АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2000, том 46, № 2, с. 282–284

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.26

АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ УПРУГОЙ СРЕДЕ

© 2000 г. В. И. Григорьевский, Ю. В. Гуляев, А. И. Козлов

Институт радиотехники и электроники РАН
141120 Московская обл., г. Фрязино, пл. Введенского, 1
E-mail: plsoy@cityline.ru

Поступила в редакцию 22.12.98 г.

Разнообразные устройства на поверхностных акустических волнах (ПАВ) Рэлея, такие как полосовые и дисперсионные фильтры, резонаторы, датчики и линии задержки в настоящее время широко используются в технике [1, 2]. Большое разнообразие внешних условий, в которых такие устройства применяются, побуждает исследовать влияние этих условий на свойства ПАВ. Это сообщение посвящено изучению распространения ПАВ Рэлея, а также объемных акустических волн вдоль поверхности вращающегося звукопровода с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе со звукопроводом. Результаты решения такой, на первый взгляд, чисто академической задачи, казалось бы, могут представлять интерес лишь для разработки датчиков вращательного движения. Однако, в работе [3], к примеру, предлагается новый метод определения качества бумажной массы в процессе ее изготовления, основанный на измерении скорости звука в различных направлениях для бумажной массы, вращающейся на специальных барабанах.

В равномерно вращающейся упругой среде уравнения движения приобретают два дополнительных, по сравнению с инерциальной системой координат, члена:

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = 2\rho(\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega}) + \rho(\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})) + (\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u}, \quad (1)$$

где ρ – плотность материала звукопровода, $\mathbf{u}$ – вектор смещения, $\mathbf{v} = \partial\mathbf{u}/\partial t$ – скорость смещения частиц среды, $\mathbf{\Omega}$ – угловая скорость вращения звукопровода, $\mathbf{r}$ – радиус вектор рассматриваемого малого элемента среды во вращающейся системе отсчета, λ и μ – упругие постоянные Ламе.

Первый член в правой части уравнения (1) описывает действие силы Кориолиса, а второй – центробежной силы. Всюду далее мы не будем включать центробежную силу в рассмотрение. Такое приближение оказывается справедливым в двух независимых и достаточно важных частных случаях:

а) если угловая скорость вращения много меньше циклической частоты упругой волны: $\Omega/\omega \ll 1$;

б) если область звукопровода, в которой распространяются упругие волны, достаточно удалена от оси вращения, так что радиус-вектор любой точки, участвующей в волновом движении, приближенно можно считать одним и тем же.

Мы ограничим рассмотрение акустическими волнами, поляризованными в плоскости XY системы координат, вращающейся вокруг оси OZ (рис. 1).

Поскольку вид уравнений движения в данной задаче [4] существен и не вполне традиционен, кратко приведем их вывод. Раскладываем вектор смещения на потенциальную и соленоидальную части:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \text{ где } \mathrm{rot}\mathbf{u}_l = 0,\ \mathrm{div}\mathbf{u}_t = 0.$$

Применяя операции rot и div к обеим частям уравнения (1), получаем

$$\mathrm{div}\left\{-\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}_l}{\partial t^2} + 2\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}_t}{\partial t}\times\mathbf{\Omega}\right) + (\lambda+2\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u}_l\right\} = 0; \quad (1а)$$

$$\mathrm{rot}\left\{-\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}_t}{\partial t^2} + 2\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}_t}{\partial t}\times\mathbf{\Omega}\right) + (\lambda+2\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u}_l\right\} = 0; \quad (1б)$$

Тогда первое уравнение движения следует из выражений (1а) и (1б): поскольку если ротор и дивергенция некоторого вектора равны нулю в некоторой области пространства, то равен нулю и сам вектор [5]:

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}_l}{\partial t^2} = 2\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}_t}{\partial t}\times\mathbf{\Omega}\right) + (\lambda+2\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u}_l. \quad (2а)$$

Отметим, что при выводе уравнений (1а) и (1б) мы использовали следующие условия:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t}\times\mathbf{\Omega}\right) = \mathbf{\Omega}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{u}_l = 0,$$
$$\text{а также}\ \operatorname{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t}\times\mathbf{\Omega}\right) = (\mathbf{\Omega}\cdot\vec{\nabla})\cdot\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} = 0. \qquad (3)$$

Первое из условий (3) выполняется всегда, а второе существенно использует тот факт, что вектор упругих смещений лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения: $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, 0\}$, $\mathbf{\Omega} = \{0, 0, \Omega_z\}$.

