АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1998, том 44, № 5, с. 640–647

УДК 534.232:534.286

К ТЕОРИИ СОСТАВНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВИБРАТОРА

© 1998 г. В. Д. Нацик, П. П. Паль-Валь, С. Н. Смирнов

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
310164 Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: smirnov@ilt.kharkov.ua

Поступила в редакцию 23.07.97 г.

Проанализированы вынужденные продольные колебания двойного вибратора стержневого типа с пьезоэлектрическим возбудителем. Получено выражение для электрического импеданса вибратора, при выводе которого использованы общие соотношения теории линейной наследственной упругой среды, и не накладывались существенные ограничения на геометрические параметры и вид частотной дисперсии комплексных модулей упругости, диэлектрической проницаемости и пьезоэлектрических коэффициентов. Детально обсуждены резонансные свойства пьезоэлемента и составного вибратора в целом. Получена и проанализирована связь нескольких низших резонансных частот и значений активного электрического сопротивления при резонансах с упругими и диссипативными параметрами элементов вибратора. Результаты анализа представлены в виде формул и алгоритмов, пригодных для практического использования.

ВВЕДЕНИЕ

В современных акустоэлектронных устройствах, работающих на частотах порядка 10^4–10^5 Гц, широко используются продольные колебания составных пьезоэлектрических вибраторов стержневого типа. Возможности создания новых высокоэффективных устройств и методов на базе составных вибраторов в значительной степени зависят от уровня теоретических разработок. Между тем даже теория двойного составного вибратора в настоящее время еще далека от завершения.

В большинстве теоретических работ авторы ограничиваются приближением тонкого стержня и анализируют, как правило, лишь основную частоту вибратора, которой соответствует длина волны, намного превосходящая поперечные размеры стержня. Поэтому актуальной задачей является построение теории вибратора для более высоких частот и коротких длин волн. Вторая важная задача – корректный учет диссипативных свойств всех элементов вибратора при расчете его характеристик. Основные соотношения для резонансных частот двойного и тройного составных вибраторов без потерь известны [1–4], но вопрос о влиянии потерь на спектр резонансных частот изучен слабо: связь электрического или механического иммитанса с диссипативными характеристиками элементов составного вибратора найдена только в нескольких частных случаях [5–9]. Практическое использование результатов указанных работ затруднено также тем, что в них далеко не всегда указана явная связь измеряемых электрических характеристик вибратора с геометрическими и материальными параметрами его частей.

Цель настоящей работы – последовательное теоретическое описание вынужденных колебаний двойного составного стержневого вибратора, учитывающее названные выше аспекты.

1. ФОРМУЛИРОВКА И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим конкретную конструкцию вибратора (см. рис. 1). Вибратор состоит из двух ориентированных вдоль оси x стержней прямоугольного сечения, находящихся в акустическом контакте через торцевые поверхности; один стержень – пьезоэлемент (ПЭ), являющийся активным электромеханическим возбудителем, второй стержень – пассивная часть вибратора (ПЧВ). Далее будем считать длины стержней l_s в несколько раз больше их поперечных размеров a_s и b_s ($s = 1, 2$), а эти размеры – величинами одного порядка. Продольные колебания в вибраторе возбужда-

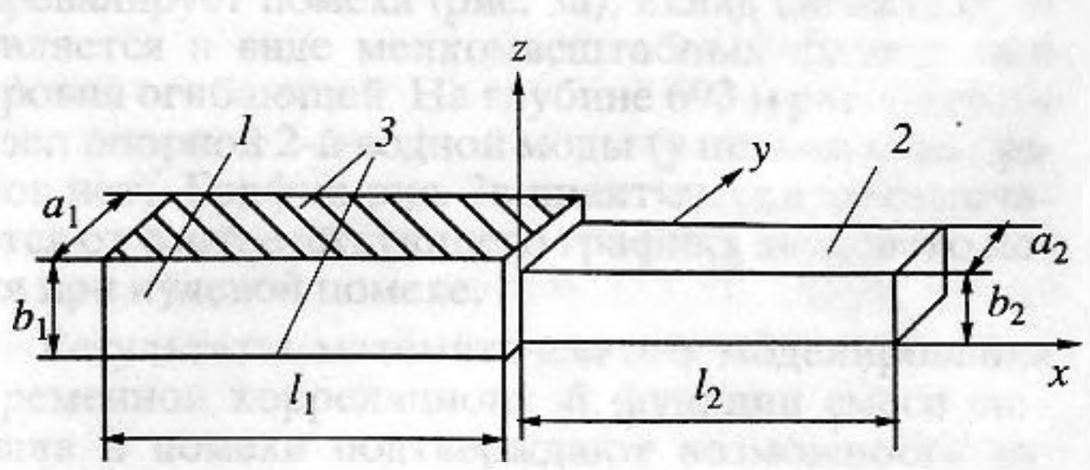

Рис. 1. Двойной составной пьезовибратор для тестирования акустических параметров материалов на продольных волнах: *1* – ПЭ, *2* – ПЧВ (образец), *3* – электроды.

ются поперечным электрическим полем, которое создается разностью потенциалов между двумя идентичными пленочными металлическими электродами, нанесенными на боковые поверхности ПЭ, перпендикулярные оси z. Будем считать потери энергии в электродах и на излучение акустических волн в окружающую среду пренебрежимо малыми.

