

УДК 534.222.550.34

## О ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

© 1999 г. В. Ю. Зайцев, В. Е. Назаров

Институт прикладной физики РАН  
603600 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
E-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 28.04.98 г.

Предложена реологическая модель микронеоднородной упругой среды, в рамках которой удается объяснить линейную частотную зависимость коэффициента поглощения звука, экспериментально установленную для широкого класса твердых тел. Получено выражение, связывающее коэффициент затухания упругой волны со структурными характеристиками среды, и определен частотный диапазон, в пределах которого коэффициент затухания линейно зависит от частоты. Проведено сопоставление полученных результатов с феноменологическими теориями, данными экспериментов по поглощению упругих волн в различных микронеоднородных твердых телах, а также с требованиями к физически непротиворечивой модели диссипативных свойств среды, следующими из принципа причинности.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Многочисленными экспериментами установлено, что для жидкостей и газов коэффициент поглощения звука является квадратичной функцией частоты, а для большинства твердых тел (горных пород, многих металлов и т.д.) в широком диапазоне частот – линейной [1–3]. Квадратичная зависимость коэффициента поглощения звука в жидкостях и газах объясняется тепловыми и вязкими потерями [1–3]. В этом смысле близкая к линейной частотная зависимость коэффициента поглощения упругих волн в твердых телах (или, что эквивалентно, постоянное значение их добротности) в достаточно широком диапазоне частот является аномальной. Несмотря на многократные попытки, удовлетворительного объяснения этого факта до сих пор не предложено [1–7]. Предлагавшиеся ранее феноменологические модели, призванные описывать затухание упругих волн в таких средах, основывались на выборе подходящего уравнения состояния, связывающего напряжения и деформации с их производными по времени, и последующем подборе соответствующих коэффициентов при этих производных. В ряде случаев такая процедура оказывалась достаточно успешной, однако физический смысл вводимых коэффициентов и их связь со структурой среды оставались неясными [3].

В настоящей работе предлагается реологическая модель упругой микронеоднородной среды, в рамках которой удается объяснить линейную частотную зависимость коэффициента поглощения звука.

### 2. МОДЕЛЬ

#### МИКРОНЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Кратко остановимся на модели однородной упругой среды – одномерной цепочке одинаковых последовательно соединенных точечных масс  $M$  и пружинок длиной  $l$ , характеризующихся коэффициентом упругости  $k$  [8]. Для учета диссипации добавим в каждое звено этой цепочки, параллельно упругому элементу, диссипативный (неупругий) элемент (рис. 1). (В этой модели отдельные звенья цепочки, являются стандартными элементами Кельвина–Фойгта [9].)

Предполагая линейный (по амплитуде) характер упругой  $F_{el}$  и неупругой (диссипативной)  $F_{dis}$  сил, действующих на  $n$ -й элемент цепочки со стороны соседних  $(n - 1)$ -го и  $(n + 1)$ -го элементов, получаем следующие выражения для этих сил:

$$F_{el} = k[U(n + 1) - U(n)] - k[U(n) - U(n - 1)], \quad (1)$$

$$F_{dis} = g[\dot{U}(n + 1) - \dot{U}(n)] - g[\dot{U}(n) - \dot{U}(n - 1)], \quad (2)$$

где  $U(n)$  и  $\dot{U}(n)$  – смещение от положения равновесия и скорость  $n$ -й массы,  $g$  – коэффициент диссипации. Записывая второй закон Ньютона для

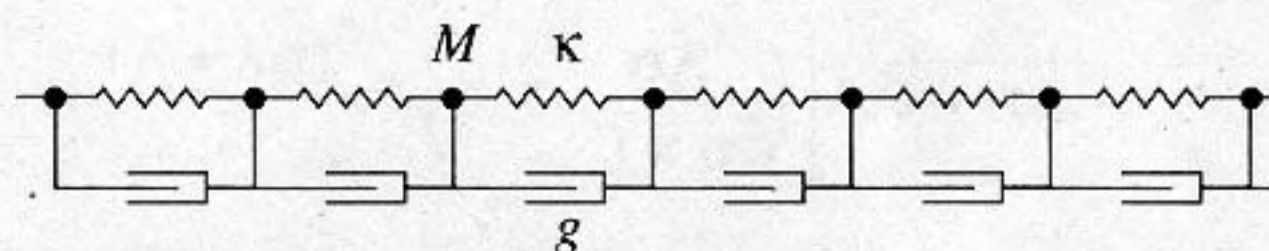


Рис. 1. Реологическая модель однородной упругой среды с вязкими потерями.

