АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2000, том 46, № 4, с. 545–550

УДК 537.84+621.03

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ С ВМОРОЖЕННОЙ НАМАГНИЧЕННОСТЬЮ

© 2000 г. В. В. Соколов, В. В. Толмачев

Московская государственная академия приборостроения и информатики
107846 Москва, ул. Стромынка, 20
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
107005 Москва, ул. 2-я Бауманская, 5
E-mail: postmaster@interd.bmgtn.msk.su

Поступила в редакцию 22.03.99 г.

В рамках континуальной модели идеального непроводящего твердого тела с вмороженной намагниченностью исследуется распространение ультразвука. Показано удовлетворительное согласие экспериментальных и теоретических результатов.

Концепция вмороженной намагниченности была использована в [1] для вывода уравнений феррогидродинамики, акустическое приближение которых позволило описать имеющиеся экспериментальные результаты по анизотропии скорости распространения ультразвука в намагниченных магнитных жидкостях [2] и предсказать существование новой гидродинамической моды альфвеновского типа [3].

Ниже показано, что концепция вмороженной намагниченности полезна также и для твердых намагниченных сред. Предложенная теория распространения упругих волн основана на модели идеального твердого тела с вмороженной намагниченностью [4], поэтому область ее применимости определяется условием $\omega\tau \gg 1$, где ω – частота упругого возмущения, τ – время релаксации напряженности магнитного поля к термодинамически равновесному значению, а также ограничена условием $\omega \ll \omega_0$, где ω_0 – ларморовская частота.

Сформулируем условия вмороженности намагниченности в вещество твердого тела. Намагниченность тела можно представить как результат бесконечно малого смещения двух воображаемых "жидкостей", обладающих магнитными зарядами, точно компенсирующими друг друга в любой точке среды, когда эти "жидкости" не смещены. Твердое тело с объемной плотностью намагниченности $\mathbf{M}$ эквивалентно в магнитном отношении такому телу с такой же намагниченностью, если объемная ρ_m и поверхностная σ_m плотности магнитных зарядов тела удовлетворяют соответственно соотношениям:

$$\rho_m = -\mathrm{div}\mathbf{M}, \quad \sigma_m = M_n,$$

где M_n – проекция $\mathbf{M}$ на внешнюю нормаль к поверхности тела. Тогда условие вмороженности намагниченности в вещество твердого тела в каждой точке его объема тождественно условию вмороженности объемных магнитных зарядов и записывается в виде:

$$\rho'_m dV' = \rho_m dV,$$

где штрихом обозначены величины для смещенных точек тела, причем величина смещения характеризуется лагранжевыми вариациями $\delta^*\mathbf{q}$. Таким образом, магнитные заряды бесконечно малых объемных элементов среды при варьировании не меняются. Следовательно

$$\delta^*\rho_m = -\rho_m \mathrm{div}(\delta^*\mathbf{q}).$$

Рассмотрим теперь вектор смещения $\mathbf{l}$ частицы с положительным зарядом относительно частицы с отрицательным зарядом, лагранжева вариация которого дается формулой

$$\delta^*\mathbf{l} = \delta^*(\mathbf{r}+\mathbf{l}) - \delta^*(\mathbf{r}) = (\mathbf{l}\nabla)\delta^*\mathbf{q}.$$

Принимая во внимание два последних соотношения, получим для вариации намагниченности $\mathbf{M} = \rho_m\mathbf{l}$ следующее выражение

$$\delta^*\mathbf{M} = (\mathbf{M}\nabla)\delta^*\mathbf{q} - \mathbf{M}(\nabla\delta^*\mathbf{q}).$$

Разделив обе части этого уравнения на бесконечно малый интервал времени dt, получим уравнение для изменения объемной плотности намагниченности:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{M}\mathrm{div}\mathbf{v}.$$

Удобно ввести удельную намагниченность, т.е. намагниченность в расчете на единицу массы $m = \mathbf{M}/\rho$, где ρ – плотность твердого тела. С учетом

уравнения неразрывности преобразуем последнее уравнение к виду

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{v}. \qquad (1)$$

В [4] приведена следующая система уравнений магнитоупругости непроводящего идеального твердого тела в вмороженной намагниченностью

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_i}\right) = 0;$$

$$\frac{dm_i}{dt} = m_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial q_i}{\partial t}\right);$$

$$\rho\frac{d^2 q_i}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial q_{k,n}}\left(\delta_{ki} - \frac{\partial q_k}{\partial x_i}\right) + \right. \qquad (2)$$

$$\left. + \rho m_n\left(\frac{\partial u}{\partial m_i}\right)_{s,p}\right) - H_i\frac{\partial(\rho m_j)}{\partial x_j};$$

$$\nabla^2\psi = 4\pi\frac{\partial(\rho m_j)}{\partial x_j}; \quad H_i = -\frac{\partial\psi}{\partial x_i}.$$

