АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1998, том 44, № 5, с. 610–614

УДК 534.2

РАДИАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ПЛАВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЕ

© 1998 г. С. П. Вдовиченко, В. В. Гущин, В. В. Тамойкин

Научно-исследовательский радиофизический институт
603600 Н. Новгород, Б. Печерская, 26
E-mail: pasm@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 16.06.97 г.

Рассмотрена двумерная задача об излучении гармонического источника, равномерно движущегося по плавающей упругой пластине. Показано, что при наличии сжимающих усилий в пластине возможны такие сочетания скорости движения и собственной частоты источника, при которых мощность, поступающая в источник за счет аномального эффекта Доплера, может компенсировать потери вследствие излучения нормальной доплеровской компоненты. В результате развивается радиационная неустойчивость, которая способна вызвать разрушение пластины. Высказывается также предположение, что радиационная неустойчивость приводит к возникновению наблюдаемых в эксперименте узкополосных колебаний при проходе атмосферных фронтов над сжатыми ледяными полями.

Известно, что движение нагрузки по плавающей пластине с постоянной скоростью может при определенных условиях привести к разрушению пластины. Обычно данный эффект объясняется генерацией черенковского излучения при скорости движения, большей или равной минимальной фазовой скорости изгибно-гравитационной волны. В последние годы эффект Черенкова был исследован как экспериментально, так и теоретически на примере движения постоянной нагрузки по ледяному покрову (см., например, [1–6]).

Однако разработанная теория не в состоянии объяснить всю совокупность наблюдаемых в эксперименте явлений. В частности, теоретические оценки показывают, что максимальные прогибы должны создаваться источником при движении со скоростью, равной минимальной фазовой скорости изгибно-гравитационных волн либо скорости гравитационных волн на мелкой воде [7]. В то же время в ряде случаев зарегистрированные значения резонансных скоростей отличались от предсказанных [1]. Кроме того, существующая теория оставляет необъясненным механизм такого наблюдаемого в природных условиях явления, как генерация атмосферными фронтами волн с узкополосным спектром при прохождении над сжатыми ледяными полями.

По нашему мнению указанные расхождения связаны с тем, что в ранних исследованиях не учитывалось наличие у реальных источников колебательной компоненты давления. В настоящей работе предпринята попытка объяснить перечисленные выше экспериментальные данные развитием радиационной неустойчивости при движении гармонического источника по пластине. Эта неустойчивость связана с одновременной генерацией нормальной и аномальной составляющих доплеровского спектра. Поскольку при аномальном эффекте Доплера происходит трансформация энергии поступательного движения в колебательную энергию источника [8], можно ожидать раскачки колебаний источника, если потери на излучение за счет нормального эффекта Доплера невелики. Возможность такой неустойчивости теоретически предсказана для ряда анизотропных сред в электродинамике [9] и гидродинамике [10], причем было показано, что раскачка колебаний принципиально невозможна при движении источника в изотропной среде. В рассматриваемом нами случае вполне возможно возникновение аномального эффекта Доплера, поскольку его пороговая скорость для льда может составлять всего лишь единицы и десятки метров в секунду [11]. Кроме того, одноосное сжатие льда приводит к анизотропии. В связи с этим не исключена возможность раскачки колебаний источника.

Рассмотрим задачу о движении гармонического источника по сжатой пластине, плавающей на тяжелой несжимаемой жидкости. Пусть источник в виде осциллирующего с частотой Ω и амплитудой q_0 давления, равномерно распределенного вдоль линии, параллельной оси y декартовых координат, движется со скоростью V в направлении оси x. Ось z направлена вверх.

Давление в жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta p = 0. \quad (1)$$

Запишем также динамическое и кинематическое граничные условия для давления в жидкости и смещения пластины W:

$$\left(D\nabla^4 W + Q\nabla^2 W + h\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - p + \rho_1 g W\right)\Bigg|_{z=0} = q(x, t), \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} = 0, \quad (3)$$

где $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, ρ, ν, E и h – соответственно, цилиндрическая жесткость, плотность, коэффициент Пуассона, модуль Юнга и толщина пластины, g – ускорение свободного падения, ρ_1 – плотность жидкости, Q – сжимающее усилие, $q(x, t) = q_0\cos(\Omega t)\delta(x - Vt)$, q_0 – сила давления, приходящаяся на единицу длины источника.