$n$ -й массы под действием этих сил, в длинноволновом приближении получаем волновое уравнение для смещения  $U(x, t)$ :

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = \alpha U_{xxt}, \quad (3)$$

где обозначено  $c^2 = l^2 \kappa / M$ ,  $\alpha = l^2 g / M$ .

Когда диссипативное слагаемое  $\alpha U_{xxt}$  относительно мало ( $|\alpha U_{xxt}| \ll |U_{tt}|, |c^2 U_{xx}|$ ), гармоническая волна  $U \sim \exp[j(\omega t - kx)]$  частоты  $\omega$  затухает, согласно (3), по закону

$$U \sim \exp[-\delta x], \quad (4)$$

где волновое число  $k = \omega/c$ , а коэффициент поглощения  $\delta = \alpha \omega^2 / 2c^3$ . (Отметим, что для таких сред добротность  $Q$ , определяемая как  $Q = \omega / 2c\delta$ , пропорциональна  $\omega^{-1}$ .) Из выражения (4) следует, что в рамках модели однородной среды, описываемой уравнением (3), коэффициент поглощения звука является квадратичной функцией частоты, при этом дисперсия скорости звука (в отмеченном выше приближении) практически отсутствует. Это характерно для жидкостей и газов и нетипично для твердых тел [1–5].

Для объяснения линейной частотной зависимости коэффициента поглощения и практического отсутствия дисперсии скорости упругих волн, наблюдающихся для широкого класса твердых тел, традиционная модель должна быть модифицирована. С этой целью в описанную выше модель введем изменения, отражающие характерные структурные особенности упругих сред, обладающих частотнонезависимой добротностью. Перечислим эти особенности.

(i). Отметим прежде всего, что все среды, демонстрирующие в широком диапазоне частотнонезависимую добротность, обладают микроструктурой и содержат явно выраженные элементы-блоки, малые по отношению к длине упругой волны, но крупные в атомарном масштабе (гранулы, зерна, трещины и т.д.). При построении модели среды необходимо иметь в виду, что с точки зрения упругих характеристик во всех подобных средах можно выделить малые (или тонкие – в масштабе длины волны и даже в масштабе упругих блоков) включения, которые являются существенно более мягкими по сравнению с окружающим материалом. К таким включениям относятся, в частности, контактные поверхности зерен и трещин, скопления дислокаций (по-существу – зарождающиеся микротрещины). Упругость таких включений для реальных сред может меняться в широком диапазоне от значений, типичных для однородного материала, до практически нулевых значений, характерных для разрывов сплошности.

(ii). Добротность микронеоднородных сред значительно ниже, чем для однородного материала, из которого состоят структурные блоки среды [1]. Это свидетельствует о том, что основные по-

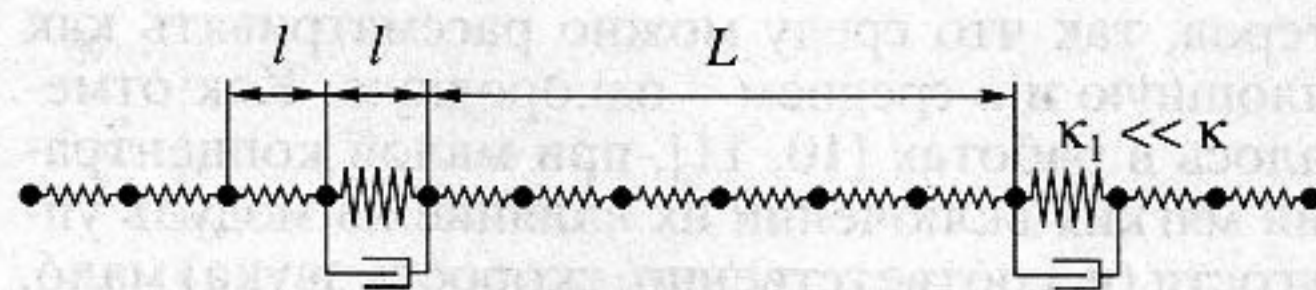


Рис. 2. Реологическая модель микронеоднородной упругой среды с мягкими вязкоупругими включениями.