Система уравнений замыкается заданием конкретного вида плотности внутренней энергии u, которая зависит от инвариантов тензора, составленного из пространственных производных $q_{i,j}$ вектора смещений q_i индивидуальных точек твердого тела, удельной энтропии s и компонент вектора удельной намагниченности m_i. Последние два уравнения (1) являются магнитостатическими уравнениями Максвелла, ψ – скалярный потенциал магнитного поля.

Вывод этой системы уравнений, основанный на обобщенном принципе виртуальных смещений [5] и концепции вмороженности намагниченности в вещество тела, аналогичен выводу уравнений феррогидродинамики с вмороженной намагниченностью, который подробно описан в работе [1].

Особенностью системы (2) является уравнение для намагниченности, выражающее, как показано выше, условие вмороженности намагниченности в вещество твердого тела. Система уравнений магнитоупругости (2) позволяет изучать поведение твердых тел, не ограничиваясь случаем магнитного насыщения.

Исследуем распространение линейных продольных и сдвиговых волн в упруго изотропном непроводящем твердом теле в рамках приведенной выше системы уравнений (2). Зададим вид функциональной зависимости внутренней энергии. Положим, что объемная плотность $U = \rho u$ внутренней энергии твердого тела является аддитивной функцией вида (см. [6, 7])

$$U = \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 + \mu(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yy}^2 +$$

$$+ \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + \beta_1(m_x^2\varepsilon_{xx} + m_y^2\varepsilon_{yy} + m_z^2\varepsilon_{zz}) + \qquad (3)$$

$$+ 2\beta_2(m_x m_y\varepsilon_{xy} + m_y m_z\varepsilon_{yz} + m_z m_x\varepsilon_{zx}) +$$

$$+ K(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_x^2 m_z^2),$$

где $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(q_{i,j} + q_{j,i})$ – тензор деформации, λ, μ – коэффициенты Ламэ, β_1, β_2 – адиабатические константы магнитоупругой связи, K – константа анизотропии.

Предположим, что изучаемое твердое тело находится во внешнем однородном стационарном постоянном магнитном поле напряженности H и направим ось z декартовой системы координат вдоль вектора напряженности магнитного поля.

Вектор плотности намагниченности для невозмущенного состояния имеет теперь только одну ненулевую компоненту $m_z = m_0$. Линеаризованные около невозмущенного состояния уравнения системы (2), с учетом явного вида функциональной зависимости внутренней энергии (3), имеют вид:

$$\rho_0\frac{\partial^2 q_x}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 q_x}{\partial y^2} + (\mu + m_0^2\beta_2)\frac{\partial^2 q_x}{\partial z^2} +$$

$$+ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 q_y}{\partial x\partial y}(\lambda + \mu + m_0^2\beta_2)\frac{\partial^2 q_z}{\partial x\partial z} + m_0^3 K\frac{\partial m_x}{\partial z};$$

$$\rho_0\frac{\partial^2 q_y}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 q_y}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 q_y}{\partial x^2} + (\mu + m_0^2\beta_2)\frac{\partial^2 q_y}{\partial z^2} +$$

$$+ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 q_x}{\partial x\partial y}(\lambda + \mu + m_0^2\beta_2)\frac{\partial^2 q_z}{\partial y\partial z} + m_0^3 K\frac{\partial m_y}{\partial z};$$

$$\rho_0\frac{\partial^2 q_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu + 2m_0^2\beta_1)\frac{\partial^2 q_z}{\partial z^2} + \qquad (4)$$

$$+ (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 q_x}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 q_y}{\partial y\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 q_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_z}{\partial y^2}\right);$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = m_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial q_x}{\partial t}\right);$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = m_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial q_y}{\partial t}\right);$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = m_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial q_z}{\partial t}\right).$$

Без ограничения общности исследуем распространение плоских монохроматических волн с цик-

