АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1999, том 45, № 3, с. 347–353

УДК 534.222

ДЕТЕКТИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ В РЕЧНОМ ПЕСКЕ. ТЕОРИЯ

© 1999 г. **В. Ю. Зайцев, А. Б. Колпаков*, В. Е. Назаров**

Институт прикладной физики РАН
603600 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
**Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет*
603600 Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65
e-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 25.03.98 г.

В настоящей статье проводится теоретическое исследование процессов нелинейной генерации и распространения видеоимпульсных сигналов, наблюдавшихся при детектировании высокочастотных акустических импульсов в сухом и водонасыщенном речном песке. Определяется форма продетектированных импульсов, зависимость их амплитуды от амплитуды первичной волны и скорости распространения видеоимпульсов от статического давления. Из сравнения теоретических и экспериментальных результатов определяются акустические параметры песка и проводится их сопоставление с данными по нелинейным и диссипативным свойствам зернистых сред, полученными другими авторами.

1. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВИДЕОИМПУЛЬСОВ

Для описания процессов генерации и распространения видеоимпульсных сигналов применительно к условиям эксперимента [1], что является целью настоящей статьи, будем считать речной песок изотропной средой, а упругие волны – продольными и распространяющимися вдоль оси z.

Уравнение состояния нелинейной изотропной среды можно представить в виде [2,3]:

$$\sigma_{ik} = KU_{jj}\delta_{ik} + 2\mu(U_{ik} - (1/3)U_{jj}\delta_{ik}) + G_{ik}(U_{ik}), \quad (1)$$

где K, μ – модули всестороннего сжатия и сдвига, $U_{jj} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$, а функции $G_{ik}(U_{ik})$ описывают нелинейные связи тензора напряжения σ_{ik} и тензора деформации U_{ik}. Вообще говоря, эти функции должны определяться теоретически – на основе модели среды, или экспериментально – на основе измерения каких-либо зависимостей, например, зависимостей скоростей упругих волн от статического давления.

При плоской деформации безграничной среды вдоль оси z поперечные компоненты U_{xx} и U_{yy} тензора деформации равны нулю. В наших экспериментах имели место квазиплоские волны, поэтому можно считать, что выполнялось условие: $U_{zz} \gg U_{xx}, U_{yy}$. Далее, учтем то обстоятельство [3], что для сдвиговых напряжений и деформаций в изотропной среде четная упругая нелинейность отсутствует, а на нечетной – процесс детектирования не идет. Таким образом, в уравнении (1) следует положить: $G_{ik}(U_{ik}) = 0$ при $i \neq k$. Кроме того, примем во внимание, что коэффициент Пуассона зернистых сред является достаточно малой (близкой к нулю) величиной [4–6]. Это позволяет считать, что $\sigma_{zz} \gg \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$, $G_{zz} \gg G_{xx}, G_{yy}$ и пренебречь функциями G_{xx} и G_{yy} в уравнении (9). Из сравнения уравнения (1) и уравнений состояния сухого и водонасыщенного песка [1] при $g = 0$ (см. обозначения статьи [1])

$$\sigma(\epsilon) = (3B/2)(-\varepsilon_0)^{1/2}\epsilon + \alpha(-\epsilon)^{3/2}h(-\epsilon), \quad (2)$$

$$\sigma(\epsilon) = (D + (3B/2)(-\varepsilon_0)^{1/2})\epsilon + \alpha(-\epsilon)^{3/2}h(-\epsilon), \quad (3)$$

находим выражение для функции $G_{zz}(\epsilon)$:

$$G_{zz}(\epsilon) = \alpha(-\epsilon)^{3/2}h(-\epsilon), \quad \epsilon = U_{zz}. \quad (4)$$

Далее мы будем пользоваться методикой получения нелинейного уравнения для звукового пучка в упругой среде, развитой в работе [7].

Компоненты вектора смещения U в звуковом пучке представим в виде:

$$U_z = \delta U_z(\tau, x', y', z'), \quad U_{x,y} = \delta^{3/2}U_{x,y}(\tau, x', y', z'), \quad (5)$$

где $\tau = t - z/c(z)$, $z' = \delta z$, $x' = \delta^{1/2}x$, $y' = \delta^{1/2}y$, δ – малый безразмерный параметр, определяющий медленную расходимость звукового пучка [7], $c(z)$ – локальная скорость распространения продольных упругих волн в среде, зависящая от глубины z. В дальнейшем, для упрощения расчетов, будем полагать, что $c(z) = c \simeq \tilde{c}(P_0)$. Это не приведет к принципиальной и большой ошибке в конечном

результате при $P_0 \geq 2 \times 10^3$ Па, когда скорость звука в песке определяется, в основном, статическим давлением P_0 [1].

