АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2001, том 47, № 1, с. 110–118

УДК 534

СПЕКТР АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ КАВИТАЦИИ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

© 2001 г. А. О. Максимов

Институт проблем морских технологий ДВО РАН
690600 Владивосток, ул. Суханова, 5а
e-mail: pacific@online.marine.su

Поступила в редакцию 27.01.2000 г.

Представлены результаты анализа нелинейной динамики пузырьков в жидкости под действием резонансного и шумового акустических полей. Влияние флуктуаций, связанных со случайной составляющей поля, оказывается наиболее существенным в окрестности бифуркационных значений амплитуды поля и расстройки, отвечающих изменению числа устойчивых колебательных состояний пузырька. Определяется спектр излучения одиночного пузырька в окрестности основного резонанса. В рамках предложенной модели проводится сопоставление с реальной формой спектра акустического излучения при кавитации.

Спектр излучения, сопровождающий акустическую кавитацию в жидкости, имеет вид отдельных линий, располагающихся на шумовом основании. Положение линий соответствует гармоникам, суб- и ультрасубгармоникам частоты возбуждения. В качестве примера на рис. 1 приведен спектр акустической мощности, излучаемой кавитационной областью в жидкости при возбуждении ее пьезокерамическим (цилиндрическим) излучателем на частоте основного резонанса 10 кГц [1]. Наличие в спектре отдельных линий связано с существенно нелинейной динамикой одиночных газовых пузырьков в поле мощной акустической волны, претерпевающих последовательность бифуркаций удвоения периода и даже переход к динамическому хаосу [2–4]. Устоявшейся точкой зрения на природу шумового основания является генерация коротких импульсов, сопровождающая коллапс одиночных включений [5–9].

Отдельные спектральные линии кавитационного излучения имеют конечную ширину и даже определенную форму. Вопрос о природе этих измеряемых характеристик не получил до настоящего времени своего объяснения. Реальный спектр акустического давления (приведенный на рис. 1), под действием которого пульсируют одиночные пузырьки в пелене, существенно отличается от используемого при теоретических расчетах и сводящегося, как правило, к учету одной основной гармоники. Шагом в обобщении традиционной модели является учет шума, т.е. анализ нелинейной динамики пузырька в поле мощного гармонического сигнала при наличии существенно меньшей случайной составляющей [10].

В этом случае в уравнении Рэлея–Плессета, описывающего радиальные пульсации пузырька,

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{P_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}\right] + 2\delta R_0\dot{R} = -\frac{P - P_0}{\rho_0}, \quad (1)$$

изменяется только выражение для внешней силы P. Здесь P_0, ρ_0, R_0, P, R – равновесные и текущие значения давления и плотности жидкости, радиусов пузырьков, γ – показатель политропы; δ – постоянная затухания, учитывающая диссипативные процессы вязкости и теплопроводности, а также радиационное затухание.

Наличие шумовой составляющей учитывается дополнительным слагаемым в выражении для внешнего поля, действующего на пузырек $P(t) = P_0 + p_m\sin(\omega_p t) + p_N(t)$ ($p_N(t)$ – случайная составляющая). Для того чтобы задача стала замкнутой, следует описать характеристики случайной силы. Мы воспользуемся простейшей моделью силы, полагая ее дельта-коррелированным случайным процессом $\langle p_N(t)p_N(t+\tau)\rangle = 2\pi S\delta(\tau)$, где S спектральная мощность шума. Сравнение с реальным спектром кавитационного шума показывает, что в окрестности резонансов такая модель не является очень грубой.

Пузырьки с радиусами, большими 10^{-5} м, а именно такие мы и будем рассматривать, являются добротными колебательными системами, подавляющими спектр колебаний вне узкой полосы вблизи собственной частоты $\Omega_0 = (3\gamma P_0/\rho_0 R_0^2)^{1/2}$, т.е. играют роль полосовых фильтров, поэтому шум можно аппроксимировать выражением вида $p_N(t) = \Pi_N(t)\cos[\Omega_0 t + \varphi_N(t)]$ [11]. Перейдем от случайных амплитуд Π_N и фаз φ_N к выражениям