Решение задачи целесообразно искать в виде:

$$W(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_1(\omega, k)\exp[-i(\omega t - kx)]dkd\omega,$$
$$p(x, z, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p_1(\omega, k)\exp[-i(\omega t - kx) + kz]dkd\omega. \quad (4)$$

Из условий (2), (3) с учетом выражения (4) получаем решение для W_1:

$$W_1(\omega, k) = -\frac{q_1(\omega, k)k}{\Delta(\omega, k)}, \quad (5)$$

где $\Delta(\omega, k) = (Dk^4 - Qk^2 - h\omega^2\rho + \rho_1 g)k - \rho_1\omega^2$, а $q_1(\omega, k)$ – пространственно-временной спектр источника:

$$q_1(\omega, k) = q_0[\delta(\omega - kV - \Omega) + \delta(\omega - kV + \Omega)]/2. \quad (6)$$

С учетом формул (5) и (6) для смещения льда имеем соотношение:

$$W(x, t) = \frac{q_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\exp[-i(kV + \Omega)t]}{\Delta(kV + \Omega, k)} + \frac{\exp[-i(kV - \Omega)t]}{\Delta(kV - \Omega, k)}\right\}\exp(ikx)kdk. \quad (7)$$

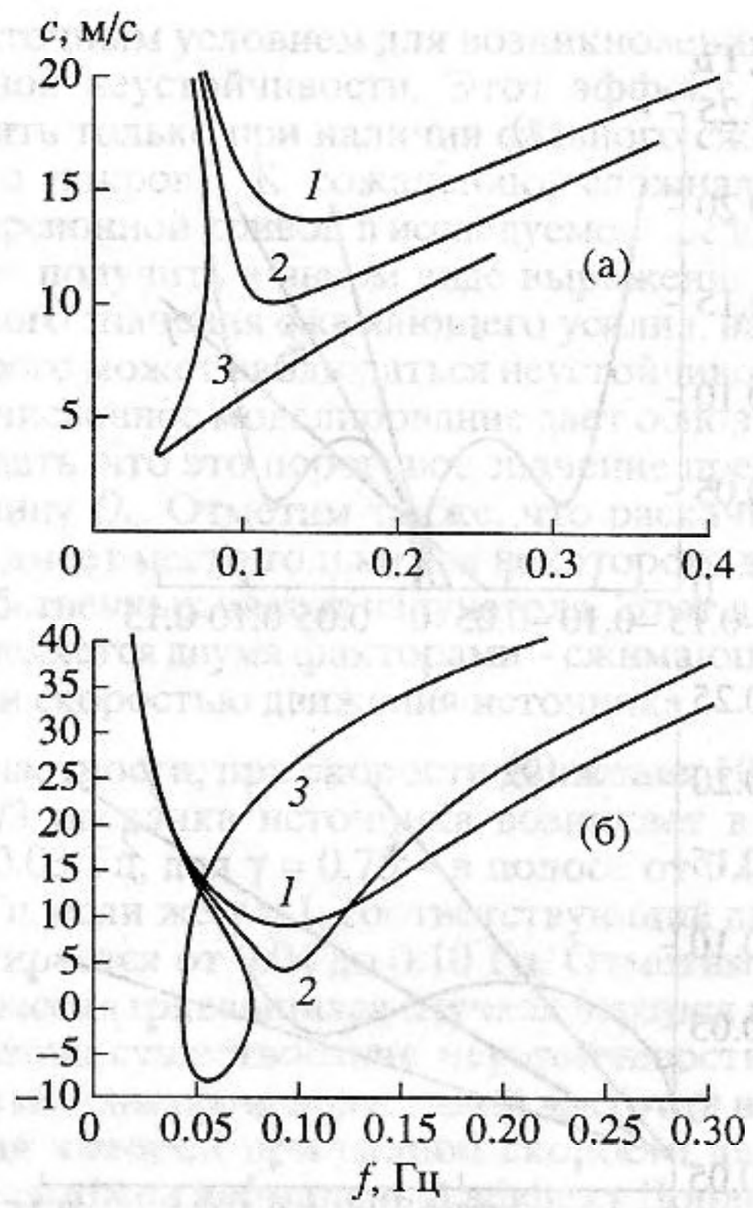

Рис. 1. Зависимости фазовой (а) и групповой (б) скорости изгибно-гравитационной волны от частоты при различном сжатии ледяного покрова: *1* – $\gamma = 0$; *2* – $\gamma = 0.5$; *3* – $\gamma = 0.95$. Расчеты проводились для следующих значений параметров среды: $h = 1$ м; $E = 2 \times 10^9$ Па; $\rho = 900$ кг/м^3; $\nu = 0.33$; $g = 9.81$ м/с^2; $\rho_1 = 1020$ кг/м^3.

Оценить интеграл (7) можно с помощью теории вычетов. Подынтегральная функция в (7) имеет полюса в точках, определяемых условиями:

$$\Delta(kV + \Omega, k) = 0; \quad \Delta(kV - \Omega, k) = 0.$$

Напомним, что уравнение $\Delta(\omega, k) = 0$ описывает дисперсионные свойства среды, а соотношения: $\omega = kV + \Omega$; $\omega = kV - \Omega$ являются уравнениями кинематических инвариантов для нормального и аномального эффектов Доплера соответственно. Поэтому частоты и волновые числа генерируемых волн определяются из условий пересечения дисперсионной кривой и прямых кинематических инвариантов. Первый член в формуле (7) описывает вклад в поле нормального, а второй – аномального эффекта Доплера.

Поскольку дисперсия оказывает определяющее влияние на характеристики доплеровского поля, рассмотрим подробнее частотные зависимости фазовой и групповой скоростей. Соответствующие кривые приведены на рис. 1. Расчеты проводились при трех различных значениях параметра $\gamma = Q/Q_{cr}$, где $Q_{cr} = 2\sqrt{Dg\rho}$ – сжимающее усилие, при котором пластина теряет устойчивость [12].