Тем же путем несложно получить и второе уравнение движения:

$$\rho\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} = 2\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t}\times\mathbf{\Omega}\right) + (\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_t. \qquad (2б)$$

По сравнению с уравнениями в работе [4] первые члены в правой части уравнений (2) поменялись местами, что делает эти уравнения взаимозависимыми. Поэтому рассмотрим вначале распространение объемных упругих волн во вращающемся звукопроводе. Будем искать решение для упругих смещений в виде однородных сдвиговой u_t и продольной u_l объемных волн:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{f}\exp[i(qx-\omega t)]$$
$$\mathbf{u}_l = \mathbf{g}\exp[i(qx-\omega t)]$$

здесь $\mathbf{f} \parallel OY$, $\mathbf{g} \parallel OX$.| Подставляя эти решения в уравнения движения (2), определим волновые числа объемных волн:

$$q_t \equiv \sqrt{\frac{k_t^2+k_l^2}{2} + \sqrt{\frac{(k_t^2-k_l^2)^2}{4} + 4\frac{\Omega^2}{\omega^2}k_t^2k_l^2}};$$
$$q_l \equiv \sqrt{\frac{k_t^2+k_l^2}{2} - \sqrt{\frac{(k_t^2-k_l^2)^2}{4} + 4\frac{\Omega^2}{\omega^2}k_t^2k_l^2}}; \qquad (4)$$

при $\Omega/\omega \longrightarrow 0$, $q_l \longrightarrow k_l \equiv \sqrt{\rho\omega^2/(\lambda+2\mu)}$, $q_t \longrightarrow k_t \equiv \sqrt{\rho\omega^2/\mu}$.

Таким образом, во вращающейся упругой среде объемные продольные и поперечные акустические волны распространяются в виде связанных мод:

$$\mathbf{u}_t = (\mathbf{f}_t + \mathbf{g}_t)\exp[i(q_t x - \omega t)],$$
$$g_t = -f_t(q_t^2 - k_t^2)/(2ik_t^2\Omega/\omega);$$
$$\mathbf{u}_l = (\mathbf{g}_l + \mathbf{f}_l)\exp[i(q_l x - \omega t)],$$
$$f_l = g_l(q_l^2 - k_l^2)/(2ik_l^2\Omega/\omega).$$

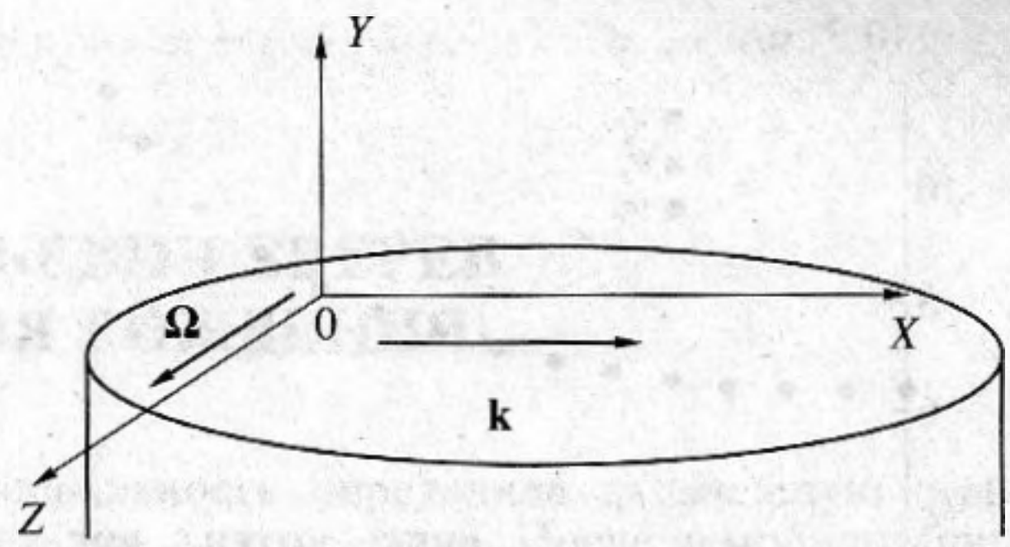

Рис. 1. Геометрия задачи.