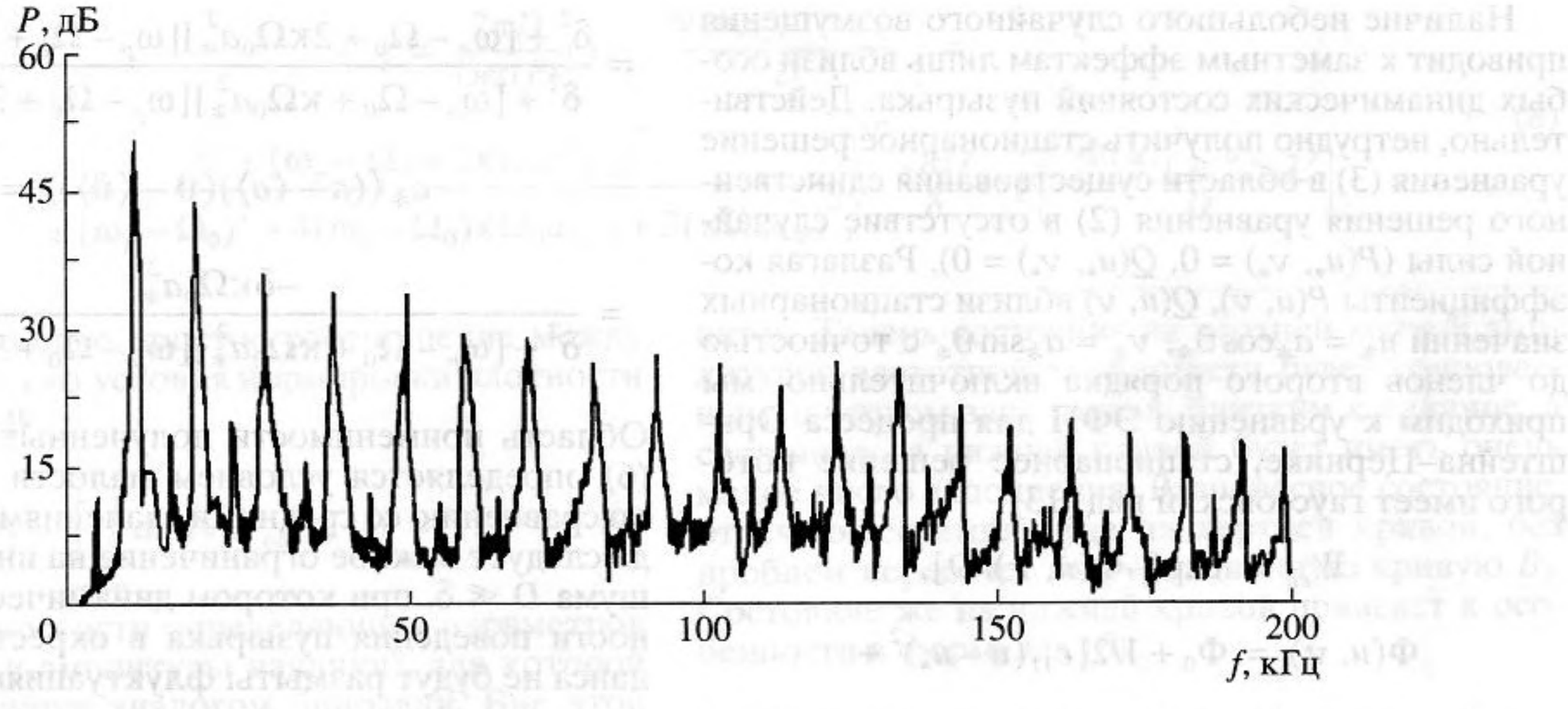

Рис. 1. Форма спектра акустической кавитации в воде. Частота возбуждения $f = 10$ кГц, амплитуда давления ультразвукового поля $p_m = 8 \times 10^4$ Па [1].

$\pi_N(t) = \Pi_N(t)\cos[\varphi_N(t)]$ и $\bar{\pi}_N(t) = -\Pi_N(t)\sin[\varphi_N(t)]$, имеющим более простые корреляционные функции $\langle \pi_N(t)\pi_N(t+\tau)\rangle = \langle \bar{\pi}_N(t)\bar{\pi}_N(t+\tau)\rangle = 2\pi S(\Omega_0)\delta(\tau)$ (здесь $S(\Omega_0)$ – спектральная мощность шума на резонансной частоте), $\langle \pi_N(t)\bar{\pi}_N(t+\tau)\rangle = \langle \bar{\pi}_N(t)\pi_N(t+\tau)\rangle = 0$. В этом случае выражение для шумовой составляющей, действующей на пузырек, имеет вид $p_N(t) = \cos(\Omega_0 t)\pi_N(t) + \sin(\Omega_0 t)\bar{\pi}_N(t)$.

Решение уравнения Рэлея–Плессета (1) методами асимптотического разложения по малому параметру $|R - R_0|/R_0 \ll 1$ [12] приводит к системе "укороченных" уравнений для медленно меняющихся амплитуд a и фаз ϑ.

$$(R - R_0)/R_0 = \frac{1}{2}(a\exp(-i\omega_p t + i\vartheta) + \text{к.с.}) + \varepsilon u_1(a, \vartheta, t) + \varepsilon^2 u_2(a, \vartheta, t) + \ldots,$$

где ε – безразмерный малый параметр, вводимый для описания порядка нелинейных членов, $u_1(a, \vartheta, t)$, $u_2(a, \vartheta, t)$ – члены разложения высших порядков; в явном виде указана зависимость только от "быстрого" времени, описывающего изменения на масштабе периода внешнего поля.

С точностью до членов третьего порядка включительно могут быть проанализированы окрестность основного резонанса, первой и второй гармоник, первой и второй субгармоник. В каждой из этих областей структура "укороченных" уравнений, вообще говоря, различна. В настоящей работе мы ограничимся описанием только линии основного резонанса ($\omega_p \sim \Omega_0$).

В этой области система укороченных уравнений описывает динамику пузырька на временном масштабе, превышающем период внешнего поля $2\pi/\omega_p$. Записанная в переменных $u(t) = a(t)\cos[\vartheta(t)]$, $v(t) = a(t)\sin[\vartheta(t)]$, с учетом случайной компоненты она имеет вид [10, 12]

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{p_m + \bar{\pi}_N(t)}{2\rho_0\omega_p R_0^2} - \delta u + \\ &+ (\omega_p - \Omega_0)v + \kappa\Omega_0 v(u^2 + v^2), \\ \frac{dv}{dt} &= -\delta v - (\omega_p - \Omega_0)u - \\ &- \kappa\Omega_0 u(u^2 + v^2) + \frac{\pi_N(t)}{2\rho_0\omega_p R_0^2}.\end{aligned} \tag{2}$$

Система (2) является примером стохастических дифференциальных уравнений. Описание эволюции системы (2) основывается на решении уравнения Эйнштейна–Фоккера–Планка (ЭФП) для плотности вероятности динамических состояний [11, 13]

$$W(u, v) = \langle \delta(u - u(t))\delta(v - v(t))\rangle,$$

где усреднение ведется по ансамблю случайной силы. Для рассматриваемого случая уравнение ЭФП имеет вид [14, 10, 13]

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u}(PW) + \frac{\partial}{\partial v}(QW) = D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right),$$

$$\begin{aligned}P(u, v) &= \frac{p_m}{2\rho_0\omega_p R_0^2} - \delta u + \\ &+ (\omega_p - \Omega_0)v + \kappa\Omega_0 v(u^2 + v^2),\end{aligned} \tag{3}$$

$$Q(u, v) = -\delta v - (\omega_p - \Omega_0)u - \kappa\Omega_0 u(u^2 + v^2),$$

$$D = \frac{\pi}{4}\Omega_0\frac{S(\Omega_0)\Omega_0}{(\rho_0 R_0^2\Omega_0^2)}.$$

Наличие небольшого случайного возмущения приводит к заметным эффектам лишь вблизи особых динамических состояний пузырька. Действительно, нетрудно получить стационарное решение уравнения (3) в области существования единственного решения уравнения (2) в отсутствие случайной силы ($P(u_\bullet, v_\bullet) = 0$, $Q(u_\bullet, v_\bullet) = 0$). Разлагая коэффициенты $P(u, v)$, $Q(u, v)$ вблизи стационарных значений $u_* = a_*\cos\vartheta_*$, $v_* = a_*\sin\vartheta_*$ с точностью до членов второго порядка включительно, мы приходим к уравнению ЭФП для процесса Орнштейна–Цернике, стационарное решение которого имеет гауссовский вид [13]

$$W_{eq} = \exp[-\Phi(u, v)/D],$$

$$\Phi(u, v) = \Phi_0 + 1/2[c_{11}(u-u_\bullet)^2 + 2c_{12}(u-u_\bullet)(v-v_\bullet) + c_{22}(v-v_\bullet)(v-v_\bullet)],$$

$$c_{11} = -\Lambda(b_{12}^2 + b_{22}^2 + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}),$$

$$c_{22} = \Lambda(b_{11}^2 + b_{21}^2 + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}),$$

$$c_{12} = \Lambda(b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22}), \qquad (4)$$

$$\Lambda = (b_{11} + b_{22})/[(b_{11} + b_{22})^2 + (b_{12} - b_{21})^2];$$

$$b_{11} = (\partial P(u, v)/\partial u)_{u=u_*, v=v_*},$$

$$b_{12} = (\partial P(u, v)/\partial v)_{u=u_*, v=v_*},$$

$$b_{21} = (\partial Q(u, v)/\partial u)_{u=u_*, v=v_*},$$

$$b_{22} = (\partial Q(u, v)/\partial v)_{u=u_*, v=v_*}.$$

Здесь $\Phi_0 = D\ln[2\pi D/(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{12})]$ – нормировочная постоянная, определяемая из условия $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\,dv W_{eq}(u, v) = 1$.