Подставим (1, 5) в уравнение распространения упругих волн в твердом теле [2, 3]

$$\rho U_{itt} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik} + \sigma'_{ik}), \tag{6}$$

где U_i – i-я компонента вектора смещения частиц среды, σ'_{ik} – неупругий тензор напряжений. При этом следует учесть, что наряду с описанием нелинейной упругости, описание диссипативных (неупругих) свойств также является одной из актуальных проблем акустики неоднородных, в том числе и зернистых, сред. Как известно [2], для однородных сред тензор неупругих напряжений имеет вид

$$\sigma'_{ik} = 2\eta(\dot{U}_{ik} - \delta_{ik}\dot{U}_{jj}/3) + \xi\delta_{ik}\dot{U}_{jj}, \tag{7}$$

(η и ξ – коэффициенты вязкости), при этом коэффициент диссипации звука является квадратичной функцией частоты [2]. Для многих микро- неоднородных сред (в том числе, по-видимому, и для речного песка) коэффициент затухания упругой волны пропорционален первой степени ее частоты [4, 5, 8], при этом тензор неупругих напряжений σ'_{ik} должен иметь вид, отличный от (7). В этом случае для описания процессов генерации и распространения видеоимпульсных сигналов мы поступим следующим образом. Вначале опишем эти процессы для среды с квадратичной частотной зависимостью коэффициента затухания, а затем, в конечном выражении, учтем, что коэффициент диссипации звука в песке линейно зависит от частоты. Будем пренебрегать геометрической нелинейностью и использовать линеаризованный тензор деформаций $U_{ik} = (\partial U_i/\partial x_k + \partial U_k/\partial x_i)/2$, считая доминирующей нелинейность уравнения состояния среды.

Из уравнений (1), (5)–(7), в результате преобразований, аналогичных проведенным в работе [7], получим волновое уравнение для продольной деформации $\epsilon = U_{zz}$:

$$\frac{\partial^2\epsilon}{\partial\tau\partial z'} - (c/2)\Delta_\perp\epsilon - \beta\frac{\partial^3\epsilon}{\partial\tau^3} - \frac{1}{2\rho c^3}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}G_{zz}(\epsilon) = 0, \tag{8}$$

где $\beta = (\xi + 4\eta/3)/2\rho c^3$, $\Delta_\perp$ – оператор Лапласа по поперечным координатам.

Зададим граничное условие на излучателе в виде:

$$\epsilon_1(r, z = 0, t) = \mathscr{E}_0\Pi(r/a)\Phi(t/T)\sin\omega t, \tag{9}$$

где $\Pi(r/a) = 1$ при $r/a \leq 1$ и $\Pi(r/a) = 0$ при $r/a > 1$, $r^2 = x^2 + y^2$, a – радиус излучателя, $\Phi(t/T)$ – огибающая импульса накачки, T – длительность импульса накачки, $\omega T \gg 1$.

Решение уравнения (8) с граничным условием (9) будем искать методом возмущений. Полагая в (8) $\epsilon(\mathbf{R}, \tau) = \varepsilon_1(\mathbf{R}, \tau) + \varepsilon_2(\mathbf{R}, \tau)$, $\varepsilon_1(\mathbf{R}, \tau) = \mathscr{E}_1(\mathbf{R}, \tau)\sin\omega t$, и считая, что вблизи излучателя, где в основном происходит затухание импульса накачки и генерация видеоимпульса, выполняется соотношение $\mathscr{E}_1(\mathbf{R}, \tau) \gg |\varepsilon_2(\mathbf{R}, \tau)|$, получим уравнения для огибающей импульса накачки $\mathscr{E}_1(\mathbf{R}, \tau)$ и продетектированного импульса $\varepsilon_2(\mathbf{R}, \tau)$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathscr{E}_1 - \beta\omega^2\mathscr{E}_1 = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\varepsilon_2 - (c/2)\Delta_\perp\varepsilon_2 - \beta\frac{\partial^3}{\partial\tau^3}\varepsilon_2 = Q(\mathbf{R}, \tau), \tag{11}$$

$$Q(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{2\rho c^3}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\langle G_{zz}(\varepsilon_1)\rangle, \tag{12}$$

где знак $\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по периоду высокочастотной волны. При получении уравнения (10) мы пренебрегли дифракционными эффектами, считая что волна накачки затухает на расстоянии существенно меньшем дифракционной длины $l_{\text{dif}} = \omega a^2/2c$. (В эксперименте [1] длина затухания волны накачки была менее 1 см, а l_{dif} составляла около 5 м.)