Рассмотрим выражения (4) подробнее. При $\Omega = \omega/2$, видно, что $q_l = 0$ и $f_l = ig_l$, то есть попытка возбудить продольную волну в таких условиях приведет к гармоническим колебаниям всего звукопровода как единого целого. С ростом частоты вращения волновое число q_l становится мнимой величиной. С точки зрения наблюдателя, находящегося в инерциальной системе отсчета, мнимое значение волнового числа указывает на то, что в достаточно быстро вращающемся звукопроводе невозможно возбудить продольную упругую волну, так как любой малый элемент упругой среды меняет свое положение из-за вращения быстрее, чем в колебательном движении. Скорость поперечной волны с ростом частоты вращения убывает пропорционально $(\Omega/\omega)^{-1/2}$.

Для ПАВ Рэлея решение мы будем искать в обычной форме двухкомпонентной волны, экспоненциально затухающей в звукопроводе с глубиной:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{f}\exp[i(kx-\omega t) + ry];$$
$$\mathbf{u}_l = \mathbf{g}\exp[i(kx-\omega t) + ry].$$

Используя стандартную процедуру [5], определяем компоненты ПАВ из уравнений движения (2):

$$\begin{cases} u_x = \{r_t a\exp(r_t y) + ikb\exp(r_l y)\}\times \\ \times\exp[i(kx-\omega t)] \\ u_y = \{-ika\exp(r_t y) + r_l b\exp(r_l y)\}\times \\ \times\exp[i(kx-\omega t)], \end{cases} \qquad (5)$$

где a и b – произвольные константы, а

$$r_l^2 = h_l^2 + k^2; \quad r_t^2 = h_t^2 + k^2, \ \text{причем}$$

$$h_l^2 = -\frac{k_t^2+k_l^2}{2} + \sqrt{\frac{(k_t^2+k_l^2)^2}{4} + 4\frac{\Omega^2}{\omega^2}k_t^2k_l^2};$$

$$h_t^2 = -\frac{k_t^2+k_l^2}{2} - \sqrt{\frac{(k_t^2+k_l^2)^2}{4} + 4\frac{\Omega^2}{\omega^2}k_t^2k_l^2}.$$