$$a_*^2[(\omega_p - \Omega_0 + \kappa\Omega_0 a_*^2)^2 + \delta^2] = \frac{p_m^2}{4\rho_0^2\omega_p^2 R_0^4}, \qquad (5)$$

$$\cos\vartheta_* = \frac{2\rho_0 R_0^2\omega_p^2(\delta/\Omega_0)}{p_m}a_*.$$

Используя найденный вид плотности вероятности W_{eq}, находим средние и среднеквадратичные значения динамических переменных

$$\langle u\rangle = u_\bullet, \quad \langle v\rangle = v_\bullet, \quad \langle a\rangle = a_\bullet, \quad \langle\vartheta\rangle = \vartheta_\bullet,$$

$$\langle(a - \langle a\rangle)^2\rangle =$$

$$= \frac{\delta^2 + [\omega_p - \Omega_0 + \kappa\Omega_0 a_*^2][\omega_p - \Omega_0 + 2\kappa\Omega_0 a_*^2]}{\delta^2 + [\omega_p - \Omega_0 + \kappa\Omega_0 a_*^2][\omega_p - \Omega_0 + 3\kappa\Omega_0 a_*^2]}\frac{D}{\delta};$$

$$a_*^2\langle(\vartheta - \langle\vartheta\rangle)^2\rangle = \qquad (6)$$

$$= \frac{\delta^2 + [\omega_p - \Omega_0 + 2\kappa\Omega_0 a_*^2][\omega_p - \Omega_0 + 3\kappa\Omega_0 a_*^2]}{\delta^2 + [\omega_p - \Omega_0 + \kappa\Omega_0 a_*^2][\omega_p - \Omega_0 + 3\kappa\Omega_0 a_*^2]}\frac{D}{\delta};$$

$$a_*\langle(a - \langle a\rangle)(\vartheta - \langle\vartheta\rangle)\rangle =$$

$$= \frac{-\delta\kappa\Omega_0 a_*^2}{\delta^2 + [\omega_p - \Omega_0 + \kappa\Omega_0 a_*^2][\omega_p - \Omega_0 + 3\kappa\Omega_0 a_*^2]}\frac{D}{\delta}.$$

Область применимости полученных выражений (6) определяется условием малости флуктуаций по сравнению со средними значениями [13]. Откуда следует важное ограничение на интенсивность шума $D \ll \delta$, при котором динамические особенности поведения пузырька в окрестности резонанса не будут размыты флуктуациями.

Кроме того, специального рассмотрения заслуживают окрестности бифуркационных кривых динамической системы (2), на которых обращается в нуль знаменатель соотношений (6). На рисунке 2а, 2б приведены амплитудно частотная характеристика колебаний пузырька в окрестности основного резонанса, описываемая выражением (5), и ход бифуркационных кривых B_1 и B_2 на плоскости определяющих параметров p_m/p_k, $(\omega_p - \Omega_0)/\omega_p$, где $p_k^2 = (32/3\sqrt{3}\,\kappa)\delta^3\rho_0^2 R_0^4\Omega_0$.

$$\frac{p_{mB}^2}{p_k^2} = \frac{1}{12\sqrt{3}\delta^3}\{-(\omega_p - \Omega_0)[(\omega_p - \Omega_0)^2 + 9\delta^2] \pm \pm[(\omega_p - \Omega_0)^2 - 3\delta^2]^{3/2}\}, \qquad (7)$$

$$(\omega_p - \Omega_0) \le -\sqrt{3}\delta.$$

Здесь знак плюс относится к кривой B_2, а знак минус – к кривой B_1.

В отсутствие шума особые точки динамической системы (2), отвечающие стационарным состояниям ($\dot u = 0$, $\dot v = 0$), описываются уравнением (5), при этом устойчивым состояниям соответствуют узлы, а неустойчивым – седловые точки на фазовой плоскости (u, v). Бистабильность – существование двух устойчивых стационарных состояний – является отличительной особенностью решения (5).

Прежде всего отметим, что в области бистабильности, ограниченной кривыми B_1, B_2 (см. рис. 2), но не слишком близко к этим кривым, поведение решений в окрестности каждого из двух стационарных состояний, отвечающих узловым точкам динамической системы (2), имеет вид (4). Однако из локального разложения плотности вероятности не могут быть определены числа заполнения этих состояний

$$N_{1,2} = \frac{2\pi D}{\mathrm{Det}(\hat{c})}\exp\left[-\frac{\Phi(u_{*1,2}, v_{*1,2})}{D}\right] =$$

$$= \left(\frac{\delta^2 + [\omega_p - \Omega_0 + 2\kappa\Omega_0 a_{*1,2}^2]^2}{\delta^2 + (\omega_p - \Omega_0)^2 + 4(\omega_p - \Omega_0)\kappa\Omega_0 a_{*1,2}^2 + 3(\kappa\Omega_0 a_*^2)^2}\right)^{1/2}\frac{2\pi D}{\delta}\exp\left[-\frac{\Phi(u_{*1,2}, v_{*1,2})}{D}\right]. \quad (8)$$

Тем не менее одно простое соотношение между N_1 и N_2 следует из условия нормировки плотности вероятности W_{eq}:

$$N_1 + N_2 \approx \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du dv W_{eq}(u, v) = 1. \quad (9)$$

Кривая на плоскости определяющих параметров (расстройки и амплитуды накачки), для которой $N_1 = N_2$, является аналогом бинодали. Вне этой кривой одно из состояний является истинно равновесным, а другое метастабильным. Для шума малой интенсивности $D \ll \delta$ числа заполнения метастабильных состояний экспоненциально малы всюду, за исключением окрестности бинодали. В низшем порядке по $D/\delta \ll 1$ положение бинодали не зависит от интенсивности шума. Действительно, в этом случае $W_{eq} \approx \exp(-\Phi^{(0)}(u, v)/D)$, где $\Phi^{(0)}$ определяется уравнением

$$\left(\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial v^2}\right) + P\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial u} + Q\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial v} = 0. \quad (10)$$

Поскольку в рассматриваемом случае поток вероятности стационарного решения не обращается в нуль [13] и коэффициенты P, Q не могут быть выражены с помощью введения потенциала $P = \partial H/\partial u$, $Q = \partial H/\partial v$, нахождение аналитического решения (10) затруднительно, и остается только путь численного интегрирования.