Из решения уравнения (10) с граничным условием (9) находим выражение для импульса накачки вблизи излучателя ($4\pi\beta z/T^2 \ll 1$) [9]:

$$\varepsilon_1(\mathbf{R}, \tau) = \mathscr{E}_0\Pi(r/a)\exp(-\beta\omega^2 z)\Phi(\tau/T)\sin\omega\tau. \tag{13}$$

Применяя к уравнению (11) преобразование Фурье, получим уравнение дифракции для спектральных компонент видеоимпульса:

$$\partial\tilde{\varepsilon}_2/\partial z + (j/2K)\Delta_\perp\tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{Q}(j\Omega, \mathbf{R}), \tag{14}$$

где $\tilde{\varepsilon}_2(j\Omega, \mathbf{R}) = (1/2\pi)\exp(-\beta\Omega^2 z)\int_0^\infty\varepsilon_2(\tau, \mathbf{R})\exp(-j\Omega\tau)d\tau$, $K = \Omega/c$,

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(j\Omega, \mathbf{R}) &= -(j/2\pi\Omega)\exp(\beta\Omega^2 z)\times \\ &\times\int_{-\infty}^{\infty}Q(\mathbf{R}, \tau)\exp(-j\Omega\tau)d\tau = \\ &= -(j\Omega/4\pi\rho c^3)\exp(\beta\Omega^2 z)\times \\ &\times\int_{-\infty}^{\infty}\langle G_{zz}(\varepsilon_1(\tau, \mathbf{R}))\rangle\exp(-j\Omega\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{15}$$

Решение уравнения (14) имеет вид [9]:

$$\tilde{\varepsilon}_2(j\Omega, \mathbf{R}) = \int_0^\infty J_0(\nu r)\nu \times \int_0^z \tilde{\tilde{Q}}(\nu, z, j\Omega)\exp(j\nu^2(z-z')/2K)dz'd\nu, \quad (16)$$

где $\tilde{\tilde{Q}}(\nu, z, j\Omega) = \int_0^\infty \tilde{Q}(j\Omega, \mathbf{R})J_0(\nu r)rdr$.

Применяя обратное преобразование Фурье к уравнению (16), получаем общее выражение для продетектированного импульса $\varepsilon_2(\tau, z)$ в дальней зоне на оси излучателя:

$$\varepsilon_2(\tau, z) = \frac{a^2}{8\pi z\rho c^4}\times \int_0^z\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega^2\langle G_{zz}(\mathscr{E}_0\exp[-\beta\omega^2 z']\Phi(\tau'/T)\sin\omega\tau')\rangle\times \times\exp(-\beta\Omega^2 z - j\Omega(\tau'-\tau))dz'd\tau'd\Omega. \quad (17)$$

При получении (17) учитывалось, что параметрический излучатель работал в режиме Вестервельта [9], т.е. расфазировка вторичных источников $Q(\mathbf{R}, \tau)$ поперек пучка была незначительной: $K^*a^2/4L \simeq 0.5$, где $K^* = 2\pi F^*/c$, $F^* = 1/2T^*$ – "характерная" частота видеоимульса.

Для бегущей по оси z волны ее параметры – деформация и ускорение – связаны соотношением $A(\tau, z) = -c\partial\varepsilon_2(\tau, z)/\partial\tau$. В эксперименте регистрировалось ускорение свободной поверхности пластины, поэтому форма принимаемого акселерометром видеоимпульса будет определяться выражением

$$A(\tau, z) = -\frac{a^2}{4\pi z\rho c^3}\frac{\partial}{\partial\tau}\times \int_0^z\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega^2\langle G_{zz}(\mathscr{E}_0\exp[-\beta\omega^2 z']\Phi(\tau'/T)\sin\omega\tau')\rangle\times \times\exp(-\beta\Omega^2 z - j\Omega(\tau'-\tau))dz'd\tau'd\Omega. \quad (18)$$

Из (18) видно, что зависимость амплитуды A_0 видеоимпульса от амплитуды $\mathscr{E}_0$ импульса накачки будет соответствовать экспериментально установленной (см. выражение (4) в [1]), так как $G_{zz}(\varepsilon_1) = \alpha(-\varepsilon_1)^{3/2}h(-\varepsilon_1) \sim \mathscr{E}_0^{3/2}$. Из (18) также следует, что при слабом затухании низкочастотного сигнала ($\beta\Omega^2 z \ll 1$) форма $A(t)$ видеоимпульса соответствует третьей производной по времени от нелинейной функции $\langle G_{zz}(\varepsilon_1(\tau, z))\rangle$, зависящей от огибающей $\Phi(t/T)$ импульса накачки. При конечном затухании форма импульса $A(t)$ будет несколько затянута (за счет высокочастотного поглощения), но также будет близка к третьей производной по времени от нелинейной функции $\langle G_{zz}(\varepsilon_1(\tau, z))\rangle$. Покажем это на примерах импульсов накачки с гауссовой и прямоугольной огибающими. В этих случаях удается получить аналитические выражения для продетектированных сигналов. Отметим, что в эксперименте огибающая короткого импульса накачки была близка к гауссовой, а длинного – к прямоугольной.