тери энергии упругих колебаний обусловлены именно наличием надатомарной микроструктуры материала и связаны с относительным движением структурных элементов.

(iii). Результаты экспериментов свидетельствуют о том, что большинство реальных сред по отношению к затуханию в них упругих волн малой амплитуды являются линейными [3]. Поэтому при построении модели среды следует принять линейный (по амплитуде) характер поглощения.

Таким образом, учитывая отмеченные особенности (i)–(iii), характерные для сред с частотнонезависимой добротностью, примем следующую модель упругой микронеоднородной среды (см. рис. 2). Эта модель также представляет собой одномерную цепочку, состоящую из масс  $M$ , соединенных упругими элементами, длины которых предполагаем, для простоты, одинаковыми и равными  $l$ . В этой цепочке, однако, имеется некоторая (достаточно малая) часть более мягких пружинок, коэффициент упругости которых  $\kappa_1$  много меньше коэффициента упругости  $\kappa$  основной части пружинок ( $\kappa_1/\kappa = \zeta \ll 1$ ), причем диссипативные элементы имеются только у звеньев с мягкими включениями.

Сопоставляя предложенную модель с реальной средой, можно считать, что микроструктурным блоком среды с характерным размером  $L \gg l$  (гранулам, кристаллитам и т.д.) соответствуют кластеры, содержащие большое число жестких элементов, а мягкие пружинки между ними моделируют мягкие включения (межзеренные контакты, скопления дислокаций на границах кристаллитов и т.д.). Линейную концентрацию элементов цепочки будем считать равной  $N$ , а концентрацию мягких включений обозначим как  $N_1$ . Для простоты будем полагать, что поперечное сечение цепочки имеет единичную площадь, так что величины  $N$  и  $N_1$  можно рассматривать как объемные концентрации жестких и мягких пружинок, при этом сила, действующая на каждый элемент цепочки, равна напряжению  $\sigma$ . Характерную длину  $\Lambda$  упругой волны будем считать много большей размера  $L$  структурного блока среды:  $\Lambda \gg L$ .

Принятые предположения позволяют считать, что на длине порядка масштаба акустического возмущения имеется достаточно много как мягких включений, так и относительно жестких кла-

стеров, так что среду можно рассматривать как сплошную и в среднем – однородную. Как отмечалось в работах [10, 11], при малой концентрации мягких включений их влияние на модуль упругости (и, соответственно, скорость звука) мало, однако наличие таких дефектов приводит к локально большим значениям их деформации и, соответственно, скорости деформации.

При рассмотрении потерь энергии упругих колебаний в среде в свете экспериментально установленных фактов (ii) и понимания того, что мягкие элементы модели характеризуются большей скоростью деформации, будем учитывать диссипацию только на мягких дефектах и пренебрегать более слабой диссипацией на жестких звеньях. Последнее оправдывает то, что на рис. 2 диссипативные элементы показаны только на мягких включениях.

Сформулировав таким образом совокупность свойств предлагаемой модели, основанных на известных и весьма общих структурных и акустических характеристиках, присущих широкому классу реальных сред, посмотрим, к какой частотной зависимости поглощения могут привести принятые предположения.

### 3. ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА МОДЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

При квазистатическом деформировании мягкого вязко-упругого включения его уравнение состояния имеет вид [9]:

$$\sigma = \kappa_1 X_1 + g \dot{X}_1, \quad (5)$$

где  $X_1$  – изменение длины вязко-упругого элемента.

Напряжение  $\sigma$  и скорость  $\dot{U}$  движения частиц среды в упругой волне связаны через импеданс  $\rho c$  [8]:

$$\sigma = \rho c \dot{U}, \quad (6)$$

где  $\rho$  – плотность среды (в силу выбора единичного сечения цепочки объемная и линейная плотности совпадают). Здесь можно пользоваться соотношениями для однородной среды, поскольку при малой концентрации мягких дефектов скорость звука и плотность среды практически не изменяются [10, 11].