Проследим теперь ход решения при пересечении бифуркационных кривых. Будем исходить из области параметров левее кривой B_1 и увеличивать расстройку при постоянной амплитуде давления. Как следует из рис. 2б, мы будем при этом находиться на нижней ветви амплитудно-частотной характеристики. Никаких особенностей в решении (4) при этом не возникает. Данное состояние соответствует истинному равновесию. Для значений же амплитуды на верхней кривой рис. 2а знаменатель (6) обращается в нуль. Поведение этого метастабильного состояния может быть достаточно подробно проанализировано [12, 14], однако в данной работе мы ограничимся рассмотрением только установившихся решений.

При дальнейшем увеличении расстройки число заполнения равновесного состояния вплоть до окрестности бинодали можно считать равным единице. Время жизни метастабильного состояния при этом увеличивается, но число заполнения этого локального равновесного состояния будет мало. При прохождении бинодали ситуация изменится. Теперь состояние на верхней кривой амплитудно-частотной зависимости будет равновесным, с числом заполнения, близким к единице, а состояние на нижней кривой будет иметь очень малое число заполнения. Равновесное состояние, отвечающее амплитуде на верхней кривой, без проблем пересечет бифуркационную кривую B_2. Состояние же на нижней кривой приведет к особенности в формулах (6).

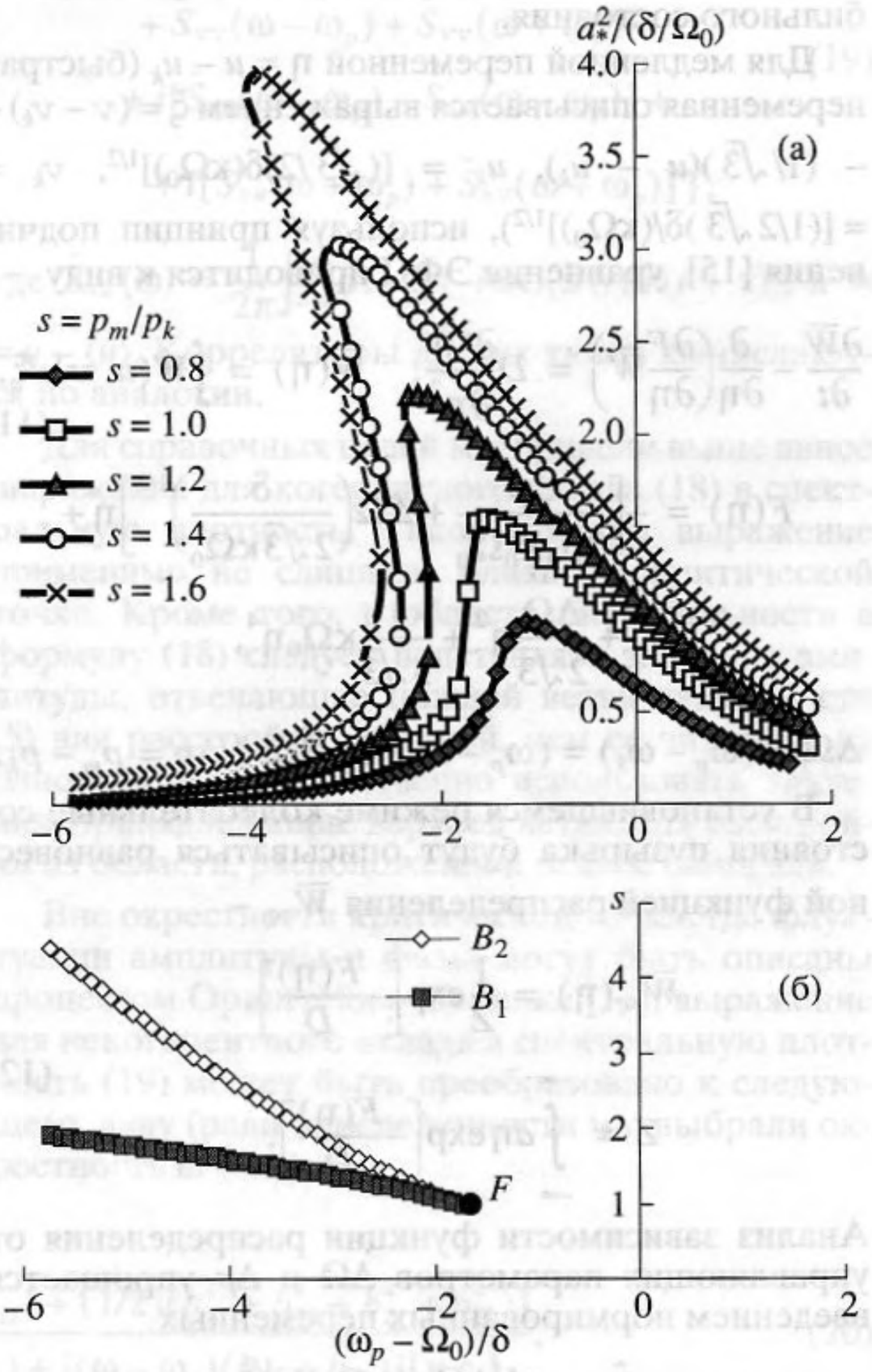

Рис. 2. Амплитудно частотная характеристика колебаний пузырька в периодическом поле (а) и ход бифуркационных кривых (б). Гистерезисные особенности, присущие нелинейному резонансу, проявляются в области бистабильности, ограниченной кривыми B_1, B_2. Точка F является критической, здесь происходит слияние всех особенностей (двух узлов и седла) динамической системы (2).

Приведенная картина допускает полное аналитическое описание в окрестности критической точки F, где происходит слияние всех особых точек (двух узлов и седла) динамический системы (2). При $|p_m - p_k| \ll p_k$, $|\omega_p - \omega_k| \ll \omega_k$ (в области определяющих параметров, ограниченных кривыми B_1, B_2) расстояние между этими особыми точками мало. В этой области динамика пузырька определяется двумя различными временными масштабами. Их существование связано со следующими обстоятельствами. В самой точке бифуркации обращается в нуль один из двух показателей Ляпунова, определяющих устойчивость узловой точки, отвечающей метастабильному состоянию. Две независимые переменные на фазовой плоскости (u, v), которые соответствуют этим характеристическим значениям как раз и описывают быстрые и медленные (для показателя, обращающегося в нуль) движения в окрестности метастабильного состояния.