Учет диссипативных свойств элементов вибратора, не связанный с модельными представлениями о конкретных микромеханизмах рассеяния энергии, может быть реализован в рамках теории линейной наследственной пьезоупругой среды [10, 11]. Если рассматривать типичный для работы пьезопреобразователей установившийся режим вынужденных гармонических колебаний, то зависимость физических величин от времени описывается множителем $e^{i\omega t}$ (круговая частота ω – вещественный параметр задачи), а материальные уравнения, определяющие взаимосвязь электрических и механических полей в элементах вибратора, формулируются в виде соотношений для амплитуд монохроматических компонент [11].

Достаточно полное аналитическое описание составного вибратора можно получить в предельном случае, когда длины стержней l_s и длины акустических волн много больше поперечных размеров стержней a_s, b_s (см. монографии [11–14]). В этом приближении материальные соотношения в общепринятой форме записи имеют следующий вид:

$$u = s_{11}^{\mathscr{E}}\sigma + d_{31}\mathscr{E}_3, \qquad (1)$$

$$D_3 = d_{31}\sigma + \varepsilon_{33}^{\sigma}\mathscr{E}_3. \qquad (2)$$

Здесь $\sigma \equiv \sigma_{xx}$, $u \equiv u_{xx} = \partial\xi/\partial x$, $s_{11}^{\mathscr{E}}$, $\varepsilon_{33}^{\sigma}$, d_{31} – компоненты тензоров упругих напряжений, деформации, упругой податливости при постоянном поле, диэлектрической проницаемости, при постоянных напряжениях и пьезоэлектрических коэффициентах соответственно; ξ – x-компонента вектора смещения; $\mathscr{E}_3$, D_3 – компоненты векторов напряженности и индукции электрического поля в ПЭ. Амплитуды полей и материальные параметры $s_{11}^{\mathscr{E}}$, $\varepsilon_{33}^{\sigma}$, d_{31} в (1), (2) являются комплексными функциями частоты ω. Наличие мнимых частей у $s_{11}^{\mathscr{E}}$, $\varepsilon_{33}^{\sigma}$, d_{31} обусловлено диссипативными свойствами сред. При таком описании потери энергии в пьезоупругой среде можно разделить на механические, диэлектрические и пьезоэлектрические. Для упрощения записи ниже будем опускать верхние индексы у величин $s_{11}^{\mathscr{E}}$, $\varepsilon_{33}^{\sigma}$. Условимся, что далее одиночный нижний индекс у неэлектрических величин отмечает элемент вибратора: величины, относящиеся к ПЭ, отмечены индексом $s = 1$, а относящиеся к ПЧВ, индексом – $s = 2$.

Низкочастотные процессы в вибраторе описываются уравнением: $\partial D_3/\partial z = 0$ и динамическим уравнением теории упругости:

$$\rho\omega^2\xi + \partial\sigma/\partial x = 0, \qquad (3)$$

где ρ – плотность среды. Граничные условия для механических величин, согласно стандартному подходу при описании составных вибраторов, определяются предположением, что стержень *1* нагружен на торцах акустическими импедансами Z_- и Z_+, а стержень *2* – импедансами Z_+ и 0. С учетом общепринятого правила знаков [14] имеем

$$\left.\frac{S_1}{i\omega}\left(\frac{\sigma_1}{\xi_1}\right)\right|_{x=-l_1} = Z_-, \quad \left.-\frac{S_1}{i\omega}\left(\frac{\sigma_1}{\xi_1}\right)\right|_{x=0} = Z_+,$$
$$\sigma_2|_{x=l_2} = 0, \quad \left.\frac{S_2}{i\omega}\left(\frac{\sigma_2}{\xi_2}\right)\right|_{x=0} = -Z_+, \qquad (4)$$

где $S_s = a_s b_s$ $(s = 1, 2)$ – площади поперечного сечения стержней. Заметим, что граничные условия (4) очевидны в случае, когда поперечные размеры стержней одинаковы, но требует специального обоснования, если $a_1 \neq a_2$ и (или) $b_1 \neq b_2$. Надежная теоретическая оценка погрешности, обусловленной неравенством сечений, затруднена, однако, имеются экспериментальные исследования [6, 8], свидетельствующие, что и при значительном отличии S_1 и S_2 в ряде случае погрешность остается в пределах, приемлемых для практики.

В ограниченном с двух сторон стержне смещение описывается в общем случае суперпозицией прямой и обратной волн:

$$\xi_s = A_s\sin(k_s x) + B_s\cos(k_s x), \quad s = 1, 2, \qquad (5)$$

где $k_s = q_s - i\gamma_s$ – комплексная постоянная распространения, q_s – волновое число, γ_s – коэффициент поглощения, A_s, B_s – константы.

Недостатки и пределы применимости одномерного рассмотрения хорошо известны. В частности, стандартная скалярная модель позволяет описывать лишь одну ветвь колебательного спектра изолированного стержня, а именно первую продольную нормальную моду. При этом подстановка (5) в уравнения движения (3) приводит к соотношению $\rho_s\omega^2 = E_s k_s^2$, формально совпадающему с линейным законом дисперсии для собственных колебаний стержней (в действительности связь между частотой и волновым числом нелинейна вследствие частотной дисперсии модуля Юнга E_s).