лической частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$, лежащим в плоскости y, z. Обозначим через ϑ угол между направлением волнового вектора $\mathbf{k}$ и осью z. В результате система уравнений (4) примет вид:

$$[\omega^2 - k^2(c_{0t}^2\sin^2\vartheta + (c_{0t}^2 + \Delta_t)\cos^2\vartheta)]q_x = 0;$$

$$[\omega^2 - k^2(c_{0l}^2\sin^2\vartheta + (c_{0t}^2 + \Delta_t)\cos^2\vartheta)]q_y -$$

$$-[k^2(c_d^2 + b)\sin 2\vartheta]q_z = 0; \qquad (5)$$

$$[k^2(c_d^2 + b)\sin 2\vartheta]q_y -$$

$$-[\omega^2 - k^2(c_{0t}^2\sin^2\vartheta + (c_{0l}^2 + \Delta_l)\cos^2\vartheta)]q_z = 0,$$

где

$$c_{0l}^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0};\quad c_{0t}^2 = \frac{\mu}{\rho_0};\quad c_s^2 = \frac{c_{0l}^2 + c_{0t}^2}{2};$$

$$c_d^2 = \frac{c_{0l}^2 - c_{0t}^2}{2};\quad \Delta_l = 4\frac{\beta_1}{\rho_0}m_0^2;$$

$$\Delta_t = \frac{2m_0^2(\beta_2 + m_0^2K)}{\rho_0};\quad b = \frac{\beta_2 m_0^2}{2\rho_0}.$$

Из первого уравнения этой системы следует, что скорость упругой поперечной волны равна

$$c_t^A = \sqrt{c_{0t}^2 + \Delta_t\cos^2\vartheta}, \qquad (6)$$

так как смещения частиц среды в ней происходят вдоль оси x ($q_x \neq 0$, $q_y = 0$, $q_z = 0$).

Второе и третье уравнения системы (5) приводят к следующему дисперсионному уравнению

$$\omega^4 - 2\omega^2(c_s^2 + \Delta_s\cos^2\vartheta) + 2k^4c_d^2(\Delta_l\sin^2\vartheta +$$

$$+\Delta_t\cos^2\vartheta + 2B\sin^2\vartheta)\cos^2\vartheta + k^4[(2c_{0t}^2\Delta_s +$$

$$+\Delta_l\Delta_t\cos^2\vartheta + 4b^2\sin^2\vartheta)\cos^2\vartheta + c_{0l}^2c_{0t}^2] = 0.$$

Решения этого уравнения определяют скорость распространения упругой квазипродольной волны ($q_x = 0$, $q_y \neq 0$, $q_z \neq 0$)

$$c_l = \sqrt{c_s^2 + \Delta_s\cos^2\vartheta + (c_d^2 - \Delta_d\cos^2\vartheta)\sqrt{1 - A\sin 2\vartheta}} \qquad (7)$$

и скорость распространения упругой квазипоперечной волны

$$c_t = \sqrt{c_s^2 + \Delta_s\cos^2\vartheta - (c_d^2 - \Delta_d\cos^2\vartheta)\sqrt{1 - A\sin 2\vartheta}}. \qquad (8)$$

Здесь введены обозначения:

$$\Delta_s = (\Delta_l + \Delta_t)/2;\quad \Delta_d = (\Delta_l - \Delta_t)/2;$$

$$A = \frac{c_d^2(\Delta_d + 2b) + b^2}{(c_d^2 + \Delta_d\cos^2\vartheta)^2}.$$

В пределе нулевой намагниченности твердого тела формулы (6–8) дают известные результаты [6]:

$$c_t = c_t^A = c_{0t} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}};\quad c_l = c_{0l} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}. \qquad (9)$$

Соотношения (9) остаются справедливыми и в случае ортогональной ориентации магнитного поля к волновому вектору ($\vartheta = \pi/2$) при произвольной намагниченности. При $\vartheta = 0$ скорости распространения поперечной и квазипоперечной волн, описываемые соотношениями (6), (8), совпадают.

Отметим, что при $\vartheta = 0$ из последних двух уравнений системы (5) следует, что упругая волна, скорость которой определяется формулой (7), является чисто продольной, а упругая волна, скорость которой определяется формулой (8), – чисто поперечной. Индекс "A" в обозначении скорости поперечной волны (6), использован потому, что данная волна является точным аналогом альфвеновской волны в магнитной гидродинамике [8] и феррогидродинамике [1–3]. Действительно, в пределе $\mu \longrightarrow 0$, который отвечает намагничивающейся жидкости из выражения (6) непосредственно следует $c_t^A \propto m_0\cos\vartheta$, что совпадает с выражением для скорости распространения альфвеновской волны в магнитной жидкости с вмороженной намагниченностью [1–3]. В дальнейшем изложении эту волну будем называть модифицированной поперечной волной.