Для медленной переменной $\eta = u - u_k$ (быстрая переменная описывается выражением $\xi = (v - v_k) - (1/\sqrt{3})(u - u_k)$, $u_k = [(\sqrt{3}/2)\delta(\kappa\Omega_0)]^{1/2}$, $v_k = [(1/2\sqrt{3})\delta/(\kappa\Omega_0)]^{1/2}$), используя принцип подчинения [15], уравнение ЭФП приводится к виду

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\overline{W}\right) = D\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \eta^2}, \quad \overline{W}(\eta) = \int W(u, v)d\xi, \tag{11}$$

$$F(\eta) = -\left[\frac{\Delta p}{2\rho_0 R_0^2 \Omega_0} + \Delta\Omega\left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}\kappa\Omega_0}\right)^{1/2}\right]\eta + \frac{\Delta\Omega}{2\sqrt{3}}\eta^2 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\kappa\Omega_0\eta^4,$$

$$\Delta\Omega = (\omega_p - \omega_k) = (\omega_p - \Omega_0) + \sqrt{3}\delta, \quad \Delta p = p_m - p_k.$$

В установившемся режиме колебательные состояния пузырька будут описываться равновесной функцией распределения $\overline{W}_{eq}$ –

$$\overline{W}_{eq}(\eta) = \frac{1}{Z}\exp\left[-\frac{F(\eta)}{D}\right], \tag{12}$$

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \exp\left[-\frac{F(\eta)}{D}\right].$$

Анализ зависимости функции распределения от управляющих параметров $\Delta\Omega$ и Δp упрощается введением нормированных переменных

$$\tilde{\eta} = \eta[|\Delta\Omega|/(\kappa\Omega_0)]^{-1/2},$$

$$\Delta_n = 2^{3/2}3^{3/4}\left(\frac{\delta}{|\Delta\Omega|}\right)^{3/2}\left[\frac{\Delta p}{p_k} + \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\Delta\Omega}{\delta}\right],$$

$$F(\eta) = F(\tilde{\eta}) = \frac{\Omega_0}{3\sqrt{3}\kappa}\left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}\right)^2\left[\tilde{\eta}^4 + \frac{3}{2}\tilde{\eta}^2 - \Delta_n\tilde{\eta}\right].$$

При этом область, ограниченная кривыми B_1, B_2, определяется простым неравенством $|\Delta_n| \le 1$: кривая B_1 описывается уравнением $\Delta_n = -1$, а $B_2 - \Delta_n = 1$.

Характер флюктуаций в значительной степени зависит от того, как близко к точке F расположены значения определяющих параметров. При $\Delta\Omega^2 \gg D\Omega_0$ функция распределения $\overline{W}_{eq}$ имеет два резких максимума для значений $|\Delta_n| \le 1$ (и один при $|\Delta_n| > 1$). В этом случае пузырек остается в течение долгого времени вблизи одного из стационарных состояний, флюктуируя вокруг него, и только изредка перескакивает в другое состояние.

Исходя из выражения (12), можно определить "заселенность" стационарных состояний – значения функции распределения $\overline{W}_{eq}$ в окрестности узловых точек:

$$\tilde{\eta}_1 = \cos[\arccos(\Delta_n/3)],$$

$$\tilde{\eta}_2 = \cos[\arccos(\Delta_n/3 + 2\pi/3)].$$

Уравнение $\Delta_n = 0$ определяет кривую, являющуюся аналогом бинодали: для соответствующих значений определяющих параметров пузырек с равной вероятностью находится в каждом из стационарных состояний. Вне этой кривой одно из состояний является истинно равновесным, а другое метастабильным.

В непосредственной близости к критической точке $\Delta\Omega^2 \ll D\Omega_0$ максимумы распределения становятся размазанными, что затрудняет вычисление в аналитическом виде средних характеристик системы. Динамические характеристики системы могут быть описаны в этом случае с помощью корреляционных функций $\langle\eta(t)\eta(0)\rangle$, которые, в свою очередь, выражаются через нестационарные решения уравнения ЭФП (11)

$$\overline{W}(\eta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n t) \times \exp(-F(\eta)/2D)\Psi_n(\eta), \tag{13}$$

где Ψ_n – собственная функция, а λ_n – собственное значение уравнения

$$D\frac{d^2\Psi_n}{d\eta^2} + \left[\frac{1}{2}\frac{d^2F}{d\eta^2} - \frac{1}{4D}\left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2\right]\Psi_n + \lambda_n\Psi_n = 0. \tag{14}$$

Асимптотическое поведение корреляционной функции определяется первым собственным значением (14):

$$\{\langle\eta(t)\eta(0)\rangle - \langle\eta^2(0)\rangle\} \sim \exp(-\lambda_1 t).$$

Результаты численного решения уравнения (14) содержатся в работах [16, 17]. В критической точке собственное значение $\lambda_1 = 1.75(\kappa\Omega_0 D)^{1/2}$. Коэф-

фициент диффузии зависит от спектральной плотности шума. Для $S(\Omega_0) \approx 10^4$ (Па^2/Гц) [5–7] получаем $D \approx 8.7\Omega_0(\Omega_0/1\text{Гц}) \times 10^{-8}$, при $\Omega_0 = 2\pi \times 5 \times \times 10^4$ Гц $\lambda_1 \approx 7.5 \times 10^3$ Гц.

Приведенные результаты позволяют описать спектральные характеристики излучения пульсирующего пузырька. Монопольная компонента излучения пузырька, находящегося в точке $\mathbf{r}'$, имеет следующий вид:

$$p_r(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \times [\ddot{R}(\tau)R(\tau)^2 + 2\dot{R}(\tau)^2 R(\tau)]_{\tau = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (15)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения. Спектр излучения в точке $\mathbf{r}$ определяется следующим образом

$$S(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp(-i\omega\tau)\langle (p_m(\mathbf{r})\sin(\omega_p t) + + p_N(\mathbf{r}, t) + p_r(\mathbf{r}, t))(p_m(\mathbf{r})\sin[\omega_p(t+\tau)] + + p_N(\mathbf{r}, t+\tau) + p_r(\mathbf{r}, t+\tau))\rangle. \quad (16)$$

Он формируется корреляциями четырех различных типов: автокорреляционной функцией внешнего поля, корреляторами между шумом и излучением пузырька, автокорреляционными функциями шума и излучения. Существенно, однако, что вклад слагаемых первых двух типов носит чисто когерентный характер (пропорционален $\delta(\omega + \omega_p)$, $\delta(\omega - \omega_p)$). Автокорреляционная функция шума не зависит от частоты и описывает постоянное основание спектра. Форма спектра излучения описывается только вкладом автокорреляционной функции излучения.