Чтобы характеризовать диссипативные свойства среды, воспользуемся определением, связывающим ее добротность с плотностью запасенной в упругой волне энергии  $W_{el}$  и ее потерями  $W_{dis}$  за период  $T = 2\pi/\omega$  [4]:

$$Q = 2\pi(W_{el}/W_{dis}). \quad (7)$$

Плотность упругой энергии  $W_{el}$  в гармонической волне определяется выражением

$$W_{el} = E\omega^2 U^2 / 2c^2, \quad (8)$$

где  $U$  – амплитуда смещений в упругой волне,  $E = \rho c^2$  – модуль упругости среды.

Потери энергии за период  $T$  определяются средней мощностью диссипативного напряжения  $\sigma_{dis} = g \dot{X}_1$ , действующего на каждом мягком элементе, и количеством  $N_1$  этих элементов:

$$W_{dis} = (\pi/\omega) N_1 g \omega^2 X_1^2, \quad (9)$$

где  $X_1$  – амплитуда изменения длины мягкого вязко-упругого элемента.

Для гармонической волны из уравнений (5), (6) получаем следующую связь между амплитудами  $U$  и  $X_1$ :

$$X_1 = \rho c \frac{j\omega}{i\omega g + \zeta \kappa} U. \quad (10)$$

Далее будем характеризовать диссипативные свойства среды безразмерным декрементом затухания  $\theta$  [3]:

$$\theta = \pi/Q. \quad (11)$$

Из уравнений (8)–(11) следует, что мягкие дефекты с одинаковым параметром упругости  $\zeta$  дают в декремент затухания вклад, определяемый выражением

$$\theta(\zeta) = \pi \frac{\omega/\Omega}{(\omega/\Omega)^2 + \zeta^2} v(\zeta), \quad (12)$$

где введены обозначения:  $v(\zeta) = N_1(\zeta)l$ ,

$$\Omega = \kappa/g \equiv E/(gl). \quad (13)$$

Величина  $v(\zeta)$  соответствует объемной концентрации мягких включений с коэффициентом упругости  $\kappa_1 = \zeta \kappa$ , а параметр  $\Omega$  имеет размерность частоты.

При наличии мягких дефектов с различной упругостью, характеризуемой параметром  $\zeta$  (максимальный диапазон изменения которого определяется неравенством  $0 \leq \zeta \leq 1$ ), их вклады в полный декремент суммируются с весом  $v(\zeta)$ , так что величина  $v(\zeta)d\zeta$  будет равна количеству мягких дефектов, имеющих параметр упругости от  $\zeta$  до  $\zeta + d\zeta$ . В соответствии с положением (i) будем считать, что функция распределения  $v(\zeta)$  является достаточно плавной в диапазоне  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Детали поведения функции  $v(\zeta)$  на краях этого диапазона не существенны, важным является лишь то, что в этом диапазоне можно выделить интервал  $a \leq \zeta \leq b$  (такой, что  $a \ll b < 1$ ), в котором функция распределения примерно постоянна (и равна  $v_0$ ), а

вне его  $v(\zeta) \ll v_0$ . Таким образом, полный декремент поглощения будет определяться интегралом

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &\approx \pi v_0 \int_a^b \frac{\omega/\Omega}{(\omega/\Omega)^2 + \zeta^2} d\zeta = \\ &= \pi v_0 \operatorname{arctg} \left( \frac{\zeta}{(\omega/\Omega)} \right) \Big|_a^b. \end{aligned} \quad (14)$$

Зависимость декремента поглощения  $\theta(\omega)$ , описываемая выражением (14), показана на рис. 3. Характерной для нее является область

$$a\Omega < \omega < b\Omega, \quad (15)$$

где, согласно (14), декремент поглощения практически не зависит от частоты:

$$\theta(\omega) \approx \pi^2 v_0 / 2. \quad (16)$$

Вне этой области декремент ведет себя следующим образом:

$$\theta(\omega) \approx \pi^2 v_0 (\omega/a\Omega), \quad \text{при } \omega < a\Omega, \quad (17)$$

$$\theta(\omega) \approx \pi^2 v_0 (b\Omega/\omega), \quad \text{при } \omega > b\Omega. \quad (18)$$

Существенно, что в частотном диапазоне, определяемом выражением (15), поглощение в микронеоднородной среде не зависит от ее вязкостных и упругих констант и определяется только структурной характеристикой – объемной концентрацией дефектов. Это замечание оправдывает сделанное выше неявно предположение о том, что в уравнении (14) параметр  $\Omega = \text{const}$  для всех дефектов, хотя это предположение и не является необходимым для справедливости полученных выводов.