Чтобы расширить пределы применимости скалярной модели в область более коротких волн, учтем дисперсию первой продольной нормальной моды, обусловленную конечными значениями отношений поперечных размеров стержней к длине звуковой волны. Для этого постулируем, что смещения элементов стержней по-прежнему описы-

ваются выражением (5), но соотношение между частотой и волновым числом для каждого из стержней становится нелинейным: $\rho_s\omega^2 = E_s f_s(k_s)$, где $f_s(k_s) \neq k_s^2$. Такое усложнение целесообразно в первую очередь при анализе тех случаев, когда использование скалярной модели реально обосновано. В частности, предположение о возможности разделения волн в стержнях на продольные и поперечные означает, что модель может применяться для описания изотропных упругих сред, а также существенно анизотропных сред, если ось x совпадает (или близка) с особым направлением для упругих волн в кристаллах, например, с одной из осей симметрии кристалла. Можно показать, что в вышеназванных случаях f_s будет функцией от k^2 и следовательно ω^2 может быть представлена в виде ряда по степеням k^2. Мы исследуем простейшее приближение, учитывающее первые два члена этого разложения, и представим "закон дисперсии" в виде:

$$\omega^2 = E_s(\omega)k_s^2(1 - \beta_s k_s^2)/\rho_s, \quad s = 1, 2. \qquad (6)$$

Здесь $E_s = E_s' + iE_s''$ – модуль Юнга для растяжения–сжатия в направлении оси x, а β_s – некоторые коэффициенты, зависящие от материальных параметров стержней, фигурирующих в соотношениях (1)–(2).

Оценку величины β_2 можно получить методом Рэлея [10, 15]. Для упругого изотропного стержня имеем

$$\beta_2 = \nu_2^2 \frac{1}{S_2}\int_{S_2} r^2 dS = \frac{1}{12}\nu_2^2(a_2^2 + b_2^2), \qquad (7)$$

где ν_2 – коэффициент Пуассона. Такой же порядок величины можно ожидать и в анизотропном случае. Для ПЭ простую надежную оценку β_1 получить затруднительно, однако из соображений размерности ясно, что, если пренебречь пространственной неоднородностью электрических полей, то для β_1 получится выражение, близкое по структуре к (7): вместо ν_2^2 в этом выражении будет стоять некоторая функция от безразмерных комбинаций упругих модулей, перенормированных константами электромеханической связи, которая в случае слабой электромеханической связи и изотропной среды переходит в ν_1^2. Заметим, что в приложениях, учитывая малость объемного последействия, как правило, можно считать ν вещественной постоянной [10]. Поэтому, целесообразно рассматривать β_s как вещественные феноменологические параметры элементов вибратора, которые подлежат экспериментальному определению.

Пределы применимости формулы (6) можно выяснить, используя известное аналитическое решение задачи о колебаниях стержня круглого поперечного сечения. В [10] показано, что приближение Рэлея хорошо аппроксимирует точное дисперсионное соотношение Похгаммера [13], если длина волны порядка или больше диаметра стержня. Чтобы обеспечить взаимно однозначное соответствие между величинами ω и k при отсутствии диссипации, наложим формальные ограничения:

$$\beta_s q_s^2 \le 0.5, \quad s = 1, 2. \qquad (8)$$

Для квадратного сечения $a_s = b_s$ имеем оценку $\beta_s q_s^2 = \nu_s^2 a_s^2 q_s^2/6$; для большинства материалов $\nu \approx$ $\approx 1/3$, и условие (8) будет выполнено, если $a_s q_s < 5$. Заметим, что если $a_s q_s < \pi$, то $\beta_s q_s^2 \ll 1$, т.е. во многих случаях поправка к линейному закону дисперсии мала.

Комплексная форма записи соотношения (6) эквивалентна системе двух уравнений, связывающих действительные величины ρ, ω, β и компоненты E', E'', q, γ комплексных параметров. Любые пять из вышеперечисленных величин могут быть заданы произвольно, а две оставшиеся определятся из (6). Если, например, разрешить уравнения (6) относительно E' и E'', получим

$$E' = \rho\omega^2[(q^2 - \gamma^2) - \beta(q^4 - 6q^2\gamma^2 + \gamma^4)]F^{-1}(q, \gamma), \qquad (9)$$

$$E'' = 2\rho\omega^2 q\gamma[1 - 2\beta(q^2 - \gamma^2)]F^{-1}(q, \gamma), \qquad (10)$$

$$F(q, \gamma) = (q^2 + \gamma^2)^2 \times$$

$$\times[1 - 2\beta(q^2 - \gamma^2) + \beta^2(q^2 + \gamma^2)^2].$$

Видно, что условие (8) гарантирует неотрицательность величин F и E''. Чтобы выполнялось условие $E' > 0$, на величину коэффициента поглощения следует наложить следующее ограничение:

$$3\gamma^2 + 1/2\beta - [(1/2\beta + 2\gamma^2)^2 + 4\gamma^4]^{1/2} < q^2. \qquad (11)$$

Если условие (11) не выполняется, то стационарный режим незатухающих со временем колебаний становится невозможным, и в этом случае частоту ω в (6) следует считать комплексным параметром.

В случае $(\gamma/q)^2 \ll 1$, $\beta q^2 \ll 1$, справедливы формулы:

$$E' \approx \rho\omega^2 q^{-2}[1 - 3(\gamma/q)^2 + \beta q^2], \qquad (12)$$

$$E'' \approx 2\rho\omega^2\gamma q^{-3}[1 - 2(\gamma/q)^2 - \beta^2 q^4]. \qquad (13)$$

Используя (1)–(5), стандартным образом [11–14], получаем электрический адмитанс Y_e вибратора:

$$Y_e = \frac{i\omega a_1 l_1}{b_1}\left\{\varepsilon_{33} - d_{31}^2 E_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{d_{31}^2 E_1 [2Z_1^2(1-\cos K_1) - iZ_1(Z_- + Z_+)\sin K_1]}{K_1[(Z_1^2 + Z_-Z_+)\sin K_1 - iZ_1(Z_- + Z_+)\cos K_1]}\right\}, \quad (14)$$

$$K_1 = k_1 l_1, \quad Z_1 = S_1 E_1 k_1/\omega.$$

Следует подчеркнуть, что при получении формулы (14) связи между ω и k не конкретизировались.