Подставив в (15) асимптотическое разложение для радиуса пузырька, и оставив в (16) только члены главного порядка, получим

$$S_r(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\rho_0^2 R_0^6 \omega_p^4}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp(-i\omega\tau) \times \times \langle a(t)[\cos(\vartheta(t))\cos(\omega_p t) - \sin(\vartheta(t))\sin(\omega_p t)] \times \times a(t+\tau)[\cos(\vartheta(t+\tau))\cos(\omega_p(t+\tau) - - \sin(\vartheta(t+\tau))\sin(\omega_p(t+\tau))]\rangle = \frac{R_0^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}(\rho_0^2 R_0^4 \omega_p^4)[\tilde{S}_c(\omega) + \tilde{S}_n(\omega)], \quad (17)$$

$$\tilde{S}_c(\omega) = \frac{1}{4}(\langle u\rangle^2 + \langle v\rangle^2)[\delta(\omega + \omega_p) + \delta(\omega - \omega_p)] = = \frac{a_*^2}{4}[\delta(\omega + \omega_p) + \delta(\omega - \omega_p)], \quad (18)$$

$$\tilde{S}_n(\omega) = \frac{1}{4}\{\tilde{S}_{uu}(\omega - \omega_p) + \tilde{S}_{uu}(\omega + \omega_p) + + \tilde{S}_{vv}(\omega - \omega_p) + \tilde{S}_{vv}(\omega + \omega_p) + + i[\tilde{S}_{vu}(\omega - \omega_p) - \tilde{S}_{uv}(\omega - \omega_p)] + + i[\tilde{S}_{vu}(\omega + \omega_p) + \tilde{S}_{uv}(\omega + \omega_p)]\}, \quad (19)$$

где $\tilde{S}_{uu}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp(-i\omega\tau)\langle \tilde{u}(t)\tilde{u}(t+\tau)\rangle$, $\tilde{u} = u - \langle u\rangle$. Корреляторы других типов вычисляются по аналогии.

Для справочных целей мы привели выше явное выражение для когерентного вклада (18) в спектральную плотность. Такое простое выражение применимо не слишком близко к критической точке. Кроме того, в области бистабильности в формулу (18) следует подставлять значения амплитуды, отвечающие нижней ветви зависимости (5) для расстройки меньшей, чем ее значение на бинодали, и соответственно использовать значения, принадлежащие верхней ветви, для расстройки из области, расположенной правее бинодали.

Вне окрестности критической точки, где флуктуации амплитуды и фазы могут быть описаны процессом Орнштейна–Цернике [13], выражение для некогерентного вклада в спектральную плотность (19) может быть преобразовано к следующему виду (ради определенности мы выбрали окрестность $\omega \sim \omega_p$):

$$\tilde{S}_n(\omega) = \frac{D}{2}\frac{[(\omega - \omega_p)^2 + (\omega - \omega_p)(b_{12} - b_{21}) + (1/2)(b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{21}^2 + b_{22}^2)]}{[(\omega - \omega_p)^2 - (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) + i(\omega - \omega_p)(b_{11} + b_{22})][\text{к.с.}]}, \quad (20)$$

где (см. определение (4)) $b_{11} = -\delta + 2\kappa\Omega_0 u_* v_*$, $b_{22} = -\delta - 2\kappa\Omega_0 u_* v_*$, $b_{12} = [(\omega_p - \Omega_0) + \kappa\Omega_0(u_*^2 + 3v_*^2)]$, $b_{21} = -[(\omega_p - \Omega_0) + \kappa\Omega_0(3u_*^2 + v_*^2)]$.

Формула (20) описывает основной результат настоящей работы – форму спектральной линии излучения пузырька в кавитационной области. В рассматриваемом существенно нелинейном режиме $\kappa\Omega_0 a_*^2 \geq \delta$ эта форма значительно отличается от

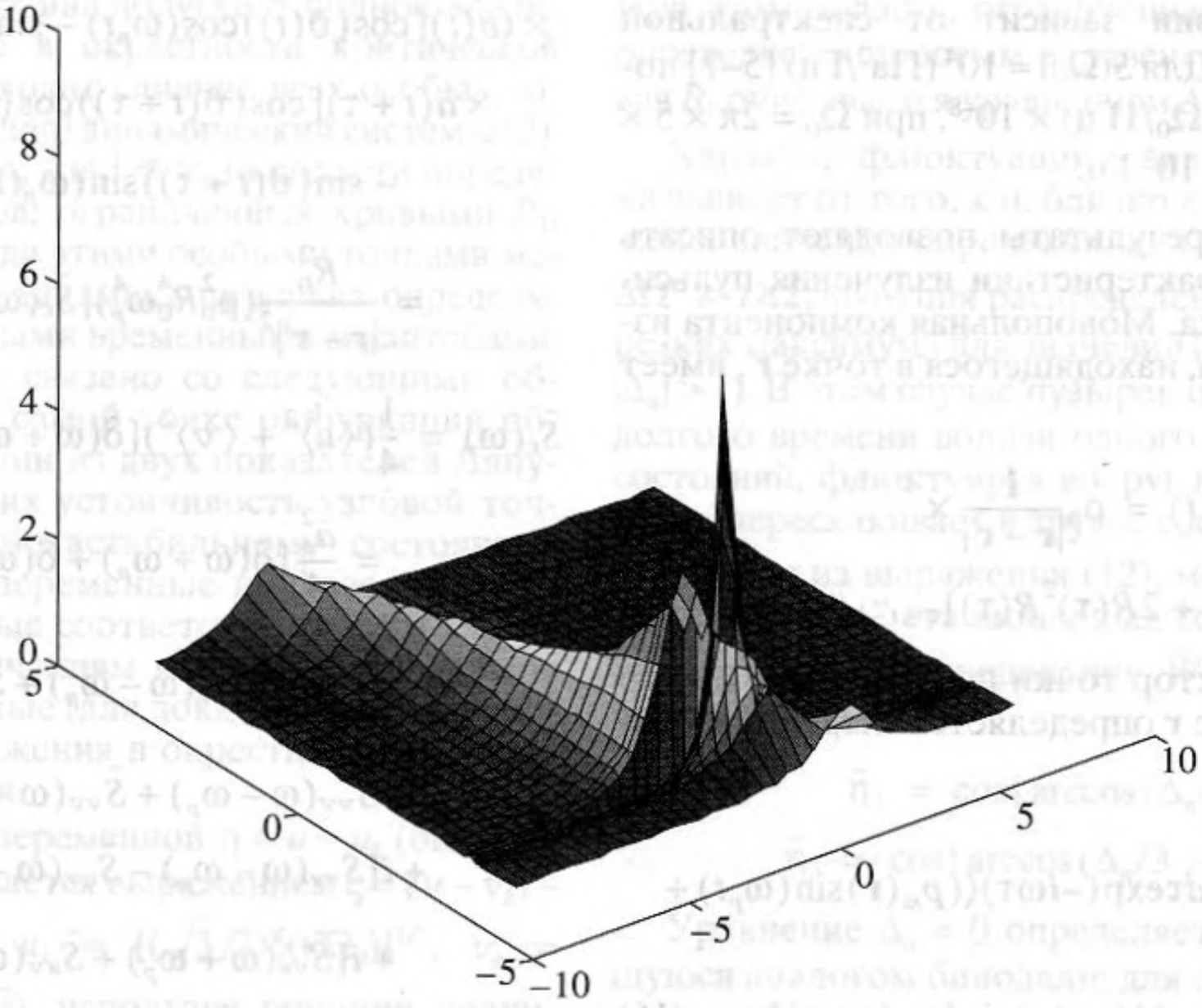

Рис. 3. Спектральная плотность излучения пузырька S_N как функция безразмерных расстройки $\eta = (\omega_p - \Omega_0)/\delta$ и $\Delta = (\omega - \omega_p)/\delta$ при $p_m = 1.4\, p_k$. Значения η отложены по оси y, а Δ – по оси x.