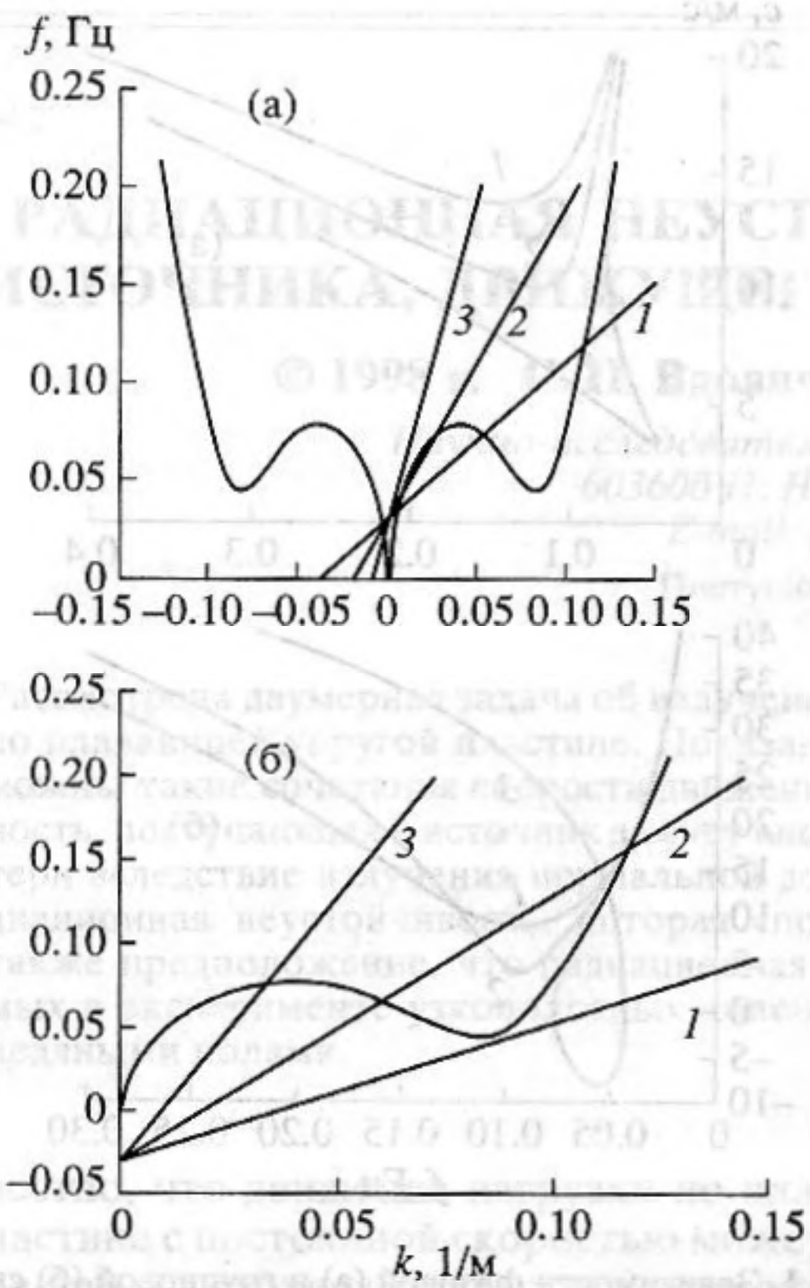

Рис. 2. Взаимное расположение дисперсионной кривой и прямых кинематического инварианта при нормальном (а) и аномальном (б) эффектах Доплера: *1* – $V = 5$ м/с, *2* – $V = 10$ м/с, *3* – $V = 20$ м/с.

Численный анализ показывает, что при повышении значения γ минимальная фазовая скорость постепенно уменьшается, а при выполнении условия $\gamma \geq 1$ вообще достигает нуля. Начиная же с некоторого значения Q_0, зависимость фазовой скорости от частоты становится неоднозначной – дисперсионная зависимость фактически распадается на три ветви (см. кривую *3* рис. 1б). Численные расчеты позволяют утверждать, что Q_0 составляет около 60% от величины Q_{cr}.

Особый интерес в подобных задачах представляет поведение групповой скорости [8]. Минимальная групповая скорость также уменьшается при увеличении сжатия, однако форма кривых еще сложнее, чем для фазовой скорости. Если сжимающее усилие меньше Q_0, то влияние сжатия выражается лишь в уменьшении минимальной групповой скорости (ср. кривые *1*, *2*). В противном случае возникает обратная волна – для некоторого диапазона частот групповая скорость становится меньше нуля, и одному значению временнóй частоты соответствуют три волны с разными характеристиками, а дисперсионная зависимость приобретает характерную петлеобразную форму (случай *3* на рис. 1б).