Экспериментальные исследования влияния магнитного поля на скорость распространения ультразвуковых волн обычно проводятся с использованием методик, основанных на измерении относительного изменения скорости ультразвука. Поэтому преобразуем выражения (6–8) к виду

$$\frac{\Delta c_l}{c_{0l}} = \frac{c_l - c_{0l}}{c_{0l}} = \frac{1}{2c_{0l}^2}(\Delta_s\cos^2\vartheta - c_d^2 +$$

$$+(c_d^2 + \Delta_d\cos^2\vartheta)\sqrt{1 - A\sin 2\vartheta}); \qquad (10)$$

$$\frac{\Delta c_t}{c_{0t}} = \frac{c_t - c_{0t}}{c_{0t}} = \frac{1}{2c_{0t}^2}(c_d^2 + \Delta_s\cos^2\vartheta -$$

$$-(c_d^2 + \Delta_d\cos^2\vartheta)\sqrt{1 - A\sin 2\vartheta}); \qquad (11)$$

$$\frac{\Delta c_t^A}{c_{0t}} = \frac{c_t^A - c_{0t}}{c_{0t}} = \frac{\Delta_t}{2}\cos^2\vartheta \qquad (12)$$

и рассмотрим характер полученных зависимостей.

Для оценочных расчетов используем следующие значения параметров: $\rho_0 = 8.8$ г/см^3, $c_{0l} = 5.5 \times 10^5$ см/с, $c_{0t} = 3 \times 10^5$ см/с, $K = 0$, $m_s = 55$ Гс. Эти значения физических величин соответствуют никелю [9]. Зависимость удельной намагниченнос-

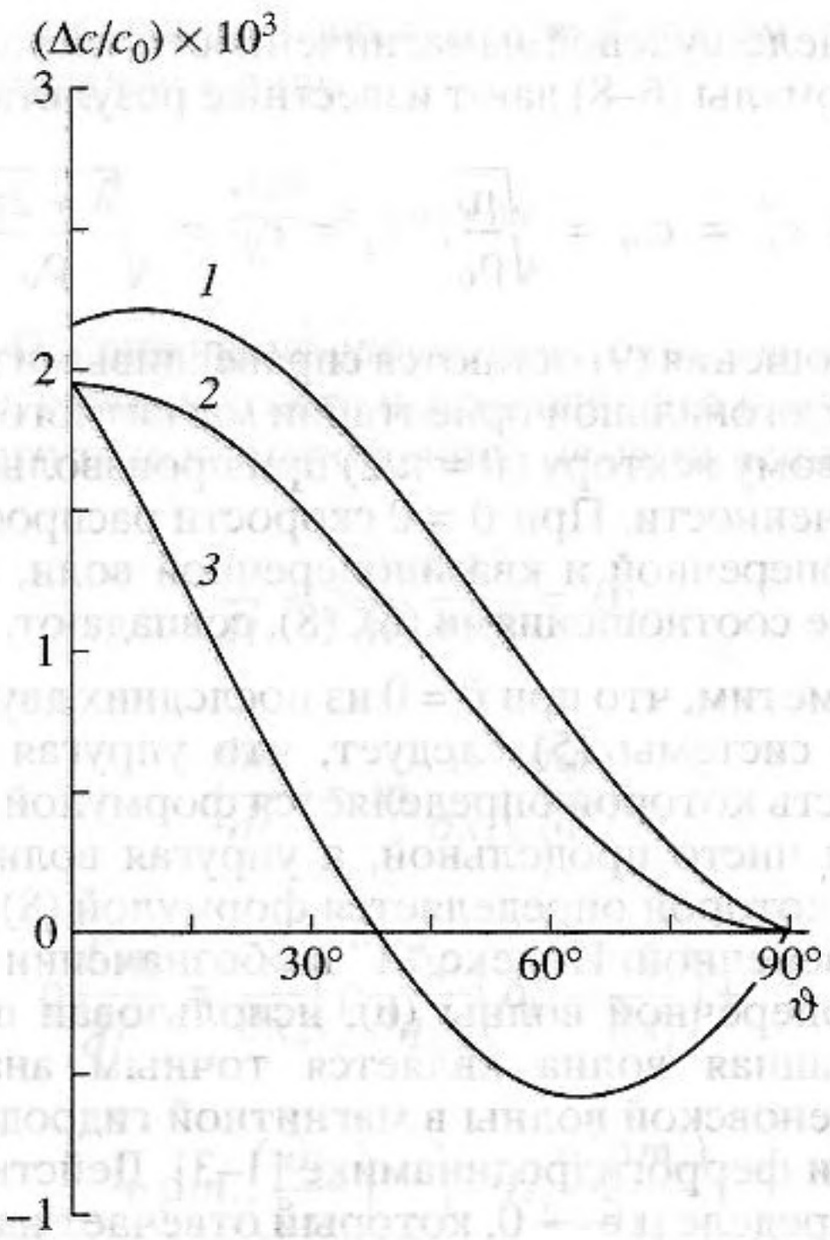

Рис. 1. Зависимость величины относительного изменения скоростей упругих волн от направления их распространения в условиях магнитного насыщения.
1 – квазипродольная волна; *2* – модифицированная поперечная волна; *3* – квазипоперечная волна.