лоренцовского вида $\tilde{S}_n(\omega) \approx (D/2)[(\omega - 2\omega_p + \Omega_0)^2 + \delta^2]^{-1}$, к которому она, естественно, сводится при пренебрежении нелинейными членами.

В качестве иллюстрации на рис. 3 приведена зависимость нормированной спектральной плотности S_N ($\tilde{S}_n = (D/2\delta^2)S_N$) от безразмерных переменных $\Delta = (\omega - \omega_p)/\delta$ и $\eta = (\omega_p - \Omega_0)/\delta$ при значении амплитуды внешнего давления $p_m = 1.4p_k$. Существенным обстоятельством является тот факт, что величина и полуширина спектральной плотности излучения определяются устойчивостью нелинейного динамического состояния пузырька, поскольку $(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$ есть просто произведение соответствующих показателей Ляпунова системы (2) в отсутствие шума.

Резкое изменение спектральной плотности в окрестности расстройки η_b, отвечающей бинодали, связано с изменением амплитуды колебаний пузырька в связи с переходом с нижней ветви амплитудно-частотной характеристики не верхнюю. Для данного значения амплитуды внешнего поля точка перехода располагается достаточно близко к бифуркационной кривой B_2, на которой обращается в нуль показатель Ляпунова для состояний, отвечающих нижней ветви. Колебания, соответствующие этим состояниям, будут существенно менее устойчивы. Под действием внешнего шума они будут раскачиваться до значительно большей амплитуды, что и обуславливает наличие резкого пика в спектральной плотности.

Сдвиг максимума спектральной плотности в область низких частот при увеличении расстройки η связан с тем, что росту расстройки при фиксированной частоте внешнего поля отвечает вклад пузырьков больших равновесных радиусов и, соответственно, меньших собственных частот. Поскольку, как уже отмечалось выше, для внешнего шума пузырек представляет собой полосовой фильтр в окрестности собственной частоты (полоса определяется его добротностью), то понижение собственной частоты, естественно, приводит к соответствующему изменению положения максимума спектральной плотности.

Численное решение уравнения Рэлея для значительных амплитуд внешнего давления показало [4, 18, 19], что асимптотическое решение (2), основанное на учете только членов третьего порядка, достаточно хорошо передает все качественные особенности нелинейного резонанса далеко за областью его формального применения $|R - R_0|/R_0 \ll 1$. Можно надеяться, что это обстоятельство сохранится и при наличии шума. Вместе с тем применение численных методов для анализа нелинейной динамики пузырька в поле резонансного и шумового полей является естественным и необходимым продолжением настоящего исследования.

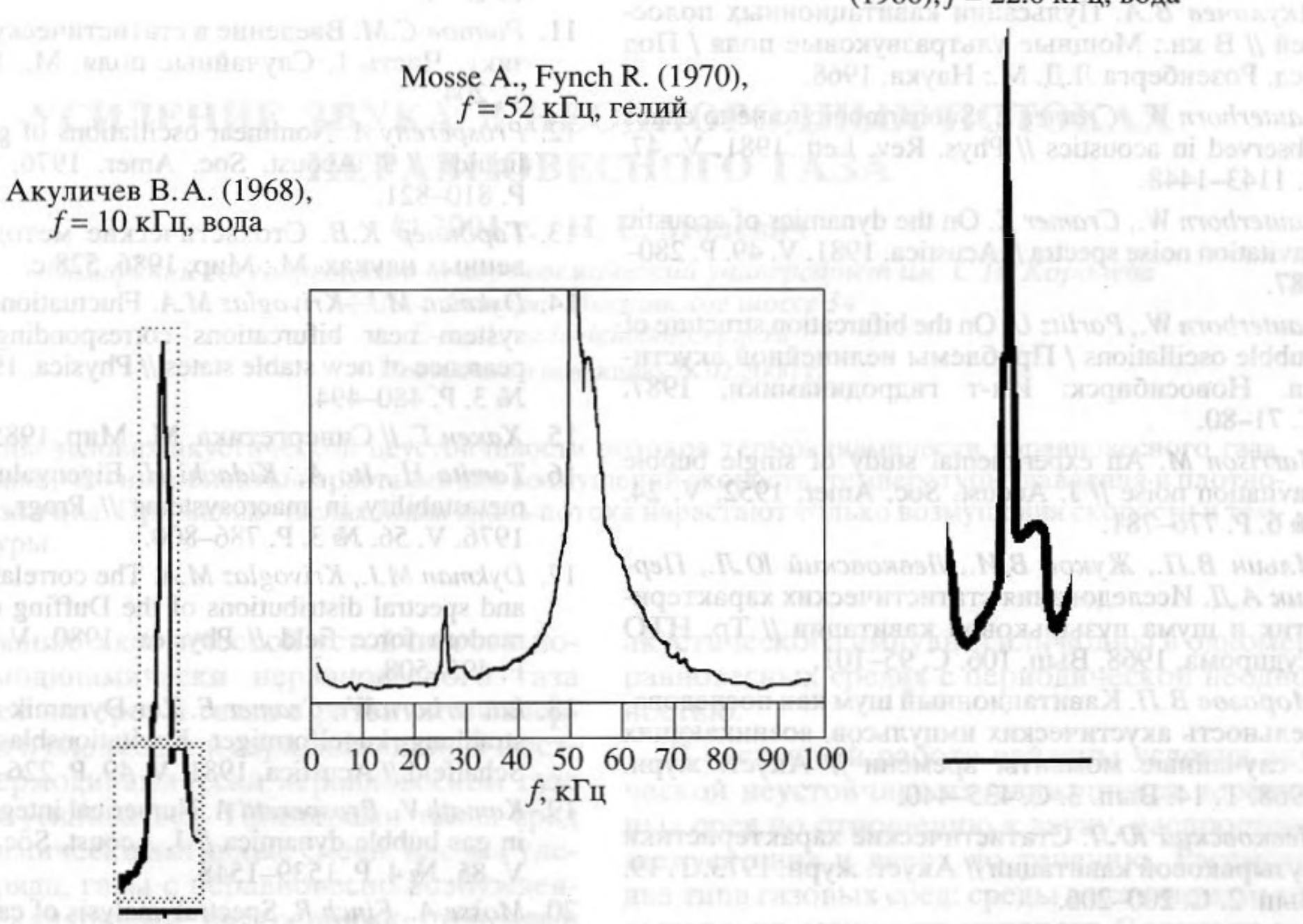

Рис. 4. Форма спектра кавитационного излучения в окрестности основной частоты [1, 20, 21]. Характерные особенности – наличие узких компонент, располагающихся на существенно более широком основании, выделены пунктиром на данных [1]. Асимметричное основание не имеет лоренцовского вида и сохраняет свою форму в существенно различных экспериментальных условиях.