Для импульса накачки с гауссовой огибающей $\Phi(t/T) = \exp(-t^2/T^2)$ из (18) получаем:

$$A(t) = -\frac{\gamma Ha^2}{zc\beta\omega^2(1+6\beta z/T^2)^{1/2}}\times \times\mathscr{E}_0^{3/2}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\exp\left(-\frac{3t^2/2}{T^2+6\beta z}\right). \quad (19)$$

где $H = \Gamma^2(1/4)/[9(2\pi)^{3/2}]$, $\Gamma(**)$ – гамма-функция, $\gamma = \alpha/\rho c^2 = (2\alpha/3B)(-\varepsilon_0)^{-1/2}$ – безразмерный параметр нелинейности. Заметим, что коэффициент $2\alpha/3B$ определяется отношением чисел слабо и сильно поджатых контактов; для случайной упаковки зерен этот коэффициент по порядку величины равен единице [10, 11].

Из выражения (19) следует, что форма видеоимпульса $A(t)$, образовавшегося в результате детектирования высокочастотного импульса с гауссовой огибающей, соответствует третьей производной по времени от этой огибающей, "растянутой" в $((2/3) + 4\beta z/T^2)^{1/2}$ раз. Поскольку при увеличении статического давления P_0 коэффициент затухания упругих волн в зернистой среде (а, следовательно, и параметр β) уменьшается [4, 12, 13], то и длительность видеоимпульса также должна уменьшаться.

Из уравнения (19) определяем "характерную" длительность T^* и амплитуду A_0 видеоимпульса $A(t)$ (см. рис. 2 и рис. 3 в работе [1]):

$$T^* = T(1+6\beta z/T^2)^{1/2}, \quad (20)$$

$$A_0 = \frac{3(3/2)^{1/2}[1-(1/6)^{1/2}]^{1/2}\gamma Ha^2}{zc\beta\omega^2T^3(1+6\beta z/T^2)^2}\mathscr{E}_0^{3/2}. \quad (21)$$

Аналогично, можно получить выражение для видеоимпульса $A(t)$, образовавшегося в результате детектирования высокочастотного импульса с прямоугольной огибающей $\Phi(t/T) = h(t/T) - h(t/T-1)$:

$$A(t) = -\frac{\gamma Ha^2}{c\omega^2(\beta z)^{3/2}}\times \times\mathscr{E}_0^{3/2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\exp\left(-\frac{t^2}{4\beta z}\right) - \exp\left(-\frac{(t-T)^2}{4\beta z}\right)\right], \quad (22)$$

где $H = \Gamma^2(1/4)2^{1/2}/36\pi$.

В этом выражении слагаемые $\exp(-t^2/4\beta z)$ и $-\exp(-(t-T)^2/4\beta z)$ получились в результате однократного дифференцирования по времени переднего и заднего фронтов первоначально прямоугольной огибающей импульса накачки, и последующей, вследствие поглощения в среде, высокочастотной фильтрации. Таким образом, и здесь форма видеоимпульса $A(t)$ близка к третьей производной по времени от огибающей импульса накачки.

При излучении периодической последовательности высокочастотных импульсов спектр продетектированного сигнала будет содержать частоту повторения F импульсов и ее высшие гармоники. Подставляя в уравнение (18) модулирующую функцию в виде

$$\Phi(t/T) = \begin{cases} \sin(2\pi t/T), & 0 \le t \le T/2, \\ 0, & T/2 \le t \le NT/2, \end{cases} \tag{23}$$

получим выражение для спектральных компонент $A(pF)$ продетектированного сигнала:

$$A(pF) = \frac{\pi^2\Gamma(1/4)\gamma a^2(pF)^3}{12zc\beta\omega^2} \times \frac{\sin(\pi p/N)\exp[-\beta(2\pi pF)^2 z]}{N\Gamma(7/4+p/N)\Gamma(7/4-p/N)}\mathscr{E}_0^{3/2}, \tag{24}$$

где $F = 1/NT$, N – скважность.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ СУХОГО И ВОДОНАСЫЩЕННОГО ПЕСКА

