re} \xi) = 0$ , что соответствует положению точки поворота на верхней границе волновода  $z_a = H$ , а при t больших по абсолютной величине значение  $d_3$  стремится к 0.

Для выяснения относительной роли отдельных членов, входящих в выражения (7), (8), были выполнены расчеты фазовых скоростей  $v = \omega/\text{Re}\,\xi_n$ 

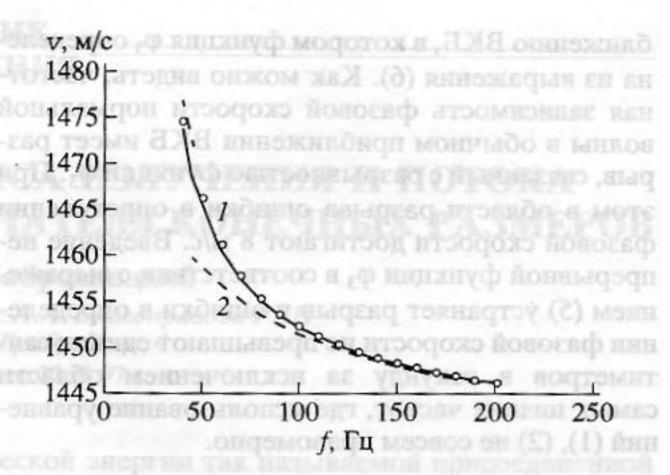
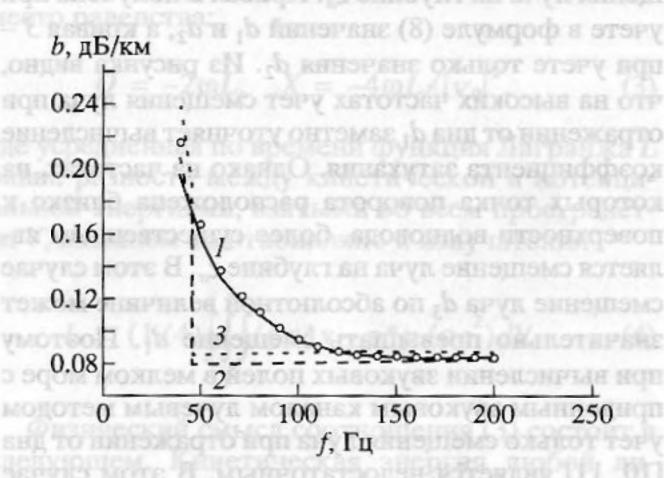


Рис. 1. Зависимость фазовой скорости первой нормальной волны от частоты: *1* – расчет по программе В.Д. Крупина, *2* – расчет обычным методом ВКБ, (о) – расчет уточненным методом ВКБ.



**Рис. 2.** Зависимость коэффициента затухания первой нормальной волны от частоты: I — расчет по программе В.Д. Крупина, 2 — расчет методом ВКБ с учетом смещения луча при отражении от дна, 3 — расчет обычным методом ВКБ, (о) — расчет уточненным методом ВКБ.

и коэффициентов затухания  $b = 20\log[\exp(\text{Im}\xi_n)]$ нормальных волн для волновода, имеющего следующие параметры: толщина волновода H = 65 м, скорость звука на поверхности c(H) = 1460 м/с, скорость звука на дне c(0) = 1436.93 м/с. Морское дно было задано в виде жидкого поглощающего полупространства с плотностью  $\rho_L = 1400 \text{ кг/м}^3 \text{ и}$ скоростью звука  $c_L = 1512(1 - i \times 10^{-3})$  м/с. При расчетах квадрат волнового числа  $k^2(z)$  в воде аппроксимировался линейной функцией. На рис. 1, 2 показаны частотные зависимости фазовой скорости v и коэффициента затухания b первой нормальной волны. Кривыми 1 на рисунках показаны результаты расчетов по волновой программе В.Д. Крупина [9], а кружками – результаты расчетов в приближении ВКБ со всеми уточнениями. Кривая 2 на рис. 1 соответствует обычному приближению ВКБ, в котором функция  $\phi_3$  определена из выражения (6). Как можно видеть, частотная зависимость фазовой скорости нормальной волны в обычном приближении ВКБ имеет разрыв, связанный с разрывностью функции  $\phi_3$ . При этом в области разрыва ошибки в определении фазовой скорости достигают 8 м/с. Введение непрерывной функции  $\phi_3$  в соответствии с выражением (5) устраняет разрыв и ошибки в определении фазовой скорости не превышают единиц сантиметров в секунду за исключением области самых низких частот, где использование уравнений (1), (2) не совсем правомерно.