Перейдем к расчету мощности излучения. В соответствии с основной теоремой о вычетах запишем формулу для смещения льда:

$$W(x,t) = \frac{iq_0}{2}\left\{\sum_{k=1}^{K}\frac{k_k\exp[-i\Omega t + ik_k(x-Vt)]}{\left.\dfrac{d\Delta(kV+\Omega,k)}{dk}\right|_{k=k_k}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{L}\frac{k_l\exp[i\Omega t + ik_l(x-Vt)]}{\left.\dfrac{d\Delta(kV-\Omega,k)}{dk}\right|_{k=k_l}}\right\}, \quad x - Vt > 0,$$

$$W(x,t) = -\frac{iq_0}{2}\left\{\sum_{m=1}^{M}\frac{k_m\exp[-i\Omega t + ik_m(x-Vt)]}{\left.\dfrac{d\Delta(kV+\Omega,k)}{dk}\right|_{k=k_m}} + \right. \tag{8}$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{N}\frac{k_n\exp[i\Omega t + ik_n(x-Vt)]}{\left.\dfrac{d\Delta(kV-\Omega,k)}{dk}\right|_{k=k_n}}\right\}, \quad x - Vt < 0,$$

где K и M – число волн, опережающих источник и отстающих от источника, при нормальном эффекте Доплера, L и N – число волн, опережающих источник и отстающих от источника, при аномальном эффекте Доплера.

Количество излучаемых волн зависит как от частоты источника, так и от скорости его движения, причем аномальный эффект Доплера имеет место лишь для скоростей, больших некоторого порогового значения. Тщательный анализ показывает, что характер такой зависимости и максимально возможное количество излучаемых волн определяются соотношением между собственной частотой источника Ω и положением на частотной оси экстремумов функции $f(k)$, где $f = \alpha/2\pi$.