Используя экспериментальные результаты, приведенные в [1], и выражения (20), (21), полученные в предположении, что коэффициент затухания упругих волн является квадратичной функцией частоты, попытаемся оценить длину затухания $l_m = (\beta\omega^2)^{-1}$ волны накачки и параметр нелинейности γ_m для сухого песка при максимальном статическом давлении $P_0 = P_m \simeq 9 \times 10^3$ Па ($|\varepsilon_0| = \varepsilon_m \simeq 10^{-4}$). Значения других параметров, входящих в эти выражения положим следующими: $T \simeq 40$ мкс; $T^* \simeq 73$ мкс; $z = L = 10$ см; $P \simeq 2.5 \times 10^3$ Па ($\mathscr{E}_0 = P/\rho c^2 \simeq 2.85 \times 10^{-5}$); $c \simeq 2.5 \times 10^4$ см/с; $\rho \simeq 1.4$ г/см^3; $A_0 \simeq 1.2 \times 10^2$ см/с^2 ($\mathscr{E}_d = A_0/2\pi cF^* \simeq 10^{-7} \ll \mathscr{E}_0$).

Расчеты показывают, что длина затухания волны накачки $l_m \simeq 1.2 \times 10^{-2}$ см, а параметр нелинейности $\gamma_m \simeq 9 \times 10^2$.

Эти оценки, однако, являются неправдоподобными, поскольку длина затухания получается слишком малой (существенно меньше размера песчинок), а параметр нелинейности – слишком большим, более, чем на порядок, выше ожидаемого значения $\gamma = (-\varepsilon_0)^{-1/2} \simeq 10^2$, (см. обсуждение выражения (19)). Это противоречит выполнявшемуся в эксперименте условию малости амплитуды продетектированного импульса по сравнению с амплитудой волны накачки ($\mathscr{E}_d \ll \mathscr{E}_0$), позволяющему считать, что нелинейное слагаемое в уравнении состояния (2) много меньше линейного (т.е. $\gamma(\mathscr{E}_0)^{-1/2} \ll 1$) и решать задачу методом возмущений. Если же использовать значение $\gamma = \gamma_m \simeq 9 \times 10^2$, получим, что $\gamma(\mathscr{E}_0)^{-1/2} \simeq 5 \gg 1$.

Оценки длины затухания волны накачки и параметра нелинейности для водонасыщенного песка также приводят к аналогичным противоречиям. Расчеты показывают, что при $T^* \simeq 83$ мкс; $P_0 = P_m \simeq 9 \times 10^3$ Па ($\varepsilon_m \simeq 10^{-4}$); $\mathscr{E}_0 = 2.85 \times 10^{-5}$; $A_0 \simeq 34$ см/с^2 ($\mathscr{E}_d = A_0/2\pi cF^* \simeq 3 \times 10^{-7} \ll \mathscr{E}_0$); $c \simeq 4 \times 10^4$ см/с и $\rho \simeq 1.86$ г/см^3.

– длина затухания волны накачки $l_m \simeq 9 \times 10^{-3}$ см;

– параметр нелинейности $\gamma_m \simeq 9.5 \times 10^2$.

В этом случае $\gamma(\mathscr{E}_0)^{-1/2} \simeq 5$, что также не соответствует условию $\mathscr{E}_d \ll \mathscr{E}_0$.

Таким образом, проведенные оценки длины затухания и параметра нелинейности для сухого и водонасыщенного песка в рамках модели квадратичного по частоте затухания не согласуются с условиями эксперимента.

Попытаемся теперь описать процессы детектирования и распространения акустических импульсов, полагая, что, коэффициент затухания упругих волн в песке (как, кстати, и во многих других горных породах) линейно зависит от частоты [4, 8, 13]. Диссипативные свойства таких сред принято характеризовать безразмерным и независящим от частоты декрементом затухания θ, при этом затухание упругой волны с частотой ω определяется выражением $\exp[-\tilde{\beta}\,\omega z]$, где $\tilde{\beta} = \theta/2\pi c$. При таком законе затухания упругих волн выражение для продетектированного импульса можно получить, заменяя в уравнении (18) коэффициенты $\beta\omega^2$ и $\beta\Omega^2$ на $\tilde{\beta}\,\omega$ и $\tilde{\beta}\,\Omega$, соответственно:

$$A(\tau, z) = -\frac{a^2}{4\pi z\rho c^3}\frac{\partial}{\partial\tau} \times \int_0^z\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 \langle G_{zz}(\mathscr{E}_0 \exp[-\tilde{\beta}\omega z']\Phi(\tau'/T)\sin\omega\tau')\rangle \times \exp(-\tilde{\beta}\Omega z - j\Omega(\tau'-\tau))dz'd\tau'd\Omega. \tag{25}$$

При анализе этого интеграла форму импульса накачки удобно аппроксимировать огибающей лоренцева типа $\Phi(\tau/T) = [1 + (\tau/T)^2]^{-2/3}$, при этом

$$A(t) = -\frac{\gamma H a^2 T}{zc\tilde{\beta}\omega(T+\tilde{\beta}z)}\mathscr{E}_0^{3/2}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left[\frac{1}{1+t^2/(\tilde{\beta}z+T)^2}\right], \quad (26)$$

где $H = \Gamma^2(1/4)/9(2\pi)^{3/2}$, $\gamma = \alpha/\rho c^2$.