Действительно, как видно из (12), параметр  $\Omega$  определяется упругостью  $k$  жесткого элемента и коэффициентом вязкости  $g$  мягкого включения, который может быть разным для различных дефектов. При наличии распределения вязко-упругих свойств дефектов одновременно по параметрам  $\zeta$  и  $g$  для нахождения декремента поглощения следует распределение  $v(\zeta)$  заменить на  $v(\zeta, g)$ , так что для  $\theta(\omega)$  вместо выражения (14) получаем:

$$\theta(\omega) \approx \pi v_0 \int_a^b d\zeta \int_0^\infty v(\zeta, g) \frac{\omega/\Omega}{(\omega/\Omega)^2 + \zeta^2} dg. \quad (19)$$

Интеграл (19) в области частотной независимости декремента  $a\Omega \ll \omega \ll b\Omega$  сводится к виду (14), в котором плотность  $v_0$  мягких включений связана с распределением  $v(\zeta, g)$  и с полным содержанием включений  $v$ , (т.е. долей в единице объема среды,

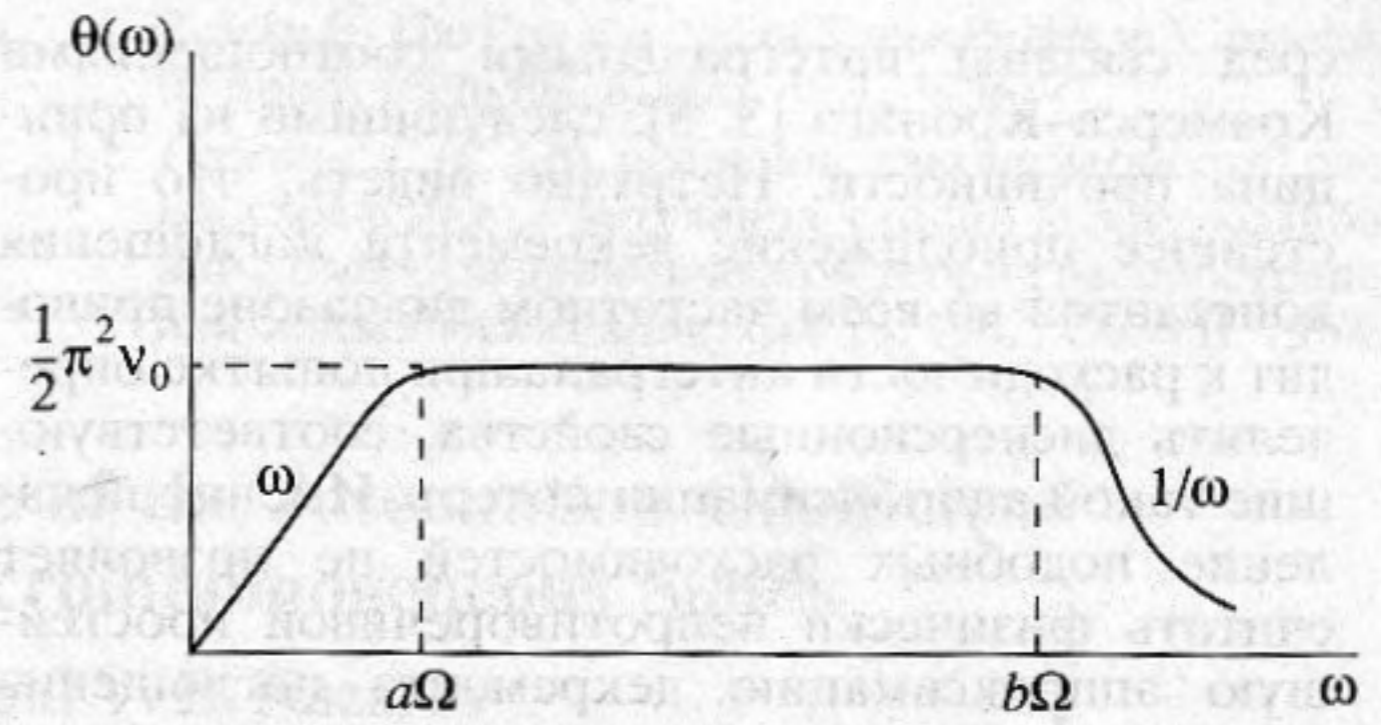


Рис. 3. Частотная зависимость декремента затухания упругих волн в микронеоднородной среде с мягкими вязкоупругими включениями, характеризуемыми широким распределением по параметру упругости  $\zeta = \kappa_1/\kappa$ .

которая достаточно легко может быть оценена экспериментально) простым соотношением:

$$\begin{aligned} v_t &= \int v(\zeta, g) d\zeta dg = \int v(\zeta) d\zeta \approx \\ &\approx v_0 \int_a^b d\zeta = (b-a)v_0 \approx bv_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Подчеркнем, что учет распределения дефектов по параметру  $g$  не отменяет вывода о существовании частотного диапазона, где декремент затухания практически не зависит от частоты, хотя границы диапазона постоянства  $Q$  “размываются” и не могут быть определены выражением (15), поскольку характерная частота  $\Omega$  зависит от  $g$ .

Итак, из предложенной модели микронеоднородной среды, основанной на использовании хорошо известных из опыта данных об общих ее структурных особенностях, следует, что существует частотная область, которая может быть достаточно широкой, в пределах которой добротность среды является практически постоянной. Основным допущением в предложенной модели является предположение о широком распределении мягких включений по их упругим коэффициентам. В отличие от ранее предлагавшихся теорий [3, 4] здесь не потребовалось привлекать дополнительные предположения о каком-либо специальном (нелинейном) характере диссипации упругой энергии при деформации структурных элементов среды, а оказалось достаточным использовать потери типа вязкого трения.