Формула (14) имеет вид выражения, используемого обычно в литературе для электрических импедансов акустически нагруженных пьезоэлектрических пластин [11, 16]. Выражение для Y_e, полученное в [7], после ряда преобразований формально также можно привести к виду (14). Однако в этой работе при вычислении вещественных и мнимых частей импедансов акустических нагрузок Z_- и Z_+ все материальные параметры считались вещественными величинами, что существенно обедняет полученные в ней результаты.

Представим комплексные материальные параметры и их комбинации с помощью соотношений:

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon'_{33}(1 - i\delta_\varepsilon),$$

$$d_{31}^2 E_1 = (d_{31}^2 E_1)'(1 + i\delta_k), \quad \delta_\varepsilon, \delta_k \geq 0$$

и приведем (14) к виду:

$$Y_e = \omega C^\sigma(\delta_\varepsilon + k_{31}^2 \delta_k) + Y_{ea}, \quad (15)$$

$$Y_{ea} = i\omega(1-k_{31}^2)C^\sigma\{1 + \{k_{31}^2(1+i\delta_k) \times$$
$$\times [2Z_1^2(1-\cos K_1) - iZ_1(Z_- + Z_+) \times$$
$$\times \sin K_1]\}/\{(1-k_{31}^2)K_1 \times \quad (16)$$
$$\times [(Z_1^2 + Z_-Z_+)\sin K_1 - iZ_1(Z_- + Z_+)\cos K_1]\}\},$$

$$k_{31}^2 = (d_{31}^2 E_1)'/\varepsilon'_{33}, \quad C^\sigma = a_1 l_1 \varepsilon'_{33}/b_1,$$

где k_{31}^2 – вещественный коэффициент электромеханической связи; C^σ – емкость свободного пьезоэлектрического стержня. Выражение (15) показывает, что эквивалентная электрическая схема вибратора может быть представлена в виде параллельного соединения двух активных сопротивлений $R_\varepsilon = (\omega C^\sigma \delta_\varepsilon)^{-1}$, $R_k = (\omega C^\sigma k_{31}^2 \delta_k)^{-1}$ и импеданса Z_{ea} (см. рис. 2). Активные сопротивления описывает первое слагаемое в (15): присутствие

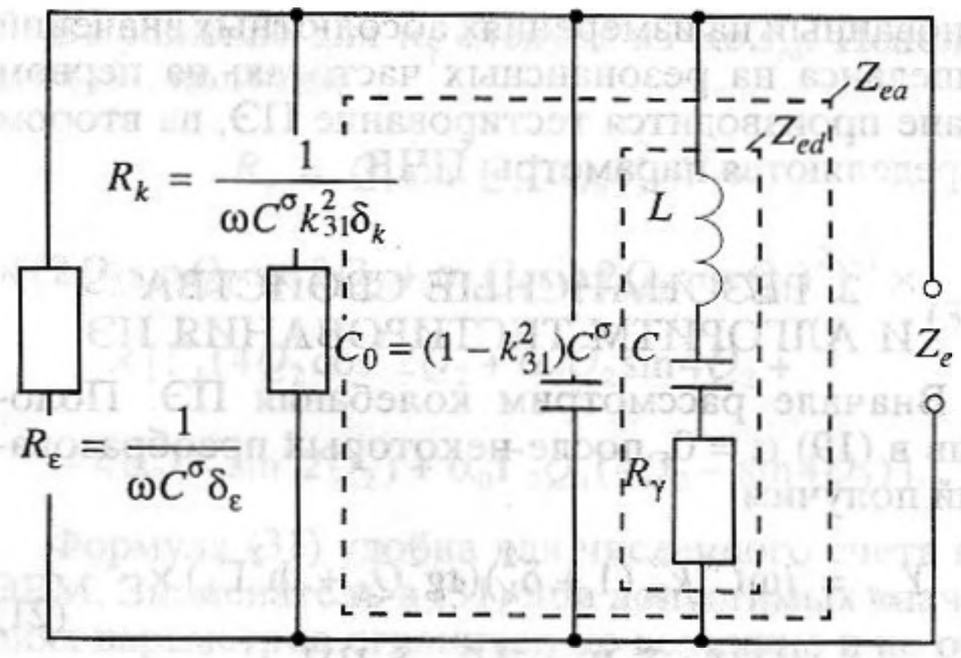

Рис. 2. Эквивалентная электрическая схема двойного составного пьезовибратора. Структура импеданса Z_{ed} показана для частот, близких к частотам последовательного резонанса.

сопротивления R_ε обусловлено диэлектрическими, а R_k – пьезоэлектрическими и механическими потерями в ПЭ. Импеданс Z_{ea} в ряде случаев удобно представлять в виде параллельного соединения емкости $C^\sigma(1-k_{31}^2)$ и импеданса $Z_{ed} \equiv Y_{ed}^{-1}$, где

$$Y_{ed} = i\omega C^\sigma k_{31}^2(1+i\delta_k) \times$$
$$\times \frac{2Z_1^2(1-\cos K_1) - iZ_1(Z_- + Z_+)\sin K_1}{K_1[(Z_1^2 + Z_-Z_+)\sin K_1 - iZ_1(Z_- + Z_+)\cos K_1]}, \quad (17)$$

который учитывает также вклад в электрический импеданс акустических нагрузок ПЭ.