Для "характерной" длительности T^* импульса и его амплитуды A_0 (см. рис. 2а и рис. 4а в [1]) получаем выражения:

$$T^* = T + \tilde{\beta}z, \quad (27)$$

$$A_0 = \frac{75(1-2/5^{1/2})^{1/2}\gamma H a^2 T}{(1-5^{1/2})^4 cz\tilde{\beta}\omega(T+\tilde{\beta}z)^4}\mathscr{E}_0^{3/2}. \quad (28)$$

Для длинного импульса с прямоугольной огибающей имеем

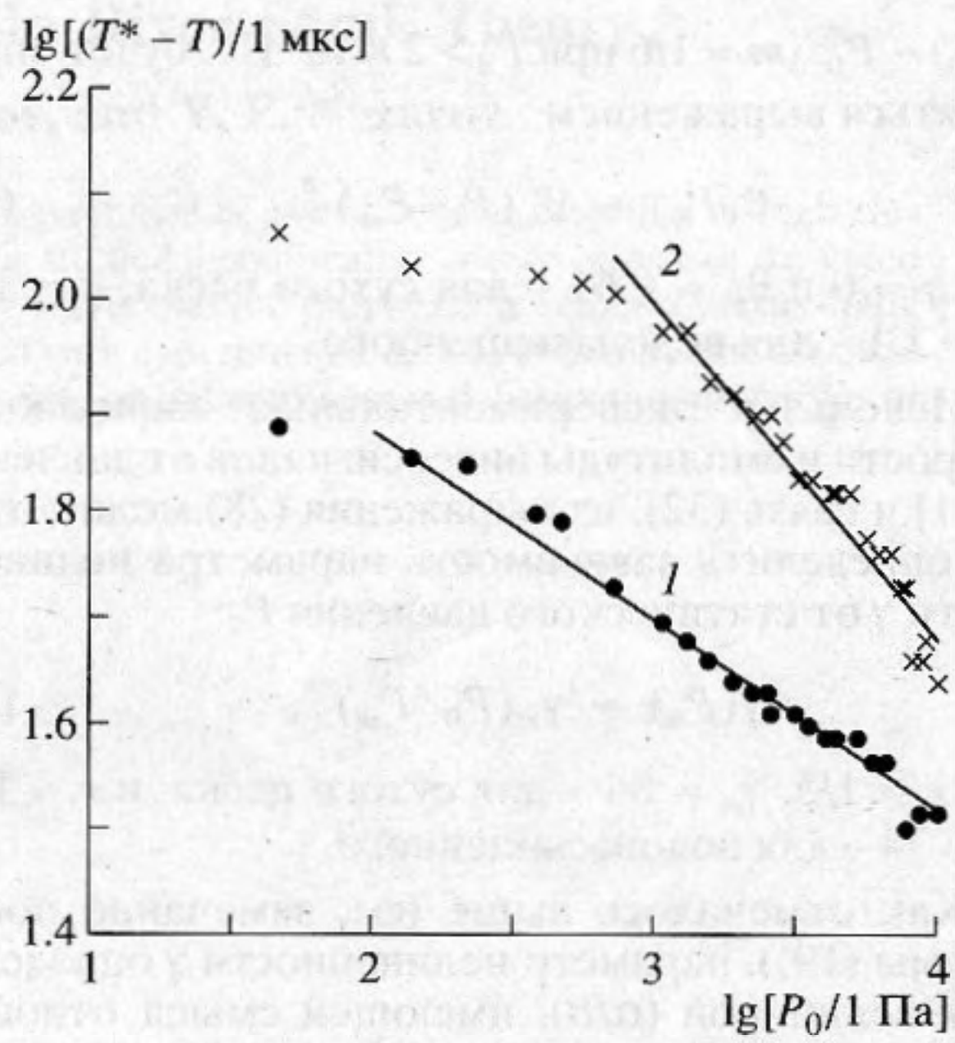
$$A(t) = -\frac{\gamma H a^2}{zc\tilde{\beta}}\mathscr{E}_0^{3/2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\times \left[\frac{1}{(\tilde{\beta}z)^2+t^2}-\frac{1}{(\tilde{\beta}z)^2+(t-T)^2}\right]. \quad (29)$$

Здесь, как и в случае квадратичной зависимости коэффициента затухания от частоты, форма видеоимпульсов $A(t)$ также соответствует третьей производной по времени от огибающей импульса накачки.