#### 4. СООТНОШЕНИЕ СЛЕДСТВИЙ ИЗ ПРЕДЛОЖЕННОЙ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИМИ ТЕОРИЯМИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Как известно, диссипативные и дисперсионные характеристики физически реализуемых

сред связаны интегральными соотношениями Крамерса–Кронига [3, 5], следующими из принципа причинности. Нетрудно видеть, что простейшее приближение декремента поглощения константой во всем частотном диапазоне приводит к расходимости интеграла при попытке определить дисперсионные свойства, соответствующие такой аппроксимации потерь. Именно появление подобных расходимостей не позволяет считать физически непротиворечивой простейшую аппроксимацию декремента поглощения константой, а также исключает ряд других феноменологических теорий [3]. В работах [12, 13], было показано, что для соблюдения принципа причинности необходимо предположить существование граничной частоты  $\omega_0$  (“...физический смысл которой совершенно неизвестен” [3]), ниже которой декремент затухания должен быть либо равен нулю, либо линейной функцией частоты. Рассматривая с этой точки зрения полученные выражения (14)–(19), нетрудно видеть, что эта феноменологически введенная граничная частота  $\omega_0 = a\Omega$ , где  $\Omega$  определяется выражением (12). Действительно, согласно (16), в диапазоне  $\omega < a\Omega$  получается линейная частотная зависимость декремента затухания.

Как отмечено в обзоре [3], из различных феноменологических теорий опытным данным наилучшим образом соответствует теория Гуревича [14], основанная на предположении о существовании в среде некоторых релаксационных процессов с ограниченным непрерывным спектром времен релаксации  $\tau$  с плотностью вида  $\Delta(\tau) = 1/\tau$ . Однако такой выбор функции  $\Delta(\tau)$  “является произвольным и не следует из каких-либо физических закономерностей” [3]. В предложенной модели микро-неоднородной среды для получения вывода о почти постоянной добротности вполне достаточно предположить, что вязкоупругие дефекты имеют широкое распределение  $v(\zeta)$  по параметру упругости  $\zeta$ . Это предположение является довольно естественным и вполне согласуется с известными особенностями строения микро-неоднородных тел: упругость межзеренных контактов, микротрещин и подобных дефектов в них на самом деле меняется на порядки практически от нуля до значений, характерных для однородного материала. Отметим, что выводы феноменологической теории Гуревича и результаты, полученные в рамках предложенной модели среды, совпадают.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко обсудим следующие из предложенной модели ограничения на частотный диапазон, в котором добротность практически постоянна. Из выражений (15)–(17) видно, что относительная ширина частотного диапазона определяется отно-