Подставим в (17) $Z_- = 0$ и значение Z_+, вытекающее из решения задачи для стержня *2*:

$$Z_+ = iS_2 E_2 k_2 \operatorname{tg} K_2/\omega, \quad K_2 = k_2 l_2. \quad (18)$$

Используя затем (6), получаем адмитанс Y_{ed} двойного составного вибратора в виде функции от двух комплексных аргументов K_1 и K_2:

$$Y_{ed} = i\omega C^\sigma k_{31}^2(1+i\delta_k)\frac{2K_2\operatorname{tg}(K_1/2) + \alpha K_1 \operatorname{tg} K_2}{K_1(K_2 + \alpha K_1 \operatorname{ctg} K_1 \operatorname{tg} K_2)}, \quad (19)$$

$$\alpha = \frac{M_2(1-\beta_1 K_1^2/l_1^2)}{M_1(1-\beta_2 K_2^2/l_2^2)}, \quad (20)$$

где M_s – масса соответствующего стержня.

Действительная и мнимая части импеданса Z_{ed} описываются громоздкими выражениями, зависящими от четырех аргументов:

$$Q_1 = q_1 l_1/2, \quad Q_2 = q_2 l_2/2,$$
$$\Gamma_1 = \gamma_1 l_1/2, \quad \Gamma_2 = \gamma_2 l_2/2.$$

Ниже мы обсудим поэтапный метод определения параметров элементов вибратора E'_s, E''_s, γ_s, β_s,

основанный на измерениях абсолютных значений импеданса на резонансных частотах: на первом этапе производится тестирование ПЭ, на втором определяются параметры ПЧВ.

2. РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА И АЛГОРИТМ ТЕСТИРОВАНИЯ ПЭ

Вначале рассмотрим колебания ПЭ. Положив в (19) $\alpha = 0$, после некоторых преобразований получим

$$Y_{ed} = i\omega C^{\sigma} k_{31}^2 (1+\delta_k^2)(\mathrm{tg}^2 Q_1 + \mathrm{th}^2 \Gamma_1) \times \\ \times [(H + \delta_k P) + i(P - \delta_k H)]^{-1}, \quad (21)$$

где

$$H = Q_1 \mathrm{tg} Q_1 [1 - \mathrm{th}^2 \Gamma_1] + \Gamma_1 \mathrm{th}\Gamma_1 [1 + \mathrm{tg}^2 Q_1],$$

$$P = -\Gamma_1 \mathrm{tg} Q_1 [1 - \mathrm{th}^2 \Gamma_1] + Q_1 \mathrm{th}\Gamma_1 [1 + \mathrm{tg}^2 Q_1].$$

Последовательный динамический резонанс определяется условием $\mathrm{Im} Z_{ed} = 0$, которое можно преобразовать к следующему виду:

$$(Q_1 - \delta_k \Gamma_1)\sin 2Q_1 + (\Gamma_1 + \delta_k Q_1)\mathrm{sh}\, 2\Gamma_1 = 0, \\ Q_1 \neq \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \quad (22)$$

Последнее неравенство отражает тот факт, что значения $Q_1 = \pi n$ ни при каком значении Γ_1 не являются корнями уравнения $\mathrm{Im} Z_{ed} = 0$.

На частотах, близких к резонансным, импеданс Z_{ed} аналогичен импедансу последовательно соединенных индуктивности, емкости и активного сопротивления R_γ. Электрическая эквивалентная схема с сосредоточенными параметрами для этого случая представлена на рис. 2.

В отсутствие потерь из (22) получаем известное [11–13] условие резонанса:

$$Q_{1n}^{(0)} = \pi(2n-1)/2, \quad n = 1, 2, \ldots . \quad (23)$$

Поскольку мы предполагаем, что длина волны в ПЭ не меньше чем a_1 и b_1, то корректно рассматривать значения $n < l_1/\max(a_1, b_1) + 0.5$.

Из (22) следует, что в случае $\Gamma_1 \ll 1$, $\Gamma_1 \delta_k \ll 1$ поправки первого приближения к $Q_{1n}^{(0)}$ являются квадратичными по малым параметрам:

$$Q_{1n} = Q_{1n}^{(0)} + 2\Gamma_1^2/\pi(2n-1) + \Gamma_1 \delta_k. \quad (24)$$

Поправка второго приближения содержит малые параметры в четвертой степени.

Из (21), учитывая (22), находим величину R_γ при резонансе:

$$R_\gamma(\omega_{rn}) = (Q_{1n}\mathrm{sh}\, 2\Gamma_1 - \Gamma_1 \sin 2Q_{1n}) \times \\ \times [2\omega_{rn} k_{31}^2 C^{\sigma} (\sin^2 Q_{1n} + \mathrm{sh}^2 \Gamma_1)]^{-1}, \quad (25)$$

где ω_{rn} – частота динамического резонанса с номером n. В случае $\Gamma_1, \delta_k \ll 1$ условие резонанса (23), найденное в нулевом приближении, позволяет представить R_γ в линейном приближении по малым параметрам:

$$R_\gamma(\omega_{rn}) = \pi(2n-1)\Gamma_1 (2\omega_{rn} k_{31}^2 C^{\sigma})^{-1}, \\ n = 1, 2, \ldots . \quad (26)$$