В случае излучения периодической последовательности высокочастотных импульсов для амплитуд $A(pF)$ гармоник продетектированного сигнала аналогично (24) получаем:

$$A(pF) = \frac{\pi^2\Gamma^2(1/4)\gamma a^2(pF)^3}{12zc\tilde{\beta}\omega}\times \frac{\sin(\pi p/N)\exp[-\tilde{\beta}(2\pi pF)z]}{N\Gamma(7/4+p/N)\Gamma(7/4-p/N)}\mathscr{E}_0^{3/2}. \quad (30)$$

Используя выражения (27), (28), проведем оценки длины затухания $l_m = (\tilde{\beta}_m\omega)^{-1}$ волны накачки и параметра нелинейности γ_m для сухого и водонасыщенного песка при максимальном статическом давлении $P_0 = P_m = 9\times10^3$ Па. В результате получаем, что $l_m \simeq 2.3\times10^{-2}$ см – для сухого песка и $l_m \simeq 2\times10^{-1}$ см – для водонасыщенного, что соответствует декрементам затухания $\theta_m \simeq 0.61$ – для сухого песка и $\theta_m \simeq 1.1$ – для водонасыщенного. Это согласуется с результатами измерения декремента затухания в песке других исследователей [13, 14]. Параметр нелинейности, определенный из выражения (28), получился равным $\gamma_m \simeq 84$ для сухого песка и $\gamma_m \simeq 74$ – для водонасыщенного, что хорошо согласуется с ожидаемым значением



Зависимости $\lg(T^* - T)$ от $\lg P_0$ для сухого (*1*) и водонасыщенного (*2*) песка. Прямые линии соответствуют степенным зависимостям:
$1 - \tilde{\beta} \simeq P_0^{-1/6}$, $2 - \tilde{\beta} \simeq P_0^{-1/3}$.

$\gamma_m \simeq (\varepsilon_m)^{-1/2} \simeq 10^2$. При таких значениях параметра нелинейности имеем: $\gamma_m(\varepsilon_0)^{-1/2} \simeq 0.4 < 1$. Значение параметра нелинейности, оцененного из формулы (30) по амплитудам трех первых гармоник частоты повторения импульсов, оказалось также порядка $\gamma_m \simeq 10^2$ (в пределах от 80 до 230). По-видимому, такой разброс связан с тем, что функция модуляции в эксперименте несколько отличалась от теоретической аппроксимации (23).

Далее, используя экспериментальные результаты (см. рис. 6 в [1]), можно определить зависимость параметра $\tilde{\beta}$ от статического давления P_0 для сухого и водонасыщенного песка. Из выражения (27) следует, что

$$T^* - T = \tilde{\beta}z, \quad (31)$$

Графики зависимости $\lg(T^* - T) = \lg(\beta z)$ от $\lg P_0$ для сухого и водонасыщенного песка представлены на рисунке. Из него видно, что при $P_0 \geq 2\times10^3$ Па зависимость $\tilde{\beta}$ от P_0 имеет вид

$$\tilde{\beta}(P_0) \simeq \tilde{\beta}_m(P_0/P_m)^b, \quad (32)$$

где $b \simeq -1/6$ – для сухого песка, и $b \simeq -1/3$ – для водонасыщенного.

Декремент затухания $\theta = 2\pi\tilde{\beta}c$, согласно (32) и установленной в эксперименте [1] зависимости

$c(P_0) \sim P_0^m$ ($m \simeq 1/6$ при $P_0 > 2 \times 10^3$ Па, будет определяться выражением

$$\theta(P_0) \simeq \theta_m(P_0/P_m)^{-q}, \quad (33)$$

где $q \simeq 0$ и $\theta_m \simeq 0.61$ – для сухого песка, $q \simeq 1/3$, $\theta_m \simeq 1.1$ – для водонасыщенного.

Используя экспериментальные зависимости скорости и амплитуды видеосигналов от давления P_0 [1] и связь (32), из выражения (28) можно также определить зависимость параметра нелинейности γ от статического давления P_0:

$$\gamma(P_0) \simeq \gamma_m(P_0/P_m)^{-r}, \quad (34)$$

где $r \simeq 1/5$, $\gamma_m \simeq 84$ – для сухого песка, и $r \simeq 1/2$, $\gamma_m \simeq 74$ – для водонасыщенного.

