АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2000, том 46, № 4, с. 566–568

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534

ФРАКТАЛЬНАЯ СТРУКТУРА АКУСТИЧЕСКОГО СИГНАЛА, ВОЗБУЖДАЕМОГО В ЖИДКОСТИ НЕСТАБИЛЬНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ ЛАЗЕРА

© 2000 г. М. Л. Лямшев

Институт общей физики РАН
117942 Москва, ул. Вавилова, 38
E-mail: lyamshev@kapella.gpi.ru

Поступила в редакцию 20.02.2000 г.

Теоретическое рассмотрение лазерного возбуждения звука в конденсированной среде, например, в жидкости, обычно проводится в предположении, что поперечное распределение интенсивности в лазерном пучке является вполне конкретным. Часто предполагается, что оно аксиально-симметричное и имеет гауссову форму [1, 2]. В реальных случаях нередко поперечное распределение интенсивности в лазерном пучке флуктуирует.

Недавно было показано [2], что модовая структура излучения лазера с неустойчивым резонатором является фрактальной. Установлено в частности, что фрактальная размерность распределения интенсивности излучения лазера с апертурой в виде узкой щели имеет величину $D = 1.6$. Для круговой апертуры фрактальная размерность оказалась равной $D = 1.3$.

Ниже рассматривается термооптическое возбуждение звука в жидкости гармонически модулированным по интенсивности лазерным излучением с фрактальным пространственным спектром флуктуаций интенсивности. Заметим, что влияние пространственных и временных флуктуаций интенсивности лазерного излучения на возбуждение звука в жидкости рассматривалось ранее в [1], однако характер их распределения не конкретизировался.

Предположим, что лазерный луч, распространяющийся из верхнего полупространства (атмосферы) в положительном направлении оси z прямоугольной системы координат (x, y, z), падает на свободную поверхность жидкости, занимающую нижнее полупространство $z > 0$. В результате поглощения лазерного излучения в жидкости образуются тепловые источники звука. Уравнение лазерной термооптической генерации звука имеет вид

$$(\Delta + k^2)p\mu = i\frac{km\omega}{C_p}A\mu I(x, y)\exp(-\mu z). \qquad (1)$$

Здесь p – звуковое давление; k, C_p и μ – коэффициент объемного теплового расширения, удельная теплоемкость и коэффициент поглощения оптического излучения в жидкости соответственно; A – коэффициент прохождения света через границу жидкости (в дальнейшем предполагается, что $A = 1$); m – индекс модуляции; $I(x, y)$ – распределение интенсивности в лазерном пучке на поверхности жидкости; $k = \omega/c$, c – скорость звука в жидкости. Временной фактор $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опускаем.

Решение уравнения (1) можно написать сразу в виде [2]

$$p(r) = i\frac{k\omega m}{C_p}\mu\int_\Omega I(x', y')\exp(-\mu z')\times \\ \times\tilde{p}(x', y', z'/x, y, z)dx'dy'dz', \qquad (2)$$

где $\tilde{p}(r'/r)$ – решение краевой задачи о дифракции поля точечного источника, расположенного в точке r, где необходимо определить поле $p(r)$. Будем рассматривать поле $p(r)$ в зоне Фраунгофера. В этом случае $\tilde{p}(r'/r)$ можно представить в виде

$$\tilde{p}(r'/r) = \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}\{\exp[-i(\alpha x' + \beta y' - \gamma z')] - \\ - \exp[-i(\alpha x' + \beta y' + \gamma z')]\}, \qquad (3)$$

где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Будем считать распределение интенсивности в пучке случайной функцией, так что $I(x, y) = I_0 f(x, y)$, где $\langle f(x, y)\rangle = 0$, а случайные процессы – статистически однородными.

С учетом этого, подставляя выражение (3) в (2) и интегрируя его по z, можно написать для

среднего квадрата звукового давления $\langle|p(r)|^2\rangle$ следующее выражение:

$$\langle|p(r)|^2\rangle = \frac{k^2\omega^2 m^2}{C_p^2}\frac{1}{4\pi^2 r^2}\frac{\mu^2\gamma^2}{(\mu^2+\gamma^2)^2}I_0^2\sigma\times$$
$$\times\iint\limits_{\xi\,\eta} B(\xi,\eta)\exp[-i(\alpha\xi+\beta\eta)]d\xi d\eta, \quad (4)$$

где $B(\xi, \eta) = \langle f(x', y')f(x'', y'')\rangle$ – нормированная функция корреляции флуктуаций интенсивности лазерного излучения, $\xi = |x' - x''|$, $\eta = |y' - y''|$ и σ – площадь лазерного пятна на поверхности жидкости. Интегрирование по ξ и η распространяется на область действия лазерного излучения на поверхности жидкости. Однако, если $B(\xi, \eta)$ быстро убывает на размерах сечения лазерного пучка и $B(\infty) = 0$, интегрирование может быть распространено на интервал от $-\infty$ до $+\infty$.

Свойства статистических фракталов часто характеризуют структурными (корреляционными) функциями и их спектрами. Их особенность состоит в том, что они описываются степенными законами. Это вытекает из масштабной инвариантности фрактальных структур [4].

Для волновых задач важной характеристикой статистических фракталов является степенной спектр флуктуаций, который имеет вид

$$G(q) \sim q^{\delta}, \quad (5)$$

где q – волновое число пространственных флуктуаций, а показатель δ для объектов с фрактальной поверхностью определяется выражением

$$\delta = D - 2d, \quad (6)$$

где D – фрактальная размерность, а d – размерность пространства вложения.