Отметим важное обстоятельство: в выражение (26) явно не входит параметр δ_k. Зависимость от δ_k появится в поправках более высокого порядка малости. Представление R_γ, учитывающее третьи степени малых параметров, можно выписать, используя соотношение (24). В общем случае имеет место следующее правило: резонансные значения Q_{1n}, содержащие поправки порядка малости $2m$ по малым параметрам, позволяют представить R_γ с точностью порядка $2m+1$. При этом величина k_{31}^2 должна быть представлена с поправками порядка малости $2m$. При использовании формулы (26) следует определить k_{31}^2 в нулевом приближении, например, стандартным методом антирезонанса. Условие антирезонанса $\mathrm{Im} Y_{ea} = 0$ дает соотношение:

$$k_{31}^2 = Q_{an}/(Q_{an} - \mathrm{tg} Q_{an}). \quad (27)$$

Соотношение (26) позволяет получить оценку коэффициента поглощения с относительной погрешностью порядка Γ_1^2, что во многих практических случаях вполне приемлемо. Если ограничиться указанной точностью, то на основании проведенного анализа можно предложить относительно простую методику тестирования ПЭ, которая использует экспериментальные значения следующих параметров: двух резонансных частот ω_{rn}, ω_{rk} с номерами n и k, соответствующих им частот антирезонансов ω_{an}, ω_{ak}, активных сопротивлений $R_\gamma(\omega_{rn})$, $R_\gamma(\omega_{rk})$ и емкости C^{σ}.

1. Сначала определим параметры, характеризующие "закон дисперсии" (6), в котором положим $\gamma_1 = 0$. Записав формулу (6) для резонансных частот ω_{rn}, с учетом соотношений (23), найдем

$$E_1'(\omega_{rn}) = \rho_1 \omega_{rn}^2 l_1^2 [1 - \beta_1 \pi^2 (2n-1)^2/l_1^2]^{-1} \times \\ \times [\pi(2n-1)]^{-2};$$

$$\beta_1 = \left(\frac{l_1^2}{\pi^2}\right) \frac{(2n-1)^2 - (2k-1)^2 \Omega_{nk}}{(2n-1)^4 - (2k-1)^4 \Omega_{nk}},$$

$$k, n = 1, 2, \ldots, \quad k \neq n, \quad \Omega_{nk} = (\omega_{rn}/\omega_{rk})^2.$$

2. С помощью (6), учитывая условие (8), находим соответствующие антирезонансам значения

$$Q_{an} = l_1(8\beta_1)^{-1/2} \times$$

$$\times\{1 - [1 - 4\beta_1\rho_1\omega_{an}^2/E_1'(\omega_{rn})]^{1/2}\}^{1/2}.$$

3. По формуле (27) вычисляются значения $k_{31}^2(\omega_{an})$.

4. Используя (26), находим коэффициент поглощения:

$$\gamma_1(\omega_{rn}) = 4\omega_{rn}C^\sigma k_{31}^2(\omega_{an})R_\gamma(\omega_{rn})[\pi(2n-1)l_1]^{-1},$$

5. С помощью (13), учитывая (23), находим мнимую часть модуля:

$$E_1''(\omega_{rn}) = 2\rho_1\omega_{rn}^2 l_1^3\gamma_1(\omega_{rn}) \times$$

$$\times[1 - \beta_1^2\pi^4(2n-1)^4/l_1^4][\pi(2n-1)]^{-3}.$$

3. РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА СОСТАВНОГО ВИБРАТОРА И АЛГОРИТМ ТЕСТИРОВАНИЯ ПЧВ (ИЗУЧАЕМОГО ОБРАЗЦА)

Многие отмеченные выше закономерности сохраняются и для составного вибратора в целом. На частотах вблизи динамического резонанса справедлива эквивалентная схема, показанная на рис. 2, но с другими параметрами L, C, R_γ. Остаются в силе все выводы относительно порядка малости поправок в различных соотношениях. Так, чтобы найти R_γ в первом приближении по поглощению, следует использовать условие резонанса $\mathrm{Im}Z_{ed} = 0$ при отсутствии потерь энергии. Это условие получаем из (19), (20):

$$\frac{Q_2 + \alpha_0 Q_1 \mathrm{ctg}\,2Q_1 \mathrm{tg}\,2Q_2}{2Q_2 \mathrm{tg}\,Q_1 + \alpha_0 Q_1 \mathrm{tg}\,2Q_2} = 0, \quad (28)$$

где

$$\alpha_0(Q_1, Q_2) = \frac{M_2(1 - 4\beta_1 Q_1^2/l_1^2)}{M_1(1 - 4\beta_2 Q_2^2/l_2^2)}. \quad (29)$$

Легко проверить, что если $Q_1 = \pi n$ ($n = 1, 2, \ldots$), то условие (28) не выполняется ни при каком значении Q_2, и, следовательно, резонанс невозможен. С учетом этого условие резонанса можно записать в виде:

$$Q_2 \sin 2Q_1 \cos 2Q_2 + Q_1\alpha_0(Q_1, Q_2)\sin 2Q_2 \cos 2Q_1 = 0, \quad (30)$$

$$Q_1 \neq \pi n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Выражение для R_γ следует из $\mathrm{Re}Z_{ed}$. Используя (19), получим

$$R_\gamma = Q_1 \sin^2 Q_1[\omega_{rn}k_{31}^2 C^\sigma \times$$

$$\times(2Q_2 \sin Q_1 \cos 2Q_2 + \alpha_0 Q_1 \sin 2Q_2 \cos Q_1)^2]^{-1} \times \quad (31)$$

$$\times[\Gamma_1(4Q_2^2\cos^2 2Q_2 + \alpha_0 Q_2 \sin 4Q_2 +$$

$$+ 4\alpha_0^2 Q_1^2 \sin^2 2Q_2) + \alpha_0\Gamma_2 Q_1(4Q_2 - \sin 4Q_2)].$$

Формула (31) удобна для численного счета на ЭВМ. Знаменатель в (31) при допустимых значениях параметров ограничен по величине и не обращается в нуль при условиях резонанса, поэтому в (31) не возникает неопределенностей вида 0/0 или ∞/∞ при различных предельных переходах.