сительной шириной распределения мягких включений по параметру их упругости. Поскольку отношение коэффициентов упругости включений может достигать нескольких порядков, аналогичную ширину будет иметь и частотный диапазон постоянства добротности. Еще одно ограничение на верхнюю границу этого частотного диапазона следует из условия малости размеров структурных блоков среды по сравнению с длиной упругой волны  $\Lambda \ll L$ . Это условие может оказаться более жестким для сред с достаточно крупномасштабной структурой, например, земных пород. Для самой величины декремента затухания выражения (16), (20) дают вполне правдоподобную оценку: при концентрации дефектов  $v$ , порядка  $10^{-3}$ ,  $b = 10^{-1}$  получаем,  $\theta \approx 5 \times 10^{-2}$  (что соответствует типичной для земных пород добротности  $Q \approx 60$ ).

Подчеркнем также, что в проведенном рассмотрении использовался, по существу, энергетический подход, а потому приведенный на рис. 2 одномерный образ модели не является необходимым для справедливости полученных выводов. В трехмерном случае все заключения о функциональных зависимостях также останутся в силе, хотя для анизотропных сред численные коэффициенты могут измениться.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 98-02-17686 и № 98-05-64683).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. Т. 3. Ч. Б. М.: Мир, 1968. 392 с.
2. Knopoff L., Mac-Donald G. Models for Acoustic Loss in Solids // J. Geophys. Res. 1960. V. 65. № 7. P. 2191.
3. Коган С.Я. Краткий обзор теорий поглощения сейсмических волн. Ч. I, II // Физика Земли, 1966. № 11. С. 3–22.
4. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир, 1983. 520 с.
5. Lundquist G.M., Cormier V.C. Constraints on the absorption band model of  $Q$  // J. Geophys. Res. 1980. V. 85. № B10. P. 5244–5256.
6. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996. 448 с.
7. Buckingham M.J. Theory of acoustic attenuation, dispersion, and pulse propagation in unconsolidated granular material including marine sediments // J. Acoust. Soc. Amer. V. 102. № 5. Pt. 1. 1997. P. 2579–2596.
8. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков С.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
9. Дейвис Р.М. Волны напряжений в твердых телах. М.: ИИЛ, 1961. 104 с.
10. Zaitsev V.Yu. A model of anomalous acoustic nonlinearity of microinhomogeneous media // Acoustics Letters 1996. V. 19. № 9. P. 171–174.

11. *Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю.* Упругие нелинейные свойства микронеоднородных сред с иерархической структурой // *Акуст. журн.* 1997. Т. 43. № 5. С. 594–599.
12. *Futterman W.I.* Dispersive body waves // *J. Geophys. Res.* 1962. V. 67. № 13. P. 5279.
13. *Kolsky H.* The Propagation of Stress Pulses in Viscoelastic Solids // *Phylos. Magaz.* V. 1. 1956.
14. *Гуревич Г.И.* Об основной закономерности распространения и затухания сейсмических колебаний / Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Сб. VI. 1962; Сб. VII. 1964.

## Linear Frequency Dependence of the Attenuation Coefficient of Elastic Waves in Microinhomogeneous Solids

V. Yu. Zaitsev and V. E. Nazarov

A physical model of a microinhomogeneous elastic medium is proposed. In terms of this model, the linear frequency dependence of the sound attenuation coefficient observed in the experiment for a wide variety of solids is explained. An expression relating the attenuation coefficient of an elastic wave to the structural characteristics of the medium is obtained, and the frequency range corresponding to the linear frequency dependence of the attenuation coefficient is determined. The results obtained are correlated with other phenomenological theories and the experimental data on elastic wave attenuation in various microinhomogeneous solids. The requirements imposed on a physically consistent model of the dissipation properties of a medium by the causality principle are taken into account.