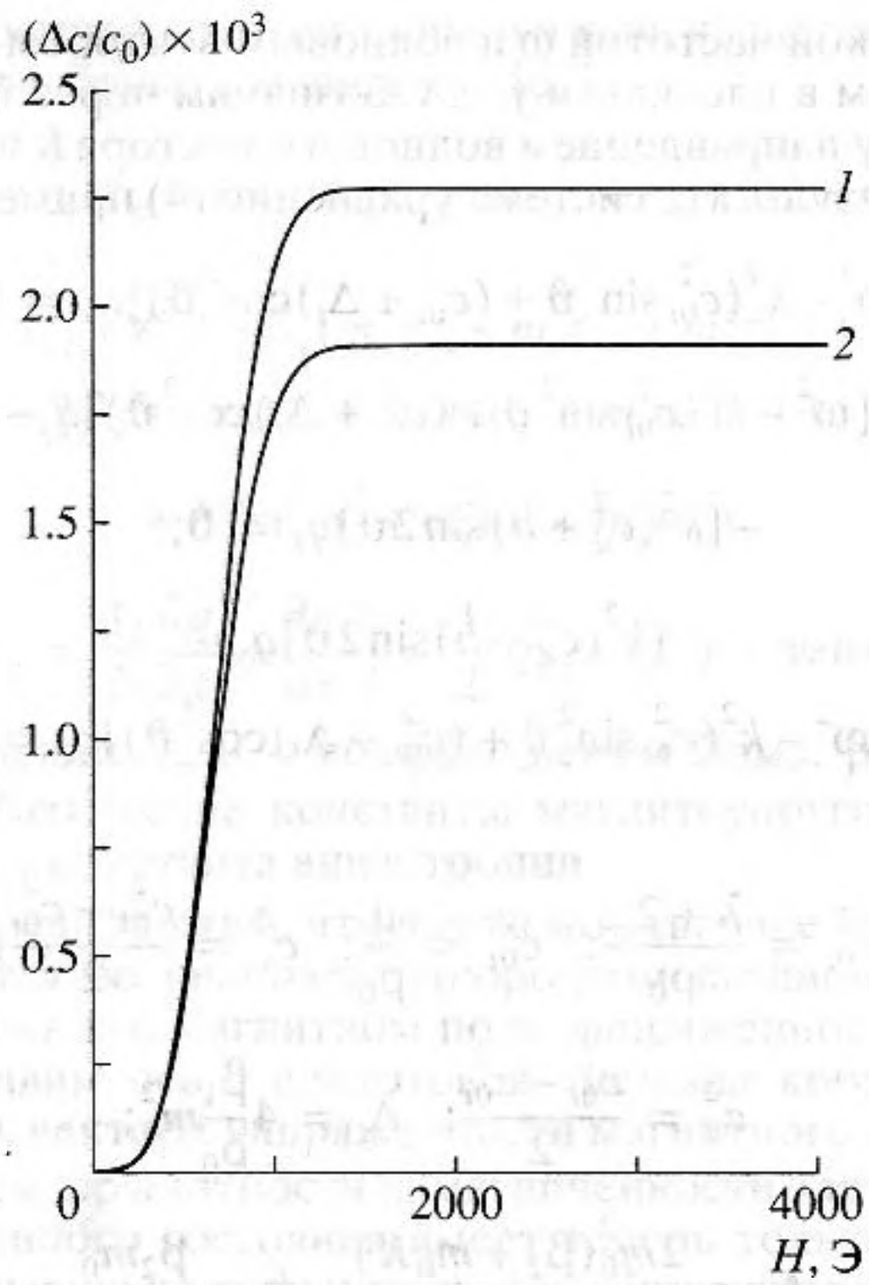

Рис. 2. Зависимость величины относительного изменения скоростей упругих волн от напряженности магнитного поля при $\vartheta = 0$.
1 – квазипродольная волна; *2* – квазипоперечная волна.