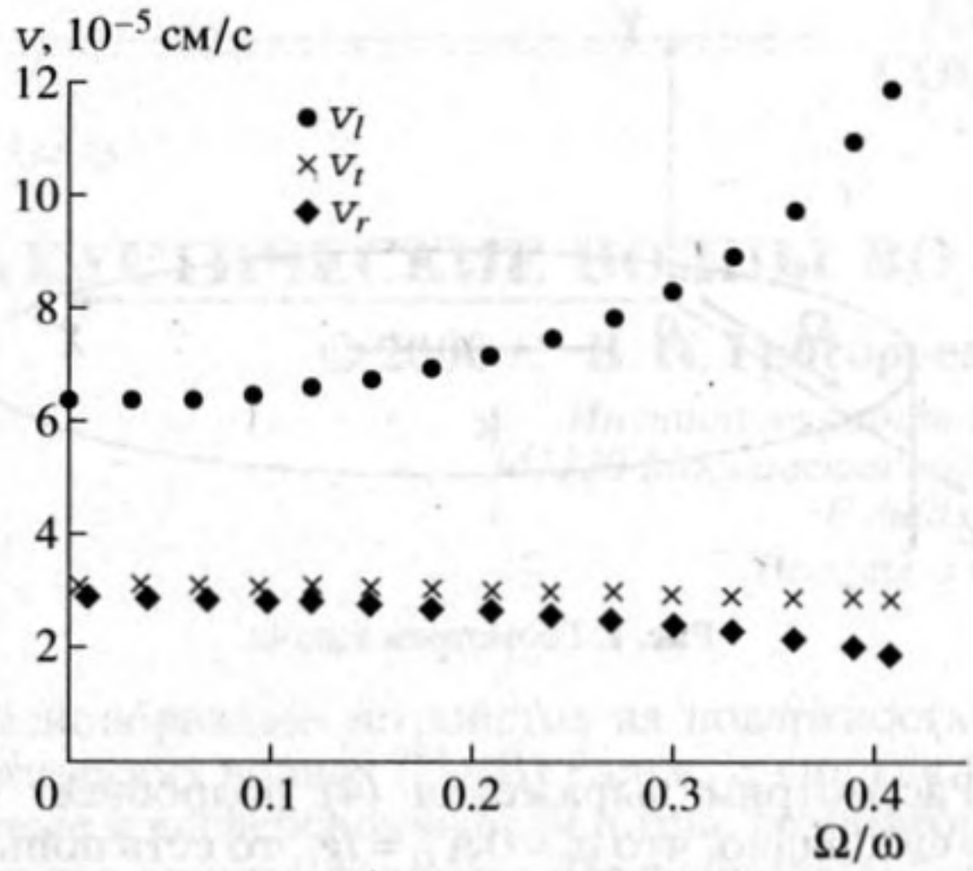

Рис. 2. Зависимости скоростей акустических волн от частоты вращения звукопровода (v_l – скорость продольной волны, v_t – поперечной, v_r – ПАВ Рэлея).

Подставляя решение (5) в граничные условия, состоящие в равенстве нулю упругих напряжений на свободной поверхности твердого тела, мы получим соотношение, которое несколько отличается от стандартной формы детерминанта Рэлея:

$$(r_t^2 + k^2)(k_t^2 h_l^2 + 2k^2 k_l^2) - 4k^2 r_t r_l k_l^2 = 0; \qquad (6)$$

или (введя $\xi = k_t/k$) это уравнение несложно переписать в другом виде:

$$\xi^6 + 4\xi^4 \frac{(k_l^2 h_t^2 + k_t^2 h_l^2)}{h_t^2 h_l^2} +$$

$$+ 4\xi^2 \frac{(k_t^4 h_l^4 + k_l^4 h_t^4) + 4k_l^2 h_t^2 h_l^2 (k_t^2 - k_l^2)}{h_t^4 h_l^2} + \qquad (6a)$$

$$+ 16 \frac{k_l^2 k_t^2}{h_l^2 h_t^4}\left(1 - \frac{k_l^2}{k_t^2}\right) = 0.$$

Известные выражения для детерминанта Рэлея легко получаются из уравнений (6) и (6а) при $\Omega/\omega \longrightarrow 0$. Уравнения (6) и (4) были решены численно для алюминия (коэффициент Пуассона $\sigma = 0.345$, модуль Юнга $E = 7.03 \times 10^{11}$ дина/см^2, плотность $\rho = 2.7$ г/см^3). Рассчитанные зависимости скоростей объемных и поверхностной волн от частоты вращения приведены на рис. 2. При $\Omega \geq \omega/2$ для уравнения (6) не было обнаружено незатухающего вдоль направления распространения решения типа ПАВ Рэлея. Действительно, поскольку продольная упругая волна в достаточно быстро вращающемся звукопроводе не возбуждается, невозможна и генерация ПАВ, вектор смещения которой имеет продольную компоненту. Бесконечный рост скорости продольной волны (заметим – в неинерциальной системе координат!) с ростом скорости вращения является формальным математическим следствием отмеченного выше вырождения этой волны в продольные колебания всего звукопровода, когда $\Omega = \omega/2$.

Итак, в данном сообщении свойства продольной, поперечной и поверхностной акустической волны Рэлея во вращающейся упругой среде исследованы для случая поляризации этих волн в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Было установлено, что продольная объемная и поверхностная волны не могут распространяться в таком звукопроводе, если частота вращения превышает удвоенную частоту волны. Работа была выполнена по контракту INTAS-96-441.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морган Д.* Устройства обработки сигналов на поверхностных акустических волнах. Пер. с англ. М.: Радио и связь. 1990. 416 с.
2. *Loveday P.W., Rogers C.A.* Modification of piezoelectric vibratory gyroscope resonator parameters by feedback control // IEEE trans. ultrason. ferroelect. freq. contr. 1998. V. 45. № 2. P. 1211–1215.
3. *Hall M.S. et al.* System for measuring the ultrasonic velocity in the thickness direction of moving webs without errors due to delays in the ouset of digitation // J. Acoust. Soc. Amer. 1996. V. 100. № 2. Pt. 1. P. 686 (US Patent № 5493911).
4. *Hamish H.* Die Ausbreitung elastischer Wellen im rotierenden Medium // Acustica. 1990. V. 72. № 4. S. 275–279.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. 1987. М.: Наука. 4-е изд. 246 с.