Выражение (1) отражает характерное свойство фрактальных структур – масштабную инвариантность. Известно, что для так называемых массовых фракталов-кластеров

$$\langle \delta(\rho')\delta^*(\rho'') \rangle \sim \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{D-d}, \qquad (2)$$

где D – фрактальная размерность кластера, d – размерность пространства вложения и ρ_0 – размер кластера. Выражение (1) при $\nu = D - d$ представляет собой корреляционную функцию, характеризующую массовые фракталы-кластеры, состоящие из микронеоднородностей разного масштаба с разными физическими свойствами.

Рассмотрим лазерное термооптическое возбуждение монохроматического звука в жидком полупространстве со свободной границей и случайными фрактальными кластерами с микронеоднородностями. Для решения задачи воспользуемся методом, использованным нами в [8].

Пусть на поверхность жидкого полупространства ($z = 0$) в направлении оси z прямоугольной системы координат (x, y, z) падает лазерный луч (пучок), модулированный по интенсивности звуковой частотой ω с индексом модуляции m.

Звуковое поле в жидкости описывается неоднородным уравнением Гельмгольца

$$(\Delta + k^2) = i\delta m\omega I(x, y)\exp(-\mu z). \qquad (3)$$

Решение уравнения (3) можно представить, как известно, в виде

$$p(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega i\delta m\omega I(x_1, y_1) \times \exp(-\mu z_1) p_0(x_1, y_1, z_1/x, y, z) dx_1 dy_1 dz_1. \qquad (4)$$

Здесь $p_0(x_1, y_1, z_1/x, y, z)$ – решение регулярной задачи рассеяния звука на границе, когда источник регулярного поля находится в точке (x, y, z), т.е. в той точке, где необходимо определить искомое поле $p(r)$, Ω – объем жидкости, занятый тепловыми источниками звука, возникающими при действии лазерного излучения. Пусть точка наблюдения (x, y, z) находится в зоне Фраунгофера, а распределение интенсивности лазерного излучения на поверхности жидкости описывается законом

$$I(x, y) = I_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right),$$

где a – радиус лазерного пучка.

Для средней интенсивности флуктуаций поля можно написать следующее выражение

$$\langle |p|^2 \rangle = \left(\frac{I_0\omega m}{2\pi R}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{a^2}\right) \times$$
$$\times \exp(-\mu z_1)\exp(\mu z_2)\langle \delta(x_1, y_1, z_1)\delta^*(x_2, y_2, z_2) \rangle \times \qquad (5)$$
$$\times \exp\{i[\alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2)]\} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2,$$

где $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ – расстояние из точки наблюдения до начала координат, $k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $\vec{k}$ – волновой вектор звуковой волны и α, β и γ – его компоненты.

В качестве примера рассмотрим далее термооптические источники в виде "диска", т.е. когда $ka \gg 1$ и $k\mu^{-1} < 1$. Тогда корреляционная функция флуктуаций микронеоднородных свойств среды будет зависеть только от разности координат. В силу условия $k\mu^{-1} < 1$ микронеоднородные параметры в жидкости будем считать независящими от координаты z. В этом случае выражение (5) можно представить в виде

$$\langle |p|^2 \rangle = \left(\frac{I_0\omega m}{2\pi R}\right)^2 \langle \delta^2 \rangle \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 + \mu^2)^2} \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{2\rho_2^2}{a^2} - \frac{\rho^2}{a^2} - \frac{2\rho\rho_2}{a^2}(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi)\right\} \times \qquad (6)$$
$$\times \exp[i\rho(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi)]\rho\rho_2 d\rho d\rho_2 d\psi d\varphi,$$

где $x_1 - x_2 = \rho\cos\varphi$, $y_1 - y_2 = \rho_2\sin\psi$, $x_2 = \rho_2\cos\psi$, $y_2 = \rho_2\sin\psi$. После интегрирования из выражения (6) получаем

$$\langle |p|^2 \rangle = \left(\frac{I_0 m\omega}{2R}\right)^2 \langle \delta^2 \rangle \frac{\gamma^2 a^2}{(\gamma^2 + \mu^2)^2} \times$$
$$\times \int_0^\infty f(\rho)\exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2}\right) I_0(\rho\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})\rho d\rho. \qquad (7)$$