ти от внешнего поля аппроксимируем простым соотношением:

$$m_0 = m_s \mathrm{th}\left(\frac{H}{H_*}\right).$$

Экспериментальные данные для никеля удовлетворительно описываются при $H_* = 700$ Э.

Пусть твердое тело является изотропным и в магнитном отношении, поэтому положим $\beta_1 = 2\beta_2 = 10^6$ г^2/см^6 и $K = 0$.

На рис. 1 показаны угловые зависимости относительного изменения скорости продольных волн (кривая *1*), рассчитанная по формуле (10), и поперечных волн (кривые *2*, *3*), рассчитанные по формулам (12), (11), соответственно. Представленные зависимости соответствуют случаю магнитного насыщения ($m_0 = m_s$). Отметим, что угловые зависимости поперечной и модифицированной поперечной волны существенно различны, что может быть использовано при экспериментальной проверке предлагаемой теории.

Влияние намагничивающего поля на относительное изменение скорости распространения упругих волн проиллюстрировано на рис. 2, 3. Кривые на рис. 2 описывают случай параллельной ориентации волновых векторов и напряженности намагничивающего поля, т.е. $\vartheta = 0°$, а кривые на рис. 3 соответствуют случаю $\vartheta = 30°$. На обоих рисунках кривые с номером *1* относятся к квазипродольной волне, кривые с номером *2* – квазипоперечной волне и кривые с номером *3* – модифицированной поперечной волне. Заметим, что в случае параллельной ориентации волновых векторов и напряженности намагничивающего поля относительное изменение скорости распространения поперечной и модифицированной поперечной волн полностью одинаково, поэтому кривые *2*, *3* на рис. 2 совпадают.

Сравнение представленных результатов с известными экспериментальными данными, обзор которых содержится в монографиях [9, 10] позволяет утверждать об их полном качественном согласии. Обратим внимание на то, что вплоть до настоящего времени не было дано объяснения факта, что в поликристаллическом никеле внешнее магнитное поле вызывает увеличение относительного изменения скорости поперечных волн в 2–3 раза большее, чем относительное изменение скорости продольных волн, причем насыщение для сдвиговых волн наступает при больших значениях напряженности магнитного поля [11].

Как видно из рис. 4, эти результаты полностью описываются предлагаемой теорией. Кривые *1*, *2*