Можно указать два точных частных решения уравнения (30).

1. Уравнение (30) удовлетворяется, если

$$Q_{1n} = \pi(2n-1)/2, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (32)$$

$$Q_{2k} = \pi k/2, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad (33)$$

т.е. на длине l_1 ПЭ укладывается нечетное число полуволн, а на длине l_2 ПЧВ – любое целое число полуволн. Поскольку (32) совпадает с (23), то характерным признаком данного случая является совпадение резонансной частоты составного вибратора с одной из резонансных частот ненагруженного ПЭ. Подставив (32), (33) в (31), получим

$$R_\gamma(\omega_{nk}) = \pi(2n-1) \times$$

$$\times(2\omega_{nk}k_{31}^2 C^\sigma)^{-1}[\Gamma_1 + \alpha_0\Gamma_2(2n-1)/k], \quad (34)$$

где ω_{nk} – резонансная частота вибратора, соответствующая паре значений n, k. При $a_0 = 0$ выражение (34) переходит в (26).

2. Уравнение (30) удовлетворяется, если

$$Q_{1n} = \pi(2n-1)/4, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (35)$$

$$Q_{2k} = \pi(2k-1)/4, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad (36)$$

т.е. на длинах l_1, l_2 ПЭ и ПЧВ укладывается нечетное число четвертей длины волны. Сравнивая (35) и (23), заключаем, что первая резонансная частота составного вибратора будет ниже, чем первая резонансная частота ненагруженного ПЭ (в два раза, если $\beta_1 = 0$). Значительное изменение первой резонансной частоты обусловлено следующим обстоятельством: при условии (36) акустический импеданс (18) обращается в бесконечность, что эквивалентно заданию граничного условия жесткого закрепления торцевой поверхности $x = 0$ ПЭ. Вследствие этого условие (35) определяет резонансные частоты ПЭ, один торец которого свободен, а второй жестко закреплен.

Таблица

$l_2/\sqrt{S_2}$	E'_*, ГПа	E', ГПа	$(E' - E'_*)/E'_*$, %	$\Delta_* \times 10^5$	$\Delta \times 10^5$	$(\Delta - \Delta_*)/\Delta_*$, %	$\omega_r \times 10^{-5}$, c^{-1}
8.92	110.692	110.944	0.23	3.88	2.61	–32.7	4.98
1.69	98.833	103.926	5.15	1.25	2.43	94.4	23.4

Сопротивление при резонансе найдем, подставив (35), (36) в (31):

$$R_\gamma(\omega_{nk}) = \pi(\omega_{nk}k_{31}^2 C^\sigma)^{-1} \times \times[(2n-1)\Gamma_1 + (2k-1)\Gamma_2/\alpha_0]. \quad (37)$$

В физических исследованиях составной вибратор широко используется для изучения упругих свойств и внутреннего трения твердых тел. В этом случае роль ПЧВ играет изучаемый образец. Ниже предложена поэтапная методика вычисления характеристик ПЧВ, использующая экспериментальные значения двух резонансных частот ω_{rn}, ω_{rk} составного вибратора с номерами n и k, активных сопротивлений $R_\gamma(\omega_{rn})$, $R_\gamma(\omega_{rk})$ и результаты тестирования ПЭ.

1. Используя (6), определяем Q_{1n} и Q_{1k} ($Q_{1n} = l_1 q_1(\omega_{rn})/2$):

$$Q_{1n} = l_1(8\beta_1)^{-1/2}\{1 - [1 - 4\beta_1\rho_1\omega_{rn}^2/E_1'(\omega_{rn})]^{1/2}\}^{1/2}.$$

2. Для определения значений параметра β_2 и вспомогательных величин Q_{2n} и Q_{2k} следует решить систему четырех уравнений, включающую уравнения (30) и (6), записанные для двух резонансных частот ω_{rn}, ω_{rk}. Эта система уравнений может быть решена численно стандартным методом последовательных приближений. В качестве начального приближения выбираем $\beta_2 = 0$, подставляем в α_0 и находим корни уравнения (30) Q_{2n} и Q_{2k}, соответствующие найденным ранее значениям Q_{1n} и Q_{1k}. Корень Q_{2n} соответствующий данному резонансу, отбирается на основе предварительной оценки длины волны в ПЧВ. Используя найденные значения Q_{2n} и Q_{2k}, на основании соотношения (6), вычисляем

$$\beta_2 = \frac{l_2^2}{4Q_{2k}^2}\frac{N_{nk} - \Omega_{nk}}{N_{nk}^2 - \Omega_{nk}},$$

где $\Omega_{nk} = (\omega_{rn}/\omega_{rk})^2$, $N_{nk} = (Q_{2n}/Q_{2k})^2$.

При необходимости процедура повторяется с использованием уточненных значений β_2.

3. По формуле (7) оцениваем величину коэффициента Пуассона.