Другая проблема – это учет вклада от совокупности пузырей различного радиуса, находящихся в кавитационной зоне. На рис. 4 представлены экспериментальные зависимости, демонстрирующие устойчивые особенности формы спектра кавитационного излучения в окрестности основной частоты [1, 20, 21]. К этим особенностям следует отнести наличие очень узких спектральных компонент, располагающихся на существенно более широком основании, обладающем асимметричной формой и переходящим в фон, связанный с шумом. Очевидно, что эти узкие линии определяются когерентным вкладом в спектральную плотность. Описание формы асимметричного основания представляет наибольший интерес, однако непосредственное использование полученных выражений для спектра излучения одиночного пузырька (20) представляется в настоящее время затруднительным.

В общем случае в выражении (17) возникнет сумма “диагональных” членов – автокорреляционных функций (20), и “недиагональных”, описывающих парные корреляции между излучением различных пузырьков. Вообще говоря, нет оснований для пренебрежения вкладом последних, а для их определения необходимы данные о пространственном спектре флюктуаций в кавитационной области, которые практически отсутствуют.

Вместе с тем некоторые особенности зависимостей, представленных на рис. 4, становятся понятными из выражения (20) или его графического представления на рис. 3. Во-первых, это полуширина оснований $\Delta\omega$, существенно превосходящая δ. Вклад только “диагональных” членов, сводящийся по существу к интегрированию (20) по расстройке η, приводит к значению $\Delta\omega \sim 5\delta$. Второе обстоятельство – это асимметрия результирующего спектра относительно ω_p, которая является естественным порождением асимметрии излучения одиночных пузырьков. Наконец, тот факт, что форма спектра определяется устойчивостью динамических состояний пузырьков, позволяет прогнозировать перестройку спектра в окрестности бифуркационных значений амплитуд внешнего давления, отвечающих потере устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуличев В.А.* Пульсации кавитационных полостей // В кн.: Мощные ультразвуковые поля / Под ред. Розенберга Л.Д. М.: Наука, 1968.
2. *Lauterborn W., Cramer E.* Subharmonic route to chaos observed in acoustics // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 1143–1448.
3. *Lauterborn W., Cramer E.* On the dynamics of acoustic cavitation noise spectra // Acustica. 1981. V. 49. P. 280–287.
4. *Lauterborn W., Parlitz U.* On the bifurcation structure of bubble oscillations / Проблемы нелинейной акустики. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1987. С. 71–80.
5. *Harrison M.* An experimental study of single bubble cavitation noise // J. Acoust. Soc. Amer. 1952. V. 24. № 6. P. 776–781.
6. *Ильин В.П., Жуков В.И., Левковский Ю.Л., Перник А.Д.* Исследования статистических характеристик и шума пузырьковой кавитации // Тр. НТО Судпрома. 1968. Вып. 106. С. 95–101.
7. *Морозов В.П.* Кавитационный шум как последовательность акустических импульсов, возникающих в случайные моменты времени // Акуст. журн. 1968. Т. 14. Вып. 3. С. 435–440.
8. *Левковский Ю.Л.* Статистические характеристики пузырьковой кавитации // Акуст. журн. 1973. Т. 19. Вып. 2. С. 200–206.
9. *Latorre R.* Bubble cavitation noise and the cavitation noise spectrum // ACUSTICA – acta acustica. 1997. V. 73. P. 424–429.
10. *Максимов А.О.* Нелинейные колебания пузырьков под действием резонансного и шумового акустических полей: Препринт, Владивосток: ТОИ, 1985. 19 с.
11. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные поля. М.: Наука, 1976. С. 204.
12. *Prosperetty A.* Nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids // J. Acoust. Soc. Amer. 1976. V. 57. № 1. P. 810–821.
13. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 528 с.
14. *Dykman M.I., Krivoglaz M.A.* Fluctuations in nonlinear system near bifurcations corresponding to the appearence of new stable states // Physica. 1980. V. 104A. № 3. P. 480–494.
15. *Хакен Г.* // Синергетика. М.: Мир, 1985. 424 с.
16. *Tomita H., Ito A., Kidachi H.* Eigenvalue problem of metastability in macrosystems // Progr. Theor. Phys. 1976. V. 56. № 3. P. 786–800.
17. *Dykman M.I., Krivoglaz M.A.* The correlation functions and spectral distributions of the Duffing oscillator in a random force field // Physica. 1980. V. 104A. № 3. P. 495–508.
18. *Lauterborn W., Cramer E.* Zur Dynamik und Schallabstrahlung kugelformiger Kavitationsblasen in einem Schalfeld // Acustica. 1981. V. 49. P. 226–238.
19. *Kamath V., Prosperetti A.* Numerical integration method in gas bubble dynamica // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. V. 85. № 4. P. 1539–1548.
20. *Mosse A., Finch R.* Spectral analysis of cavitation noise in cryogenic liquids // J. Acoust. Soc. Amer. 1971. V. 49. № 1. (Part 2). P. 156–165.
21. *Lauterborn W., Holzfuss J.* Evidence for a low-dimensional strange attractor in acoustic turbulence // Physics Letters A. 1986. V. 115. № 8. P. 369–372.

Spectrum of Acoustic Radiation Caused by Cavitation. Analytical Model

A. O. Maksimov

Nonlinear dynamics of bubbles in liquid in the presence of the resonance and noise acoustic fields is analyzed. The effect of fluctuations associated with the random field component is found to be most pronounced in the vicinity of the bifurcation values of the field amplitude and detuning, these values corresponding to changes in the number of stable oscillatory states of a bubble. The radiation spectrum of a single bubble in the vicinity of the fundamental resonance is determined. In the framework of the proposed model, a comparison of this spectrum with the real spectrum of acoustic radiation caused by cavitation is performed.