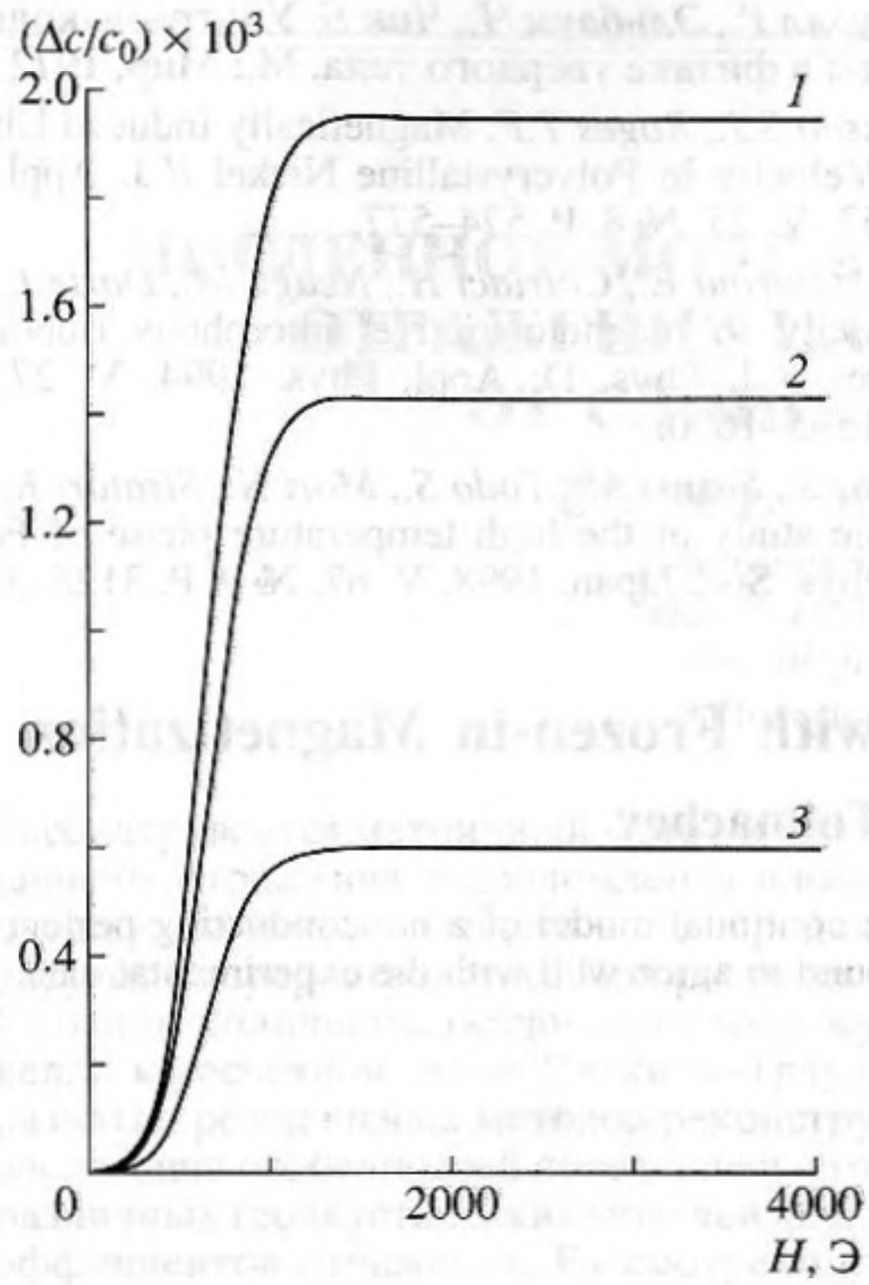

Рис. 3. Зависимость величины относительного изменения скоростей упругих волн от напряженности магнитного поля при $\vartheta = 30°$.

1 – квазипродольная волна; *2* – квазипоперечная волна; *3* – модифицированная поперечная волна.