На рис. 2 кривыми 2 и 3 показаны результаты расчетов частотных зависимостей коэффициента затухания в приближении ВКБ без учета смещения луча на глубине  $z_a$ . Кривая 2 получена при учете в формуле (8) значений  $d_1$  и  $d_2$ , а кривая 3 – при учете только значения  $d_2$ . Из рисунка видно, что на высоких частотах учет смещения луча при отражении от дна  $d_1$  заметно уточняет вычисление коэффициента затухания. Однако на частотах, на которых точка поворота расположена близко к поверхности волновода, более существенным является смещение луча на глубине  $z_a$ . В этом случае смещение луча  $d_3$  по абсолютной величине может значительно превышать смещение  $d_1$ . Поэтому при вычислении звуковых полей в мелком море с придонным звуковым каналом лучевым методом учет только смещения луча при отражении от дна [10, 11] является недостаточным. В этом случае необходимо также учитывать смещение луча на глубине  $z_a$ .

меляють реферт приним сурания училення приним (уст //) будем миничести тексор, по дажения приним миничести.

и коэффациентравляющимый въ20Моввите Сия 5.34

нормальных воли для волновода, имеющего сле-

жувоврем паровы в грыс не в поливоворя в на метоворя в не им.

окормены сраука Энаплемеряноворите (М) жылы 60 расср.

GREDDELLP BEARS MESTIGG C(D) = 1/436/1/3 M/cC/Mabanes

ино, было, задано в виде живкого доглошающего

скоростью звука с = 1512( тіх 10-3) м/с Три расчетах квадрат волнового часла к (z) в воде апп-

роксимировался линейной функцией. На рис. 1, 2

HOSTALANS TECTOTING SABIICANOCTE DESCRIOR CKOPO-

POOR THE WOOD OF THE REPORT OF THE WAR WOOD OF THE PARTY OF THE PARTY

маналической при Кримпина Римпина Римпина показа

товавания видении. ВК.Б. со времи мутрумники:

Кривая 2 на рис. 1 срответствует обычному пря-

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
- Толстой И., Клей К.С. Акустика океана. М.: Мир, 1969. 301 с.
- Алувелья Д.С., Келлер Дж.Б. Точные и асимптотические представления звукового поля в стратифицированном океане // Распространение волн и подводная акустика / Под. ред. Келлера Дж.Б., Пападакиса Дж.С. М.: Мир, 1980. С. 20–75.
- Абрамовитц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
- Булдырев В.С., Буслаев В.С. Асимптотические методы в задачах распространения звука в океанических волноводах и их численная реализация // Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР, 1981. Т. 117. С. 39–77.
- Явор М.И. Асимптотическое и численное исследование распространения звуковых волн в океанических волноводах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1983. 120 с.
- Weston D.E. Wave shifts, beam shifts and their role in modal and adiabatic propagation // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 96. № 1. P. 406-416.
- Murphy E.L., Davis J.A. Modified ray theory for bounded media // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 56. № 6. P. 1447–1460.
- Крупин В.Д. Численная реализация метода нормальных мод для расчета звуковых полей в волноводах со слоистым поглощающим дном // Судостроительная пром-сть. Сер. Акустика. 1989. Вып. 4. С. 82–99.
- Tindle C.T. Ray calculations with beam displacement // J. Acoust. Soc. Amer. 1983. V. 73. № 5. P. 1581–1586.
- Avudainayagam K.V., Anand G.V. Application of ray theory with beam displacement to three-dimentional sound propogation in a wedge-shaped ocean // J. Acoust. Soc. Amer. 1993. V. 93. № 5. P. 2581–2591.

Thus accommendation successful Probabilities ), 4 to Ail 1(H)

давления и вертием и управления промочения скарости

В терминах лучевой акустий (Орде - дор/д есть

смещение луча при отражении от дна [1, 7],  $d_2 =$ 

L'2ReE, [ [4](1)14ReE(1)14 Bt, ngaggganner co-

Бой длину цикла луча,  $d_3 = -\partial \phi_3/\partial \xi$  согласно [8] яв-

листря смещением луча на слубние д. Но трупно

показать, что величина и, всегда отрицательна.

TOOS THE TO THE TAKEN OF THE STATE OF THE STATE OF THE SOUTH

BETCHEVET HOLDONGERHOUTGUEL HOROLOTT HA BEDING

транице волновода с, = И, а при г сольших по косо

лютной величине значение из стремится к 0:

unendalika (8)2(V) immerking a nagina (V), (8). Chulterina e

тюлнены расчеты фазовых скоростей v = m/Reč,,

Пля выяснения относительной роли отдельных

 $d_1(ReE_n) + d_2(ReE_0) + d_3(ReE_0) invaled$