Для примера на рис. 2а приведены дисперсионная кривая и три прямые кинематических инвариантов для частоты источника 0.03 Гц и трех скоростей движения. Из рисунка видно, что при заданной частоте источника изменение скорости приводит к изменению числа излучаемых волн, кроме того, может измениться и характер некоторых волн – возможно превращение прямой волны в обратную и наоборот. Так, при скорости движения 5 м/с за счет нормального эффекта Доплера генерируются четыре волны, одна из которых обратная (этой волне соответствует точка пересечения на падающем участке дисперсионной зависимости). Две волны обгоняют источник (их групповые скорости больше скорости движения), и две отстают от него. Увеличение скорости V до 10 м/с приводит к трансформации обратной волны в прямую, но количество волн не изменяется. Наконец, при $V = 20$ м/с возбуждаются толь-

ко две волны (вторая точка пересечения выходит за пределы рисунка).

Аналогичный график с прямыми кинематического инварианта для аномального эффекта Доплера изображен на рис. 2б. Аномальный эффект Доплера при любой скорости движения, превышающей пороговую, обуславливает излучение двух волн, одна из которых может быть обратной.

Из вышесказанного ясно, что при заданной частоте нагрузки в зависимости мощности, теряемой источником вследствие нормального эффекта Доплера, от скорости движения может возникнуть резкий минимум. Этот минимум должен располагаться в пределах диапазона скоростей, где происходит уменьшение числа волн от четырех до двух. Аналогично минимум должен существовать и в зависимости мощности от собственной частоты источника (при заданной скорости V) в окрестности частоты, где происходит уменьшение числа волн. Поскольку при аномальном эффекте Доплера в исследуемой среде при любых значениях V и Ω генерируются две волны, можно надеяться на возникновение радиационной неустойчивости при описанных выше режимах движения.

В заключение применим известную формулу для средней за период $T = 2\pi/\Omega$ мощности, приходящейся на единицу длины источника:

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} q^*(x,t)\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}dx\right\}, \qquad (9)$$

где * – знак комплексного сопряжения. Комбинируя соотношения (8), (9), получаем окончательное выражение для мощности:

$$P = \frac{q_0^2\Omega}{2}\left[\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\left.\dfrac{d\Delta(kV+\Omega,k)}{dk}\right|_{k=k_k}} + \sum_{l=1}^{L}\frac{1}{\left.\dfrac{d\Delta(kV+\Omega,k)}{dk}\right|_{k=k_l}} - \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{\left.\dfrac{d\Delta(kV+\Omega,k)}{dk}\right|_{k=k_m}} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\left.\dfrac{d\Delta(kV+\Omega,k)}{dk}\right|_{k=k_n}}\right]. \qquad (10)$$

Анализ результатов расчетов, выполненных с использованием формулы (10), показал, что наличие анизотропии является необходимым, но не достаточным условием для возникновения радиационной неустойчивости. Этот эффект удалось выявить только при наличии сильного сжатия ледяного покрова. К сожалению, сложная форма дисперсионной кривой в исследуемой среде не позволяет получить в явном виде выражение для порогового значения сжимающего усилия, начиная с которого может наблюдаться неустойчивость. Однако численное моделирование дает основания утверждать, что это пороговое значение превышает величину Q_0. Отметим также, что раскачка пластины имеет место только для некоторого диапазона собственных частот излучателя. Этот диапазон определяется двумя факторами – сжимающим усилием и скоростью движения источника.

В частности, при скорости движения 10 м/с для $\gamma = 2/3$ раскачка источника возникает в полосе 0.01–0.03 Гц, для $\gamma = 0.75$ – в полосе от 0.01 Гц до 0.05 Гц, если же $\gamma = 1$, соответствующий диапазон простирается от 0.04 до 0.10 Гц. Отметим, что во всех рассматривавшихся случаях верхняя граница диапазона существования неустойчивости совпадает с максимально допустимой частотой источника, для которой при данной скорости движения еще возможен аномальный эффект Доплера (это означает, что при увеличении сжимающего усилия и/или скорости движения верхняя граница диапазона сдвигается в область высоких частот). Для нижней границы диапазона определить однозначно связь со скоростью движения и сжимающим усилием не удается. Тем не менее, можно утверждать, как и предполагалось выше, что при заданной скорости движения нижняя граница данного диапазона лежит в той области частот источника, где происходит изменение числа излучаемых волн.