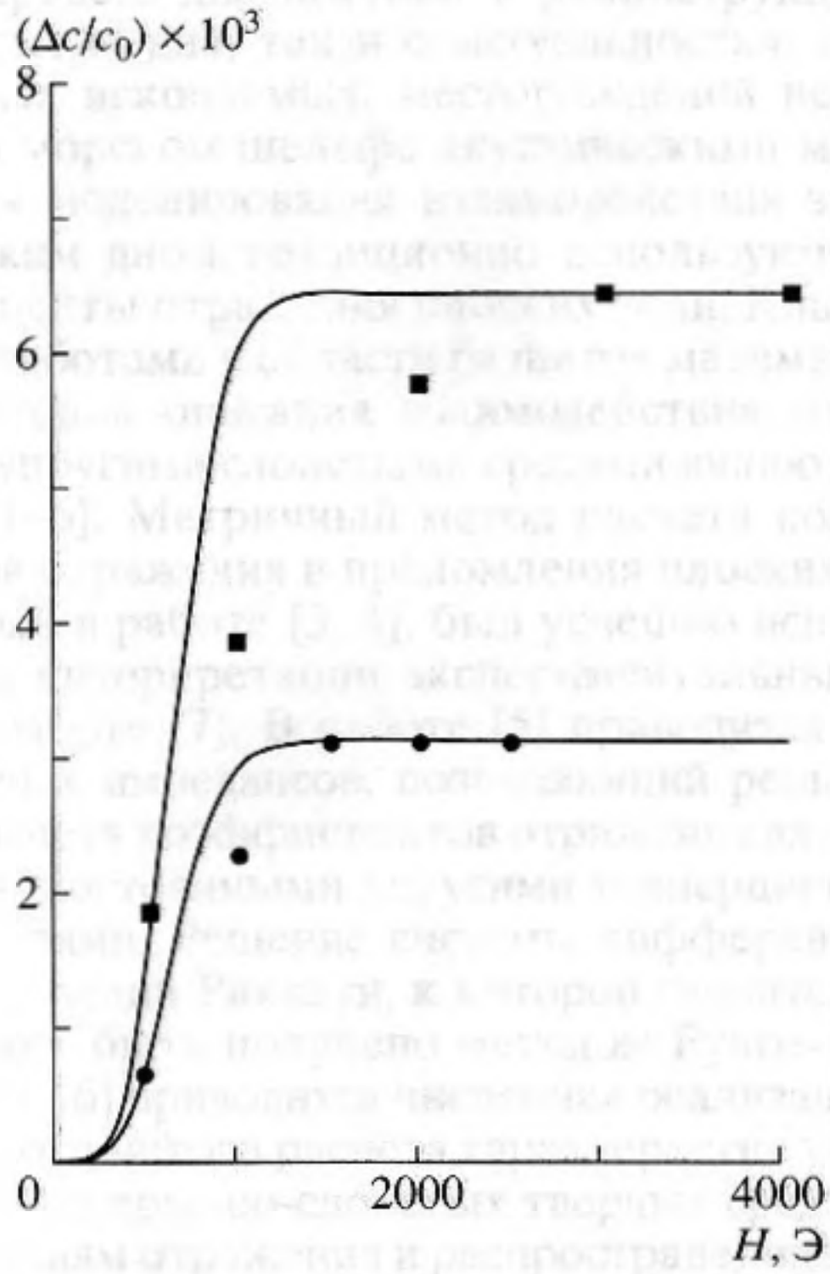

Рис. 4. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными [10]: относительное изменение скорости распространения продольной (●) и поперечной волн (■).

рассчитаны по формулам (11), (10), соответственно. При этом значения адиабатических констант магнитоупругой связи выбирались равными $\beta_1 = 1.45 \times 10^6$ г^2/см^6, $\beta_2 = 1.65 \times 10^6$ г^2/см^6.

Укажем также на качественное совпадение теоретических результатов с экспериментальными данными работы [12], посвященной измерению скорости распространения продольных ультразвуковых волн в аморфных намагничивающихся лентах, однако точного количественного сравнения провести не удается из-за отсутствия в [12] основных физических параметров образцов, таких как плотность, намагниченность, модули упругости.

В работе [13] экспериментально установлено, что скорость продольных волн в магнетите в широком диапазоне температур при параллельной ориентации волнового вектора и напряженности магнитного поля больше, чем при ортогональной ориентации указанных векторов, что согласуется с нашими результатами.

В заключение сформулируем основные результаты настоящей работы.

Показано, что в непроводящем твердом теле с вмороженной намагниченностью распространяются волны трех типов: модифицированная поперечная волна, квазипоперечная и квазипродольная волны.

При $\vartheta = 0$ квазипродольная волна вырождается в чисто продольную, модифицированная поперечная волна и квазипоперечная волна сливаются в одну чисто поперечную волну.

Получено количественное согласие теоретических и экспериментальных результатов по зависимости скорости продольных и поперечных волн в поликристаллическом никеле от величины намагничивающего поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соколов В.В., Толмачев В.В.* Применение обобщенного принципа виртуальных работ в феррогидродинамике. 2. Магнитная жидкость с вмороженной намагниченностью // Магнит. гидродинамика. 1996. Т. 32. № 3. С. 318–322.
2. *Соколов В.В., Толмачев В.В.* Анизотропия скорости распространения звука в магнитной жидкости // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 1. С. 106–109.
3. *Соколов В.В., Толмачев В.В.* Распространение сдвиговых волн в магнитной жидкости с вмороженной намагниченностью // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 24. С. 88–91.
4. *Соколов В.В., Толмачев В.В.* Уравнения магнитоупругости идеальной твердой сплошной среды с вмороженной намагниченностью // Тез. докл. II Междунар. зимней школы по механике сплошных сред, кн. 2. Пермь: ИМС УрО РАН, 1997. С. 266.

5. *Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С.* Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: МГУ, 1988. 232 с.
6. *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела. М.: Мир, 1975. 453 с.
7. *Голдин Б.А., Котов Л.Н., Зарембо Л.К., Карпачев С.Н.* Спин-фононные взаимодействия в кристаллах (ферритах). Л.: Наука, 1991. 148 с.
8. *Альфвен Х.* Космическая электродинамика. М.: ИЛ, 1952. 290 с.
9. *Бергман Л.* Ультразвук и его применение в науке и технике. М.: ИЛ, 1957. 726 с.
10. *Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972. 307 с.
11. *Jonson S.J., Roges T.F.* Magnetically Induced Ultrasonic Velocity in Polycrystalline Nickel // J. Appl. Phys. 1952. V. 23. № 8. P. 574–577.
12. *Hristoforout E., Chiriact H., Neagu M., Darie I.* Sound velocity in magnetostrictive amorphous ribbons and wires // J. Phys. D: Appl. Phys. 1994. V. 27. № 8. P. 1595–1600.
13. *Isida S., Suzuki M., Todo S., Mori N., Siratori K.* Ultrasonic study of the high temperature phase of Fe_3O_4 // J. Phys. Soc. Japan. 1998. V. 67. № 9. P. 3125–3129.

Ultrasonic Wave Propagation in a Solid with Frozen-in Magnetization

V. V. Sokolov and V. V. Tolmachev

Ultrasonic wave propagation is studied in the framework of the continual model of a nonconducting perfect solid with frozen-in magnetization. The theoretical results are found to agree well with the experimental data.