4. На основании (31) находим коэффициент поглощения ПЧВ:

$$\gamma_2(\omega_{rn}) = \frac{2}{\alpha_0 l_2 Q_{1n}(4Q_{2n} - \sin 4Q_{2n})} \times \times\left[\frac{\omega_{rn}k_{31}^2 C^\sigma R_\gamma(\omega_{rn})}{Q_{1n}}(2Q_{2n}\cos 2Q_{2n} + \right.$$

$$+ \alpha_0 Q_{1n}\operatorname{ctg} Q_{1n}\sin 2Q_{2n})^2 - \Gamma_1(4Q_{2n}^2\cos^2 2Q_{2n} +$$

$$\left. + \alpha_0 Q_{2n}\sin 4Q_{2n} + 4\alpha_0^2 Q_{1n}^2\sin^2 2Q_{2n})\right],$$

где $\alpha_0(Q_{1n}, Q_{2n})$ определяется формулой (29), и декремент колебаний $\Delta(\omega_{rn}) = \pi l_2\gamma_2(\omega_{rn})/Q_{2n}$.

5. Используя (6), (12), (13), вычисляем компоненты модуля Юнга:

$$E_2'(\omega_{rn}) = \rho_2\omega_{rn}^2 l_2^2(2Q_{2n})^{-2}(1 - 4\beta_2 Q_{2n}^2/l_2^2)^{-1},$$

$$E_2''(\omega_{rn}) = 2\rho_2\omega_{rn}^2\gamma_2(\omega_{rn})l_2^3(2Q_{2n})^{-3} \times (1 - 16\beta_2^2 Q_{2n}^4/l_2^4).$$

Для иллюстрации практической значимости развитой теории в таблице приведены численные результаты тестирования образцов поликристаллического Nb (ПЧВ) с помощью кварцевых ПЭ при температуре 6К. Значения E'_* и Δ_* вычислены традиционным, часто используемым методом [1–5], а значения E' и Δ получены по изложенной выше методике. Видно, что полученные формулы позволяют существенно повысить точность определения акустических характеристик, особенно сравнительно коротких образцов.

Авторы благодарны К.А. Чишко за полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного Научного Фонда (Грант № U9T000) и Швейцарского Национального Научного Фонда (Грант № 7UKPJ048645).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Balamuth L.* A new method for measuring elastic moduli and the variation with temperature of the principal Young's modulus of rocksalt between 78 K and 273 K // Phys. Rev. 1934. V. 45. Second Series. № 10. P. 715–723.

2. *Rose F.C.* The variation of the adiabatic elastic moduli of rocksalt with temperature between 80 K and 270 K // Phys. Rev. 1936. V. 49. Second Series. № 1. P. 50–53.
3. *Read T.A.* The internal friction of single metal crystals // Phys. Rev. 1940. V. 58. № 8. P. 371–380.
4. *Schmid M., Benes E., Burger W., Kravchenko V.* Motional capacitance of layered piezoelectric thickness-mode resonators // IEEE Transactions Ultrasonics, Ferroelectries and Frequency control. 1991. V. 38. № 3. P. 199–286.
5. *Marx J.* Use of the piezoelectric gauge for internal friction measurements // Rev. Scient. Instr. 1951. V. 27. № 7. P. 503–509.
6. *Меркулова В.М.* Расчет составного пьезовибратора для измерения внутреннего трения в сильнопоглощающих материалах // Акуст. журн. 1968. Т. 14. № 2. С. 250–256.
7. *Крячко В.М., Тихомиров Н.П.* Измерение механических импедансов нагрузки стержневого пьезорезонатора // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 2. С. 377–380.
8. *Соловьев В.А., Михайлов И.Г.* К теории пьезоэлектрического вибратора // Известия АН СССР. 1956. Т. 20. № 2. С. 261–267.
9. *Granstaff V.E., Martin S.J.* Characterisation of a thickness – shear mode quartz resonator with multiple nonpiezoelectric layers // J. Appl. Phys. 1994. V. 75. № 3. P. 1319–1329.
10. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
11. *Шульга Н.А., Болкисев А.М.* Колебания пьезоэлектрических тел. К.: Наук. думка, 1990. 228 с.
12. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультраакустике. М.: Ин. лит., 1952. 447 с.
13. Физическая акустика. Мэзон У. (ред.). Т. 1, часть А. М.: Мир, 1966. 592 с.
14. *Кайно Г.* Акустические волны. Устройства, визуализация и аналоговая обработка сигналов. М.: Мир, 1990. 652 с.
15. *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1955. 504 с.
16. *Крутов Б.Н., Мансфельд Г.Д., Френк А.Д.* Определение акустических параметров тонких слоев и пленок по электрическим характеристикам составного резонатора // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 4. С. 633–639.

Theory of a Compound Piezoelectric Vibrator

V. D. Natsik, P. P. Pal-Val, and S. N. Smirnov

Forced longitudinal vibrations excited in a two-component rod-type vibrator with a piezoelectric driver are analyzed. An expression for the electric impedance of the vibrator is derived by using general relations of the theory of a linear hereditary elastic medium without imposing any special limitations on the geometric parameters of the vibrator, the type of dispersion of the complex-valued elastic moduli, the dielectric permittivity, and the piezoelectric coefficients. The resonance properties of the piezoelectric element and the compound vibrator as a whole are considered in detail. The relation of several lower resonance frequencies and the corresponding resistance values to the elastic and dissipation parameters of the vibrator components is analyzed. The results are presented in the form of formulas and algorithms suitable for practical applications.