Как отмечалось выше (см. замечание после формы (19)), параметр нелинейности γ определяется величиной (α/B), имеющей смысл отношения чисел слабо- и сильно- поджатых контактов: $\gamma = \alpha/\rho c^2 = (2\alpha/3B)(-\varepsilon_0)^{-1/2}$. С учетом выражения (34) получаем, что это отношение слабо зависит от статического давления, а именно: $\alpha/B \sim P_0^s$, где $s \simeq 2/15$ – для сухого песка, и $s \simeq 1/6$ – для водонасыщенного.

Таким образом, предположение о линейной частотной зависимости коэффициента поглощения упругих волн в сухом и водонасыщенном речном песке позволяет вполне удовлетворительно интерпретировать совокупность полученных экспериментальных результатов и получить разумные оценки декрементов затухания и параметров нелинейности для этих сред при различных значениях статического давления.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выполнен теоретический анализ приведенных в статье [1] результатов экспериментальных исследований процессов параметрической генерации и распространения низкочастотных видеоимпульсных сигналов в сухом и водонасыщенном речном песке: дано объяснение наблюдаемой формы продетектированных импульсов, а также зависимостей их амплитуды от амплитуды волны накачки и скорости их распространения от статического давления.

На основе сопоставления теоретических выводов с данными измерений определены параметры предложенных нелинейных уравнений состояния песка и его диссипативных характеристик. Показано, что описание детектирования и распространения акустических импульсов в рамках квадратичной частотной зависимости коэффициента поглощения упругих волн в песке приводит к противоречию с условиями эксперимента, в то время как предположение о линейной частотной зависимости коэффициента поглощения позволяет удовлетворительно интерпретировать совокупность полученных экспериментальных результатов.

Полученные экспериментальные данные и результаты их теоретического описания могут быть полезны при анализе сейсмических сигналов и использованы для развития методов сейсмоакустического зондирования, прежде всего, в направлении применения нелинейных эффектов для диагностических целей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 98-05-64683 и № 97-05-64711).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назаров В.Е., Колпаков А.Б., Зайцев В.Ю.* Детектирование акустических импульсов в речном песке. Эксперимент // Акуст. журн.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука. 1987, 248 с.
3. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
4. *Царева Н.В.* Распространение упругих волн в песке // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая, 1956, № 1. С. 1044–1053.
5. *Уайт Дж.Э.* Возбуждение и распространение сейсмических волн. М.: Недра, 1986. 462 с.
6. *Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю., Островский Л.А.* Нелинейные акустоупругие свойства зернистых сред // Акуст. журн., 1993. Т. 39, № 1. С. 25–32.
7. *Заболотская Е.А.* Звуковые пучки в нелинейном изотропном твердом теле // Акуст. журн., 1986. Т. 32, № 4. С. 474–479.
8. *Buckingham M.J.* Theory of acoustic attenuation, dispersion, and pulse propagation in unconsolidated granural material including marine sediments // J. Acoust. Soc. Amer. Vol. 102. № 5. Pt. 1. 1997. P 2579–2596.
9. *Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И.* Нелинейная гидроакустика. Л., 1981.
10. *Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю., Тиманин Е.М.* Экспериментальное исследование упругих нелинейных свойств в зернистых средах с неидеальной упаковкой // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 6. С. 893–898.
11. *Зайцев В.Ю.* Численное моделирование упругих нелинейных свойств зернистых сред с неидеальной упаковкой // Акуст. журн., 1995. Т. 41. № 3. С. 439–445.
12. *Анциферов М.С., Анциферова Н.Г., Каган Я.Я.* Распространение ультразвуковых волн в песке под давлением // Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1964, № 12. С. 1774–1781.
13. *Пархоменко И.С.* О зависимости затухания упругих волн от частоты в песке // Физика Земли, 1967, № 8. С. 101–109.
14. *Koltonski W., Malecki J.* Ultrasonic method for the exploration of the properties and structure of mineral layers // Acustica. № 8. 1958.

Detection of Acoustic Pulses in River Sand. Theory

V. Yu. Zaitsev, A. B. Kolpakov, and V. E. Nazarov

Nonlinear generation and propagation of video-pulse signals produced as a result of the detection of high-frequency acoustic pulses in dry and water-saturated river sand is studied theoretically. The waveform of the video pulses, their amplitude against the amplitude of the primary wave, and the propagation velocity versus static pressure are determined. The theoretical results are contrasted with experimental data to determine the acoustic parameters of sand. These parameters are compared with the data on the nonlinear and dissipation properties of granular media described in the literature.