Принимая во внимание, что размерность пространства вложения $d = 2$, подставляя в (7) выражение (1) для функции корреляции, характеризующей массовые фракталы-кластеры, после интегрирования получим

$$\langle|p|^2\rangle = \left(\frac{I_0 m\omega}{2R}\right)^2 \langle\delta^2\rangle \frac{\gamma^2 a^2}{(\gamma^2+\mu^2)^2}\rho_0^{-(D-2)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)(\rho_0 a)^D 2^{\frac{D}{2}-1}}{(2a^2+\rho_0^2)^{\frac{D}{2}}} \exp\left(-\frac{(\alpha^2+\beta^2)2a^2\rho_0^2}{4(2a^2+\rho_0^2)}\right) \times \quad (8)$$

$$\times {}_1F_1\left(\frac{D}{2}+1, 1, \frac{(\alpha^2+\beta^2)2a^2\rho_0^2}{4(2a^2+\rho_0^2)}\right).$$

Здесь ${}_1F_1(\ldots)$ – вырожденная гипергеометрическая функций и $\Gamma(\ldots)$ – гамма-функция.

В случае широкого лазерного пучка, когда $a \gg \rho_0$, имеем

$$\langle|p|^2\rangle_{a \gg \rho_0} = \left(\frac{I_0 m\omega}{2R}\right)^2 \langle\delta^2\rangle \frac{\gamma^2 a^2 \rho_0^2}{(\gamma^2+\mu^2)^2} 2^{\frac{D-4}{2}} \times$$
$$\times \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \exp\left(\frac{(\alpha^2+\beta^2)\rho_0^2}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{D}{2}+1, 1, \frac{(\alpha^2+\beta^2)\rho_0^2}{4}\right). \quad (9)$$

Положим, что $\alpha = k\cos\varphi\sin\Theta$, $\beta = k\sin\varphi\sin\Theta$ и $\gamma = k\cos\Theta$, где Θ – угол наблюдения, т.е. угол, образованный осью z и направлением из начала координат в точку наблюдения. Тогда из (9), учитывая, что $k\cos\Theta\mu^{-1} < 1$, получаем

$$\langle|p|^2\rangle_{a \gg \rho_0} = \left(\frac{I_0 m\omega}{2R}\right)^2 \langle\hat{\delta}^2\rangle \frac{k^2\cos^2\Theta a^2\rho_0^2}{\mu^4} 2^{\frac{D-4}{2}} \times$$
$$\times \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \exp\left(-\frac{k^2\sin^2\Theta\rho_0^2}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{D}{2}+1, 1, \frac{k^2\sin^2\Theta\rho_0^2}{4}\right). \quad (10)$$

Значение $\langle\hat{\delta}^2\rangle$ может быть вычислено на основании представлений о физических процессах, которыми обусловлены флуктуации $\hat{\delta}$, как это сделано, например, в [7]. Пользуясь этим значением, зная фрактальную размерность кластеров-фракталов, можно вычислить среднюю интенсивность флуктуаций звукового поля, обусловленных микронеоднородностями в жидкости. Следовательно, можно оценить амплитуду "дополнительного" оптоакустического сигнала.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 96-02-16160.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Monchalin J.-P.* Laser generation and detection of ultrasound. Technology and applications // JASA. 1996. V. 100. № 4. Pt. 2. P. 2621.
2. *Bernal-Alvarado J., Vargas M. et al.* Photoacoustic determination of recombination parameters in CdTe/glass system // J. Appl. Phys. 1998. V. 83. № 7. P. 3807–3810.
3. *Murray T.W., Baldwin K.C., Wagner J.W.* Laser ultrasonic chirp sources for low damage and high delectability without loss of temporal resolution // JASA. 1997. V. 102. № 5. Pt. 1. P. 2742–2746.
4. *Wu Yaping, Shi Dufang, He Yulong.* Study of the directivity of laser generated ultrasound in solids // J. Appl. Phys. 1988. V. 83. № 3. P. 1207-1212.
5. *Егерев С.В., Лямшев Л.М., Пученков О.В.* Лазерная динамическая оптоакустическая диагностика конденсированных сред // УФН. 1990. Т. 160. № 9. С. 111–154.
6. *Sawada T.* Ultrafast photothermal and photoacoustic phenomena and their applications // JASA. 1996. V. 100. № 4. Pt. 2. P. 2623.
7. *Зозуля О.М., Пученков О.В.* К теории оптоакустического эффекта в жидких дисперсных системах // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 1. С. 90–100.
8. *Лямшев М.Л.* Лазерная термооптическая генерация звука в жидкости со свободной поверхностью: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ИОФАН, 1985. 145 с.