Рассмотрим пространственный спектр лазерного излучения, когда апертура имеет вид узкой щели в направлении x. В этом случае можно написать

$$B(\xi,\eta) = B_1(\xi)B_2(\eta), \quad (7)$$

где $B_2(\eta) \approx 1$, т.к. в поперечном направлении распределение флуктуаций интенсивности лазерного излучения можно считать полностью коррелированным. Нормированную функцию корреляции в продольном направлении представим в виде [5]

$$B(\xi) = \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{\nu}K_{\nu}\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right), \quad (8)$$

где $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция, $K_\nu(\xi/\xi_0)$ – функция Макдональда, ξ_0 – радиус корреляции флуктуаций интенсивности лазерного излучения в продольном направлении. Отметим, что $B(0) = 1$ и $B(\infty) = 0$, а $B(\xi)_{\xi<\xi_0} \sim (\xi/\xi_0)^{\nu}$, т.е. корреляционная функция имеет степенной вид, и с этой точки зрения может быть использована для описания фрактальной структуры флуктуаций интенсивности нестабильного лазерного излучения.

Подставляя выражения (7) и (8) в (4), после интегрирования получаем

$$\langle|p(r)|^2\rangle = \frac{k^2\omega^2 m^2}{C_p^2}\frac{1}{4\pi^2 r^2}\frac{\mu^2\gamma^2}{(\mu^2+\gamma^2)^2}I_0\sigma\eta_0 G(\alpha), \quad (9)$$

где η_0 – поперечный размер лазерного пятна на поверхности жидкости, $G(\alpha)$ – спектральная плотность флуктуаций интенсивности лазерного излучения

$$G(\alpha) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\frac{\xi_0}{(1+\alpha^2\xi_0^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}. \quad (10)$$

При $\alpha\xi_0 > 1$ спектральная плотность $G(\alpha)$ имеет степенной (фрактальный) вид

$$G(\alpha)_{\alpha\xi_0>1} \sim \alpha^{-(2\nu+1)}. \quad (11)$$

Теперь рассмотрим случай круговой апертуры. Выражение для среднего квадрата флуктуаций звукового давления (4) можно представить в виде

$$\langle|p(r)|^2\rangle = \frac{k^2\omega^2 m^2}{C_p^2}\frac{1}{4\pi^2 r^2}\frac{\mu^2\gamma^2}{(\mu^2+\gamma^2)^2}I_0\pi a^2 G(k_\perp), \quad (12)$$

где

$$G(k_\perp) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B(\rho)\exp(-ik_\perp\rho)d\rho, \quad (13)$$

$k_\perp$ – компонента волнового вектора k в горизонтальной плоскости, $k_\perp^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\bar{\rho} = |\rho' - \rho''|$, a – радиус лазерного пучка на поверхности жидкости.

Корреляционную функцию $B(\rho)$ напишем в виде (8), заменив ξ на ρ и ξ_0 на ρ_0, где ρ_0 – радиус корреляции флуктуаций лазерного излучения.

Для спектральной плотности (13) имеем

$$G(k_\perp) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\frac{\rho_0^2}{(1+k_\perp^2\rho_0^2)^{\nu+1}}. \quad (14)$$

При $k_\perp\rho_0 > 1$ получаем

$$G(k_\perp) \sim k_\perp^{-2(\nu+1)}. \quad (15)$$

Для расчета акустического поля в жидкости необходимо в каждом из рассмотренных случаев определить конкретное значение параметра ν. Величина размерности пространства вложения для условий численного эксперимента [5] равна $d = 2$. Из выражений (5), (6), (11) и (15) имеем: $\nu = 0.7$ для

апертуры в виде щели и $\nu = 0.35$ для круговой апертуры, если воспользоваться соответственно фрактальными размерностями $D = 1.6$ и $D = 1.3$, полученными в численном эксперименте [5].

Из анализа выражений (9)–(11) и (12)–(15) можно видеть, что акустическое поле в жидкости, возбуждаемое излучением лазера с неустойчивым резонатором, имеет фрактальную структуру. В самом деле, для среднего квадрата звукового давления в точке наблюдения $x0z$ при условии $\mu \ll k$ и $k\xi_0 \sin\theta > 1$, и $kl \gg 1$ или $k\rho_0 \sin\theta > 1$ и $ka \gg 1$, где l – длина щелевой апертуры и a – радиус лазерного пятна на поверхности жидкости, имеем

$$\overline{|p(r)|^2} \sim Cq^{\delta} \sim k^{\delta}, \qquad (16)$$

где C – константа, определяемая параметрами задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 99-02-16334.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бункин Ф.В.* Избранные труды. М.: Наука–Физматлит, 1999.
2. *Лямшев Л.М.* Лазерное термооптическое возбуждение звука. М.: Наука. 1989.
3. *Karman G.P., Woerdman J.P.* Fractal structure of eigenmodes of unstable-cavity lasers // Optics Lett., 1998. V. 23. № 24. P. 1909–1911.
4. *Schroeder M.* Fractals, Chaos, Power Laws. N.Y. Freeman & Co. 1990.
5. *Татарский В.И.* Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере. М.: Изд-во АН СССР. 1959.