Результаты проведенного анализа указывают на возможность радиационной неустойчивости при движении по сжатой пластине флуктуирующего источника типа атмосферного фронта. В этом случае по мере движения будет происходить изменение временнóго спектра флуктуаций давления. Амплитуда части спектральных компонент будет падать вследствие потерь на излучение, в то же время для некоторого частотного диапазона возможен рост амплитуды давления, обусловленный радиационной неустойчивостью и связанной с ней трансформацией энергии поступательного движения в энергию осцилляций. В результате можно ожидать возникновения излучения с достаточно узким спектром, по характеристикам которого можно судить о напряженном состоянии ледяного покрова.

Возможность возникновения радиационной неустойчивости следует принимать во внимание и при обеспечении безопасности ледяных переправ и взлетно-посадочных полос. В настоящее время при определении опасных режимов движения

предполагается, что для движущегося транспортного средства доминирующим является черенковский механизм генерации. В связи с этим считается, что наиболее опасным является движение с резонансной скоростью, равной минимальной фазовой скорости изгибно-гравитационных волн. При этом игнорируется возможность существования переменной составляющей силовой нагрузки. Учет этой составляющей позволяет выявить дополнительные резонансные скорости движения, которые при любой собственной частоте превышают минимальную фазовую скорость. С другой стороны, значение этих резонансных скоростей дает возможность эффективного разрушения ледяного покрова.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-05-65643).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beltaos S.* Field studies on the response of floating ice sheets to moving loads // Can. J. Civ. Eng. 1981. V. 8. № 1. P. 1–8.
2. *Davys J.W., Hosking R.J., Sneyd A.D.* Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate // J. Fliid Mech. 1985. V. 158. P. 269–287.
3. *Takizawa T.* Response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load // J. Geophys. Res. 1988. V. 93C. № 5. P. 5100–5112.
4. *Squire V.A., Robinson W.H., Haskell T.G. et al.* Dynamic strain response of lake and sea ice to moving loads // Cold Reg. Sci. and Tachnol. 1985. V. 11. № 2. P. 123–139.
5. *Schulkes R.M.S.M., Sneyd A.D.* Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load // J. Fluid Mech. 1988. V. 186. P. 25–46.
6. *Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J.* Moving loads on ice plates // In: Solid mechanics and its applications. V. 45. Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1996. 230 p.
7. *Kerr A.D.* Bearing cepacity of floating ice covers cubjected to static, moving, and oscillatory loads // Applied Mechanics Reviews. 1996. V. 49. № 11. P. 463–476.
8. *Франк И.М.* Изучение Вавилова–Черенкова: Вопросы теории. М.: Наука, 1988. 288 с.
9. *Тамойкин В.В.* О реакции излучения при движении заряда в периодически неоднородной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. № 3. С. 432–441.
10. *Гапонов-Грехов А.В., Долина И.С., Островский Л.А.* Аномальный эффект Доплера и радиационная неустойчивость движения осцилляторов в гидродинамике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268. № 4. С. 827–831.
11. *Быкова Т.В., Вдовиченко С.П., Гущин В.В.* Эффект Доплера при движении источника по плавающей пластине // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 3. С. 437–442.
12. *Kerr A.D.* The critical velocities of a load moving on a floating ice plate that is subjected to in-plane forces // Cold Reg. Sci. and Technol. 1983. V. 6. № 3. P. 267–274.

Radiation Instability of a Pure Tone Source Moving on a Floating Plate

S. P. Vdovichenko, V. V. Gushchin, and V. V. Tamoikin

The two-dimensional problem on the radiation of a pure tone source moving steadily on a floating elastic plate is considered. It is shown that, in the presence of compressive forces applied to the plate, some combinations of the speed of motion and the natural frequency of the source correspond to conditions, at which the power arriving at the source because of the anomalous Doppler effect can compensate for the radiation loss due to the normal Doppler effect. As a result, a radiation instability develops, which may cause the fracture of the plate. It is suggested that the radiation instability is responsible for the generation of narrow-band oscillations observed in the full-scale studies of atmospheric fronts passing over compressed ice fields.