

УДК 532.26

О ПОТОКЕ МОЩНОСТИ ВДОЛЬ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

© 2001 г. И. В. Андронов

Санкт-Петербургский государственный университет
198904 С.-Петербург, Петродворец, ул. Ульяновская 1/1
E-mail: iva@aa2628.spb.edu

Поступила в редакцию 12.05.2000 г.

Приводятся результаты исследования распространения кромочных волн вдоль прямолинейной трещины в упругой пластине. Вычислены потоки мощности, переносимой этими волнами, и исследованы формы колебаний.

Вопрос существования локализованных волн продолжает оставаться актуальным. Локализованные волны могут наблюдаться вблизи тел, помещенных в волновод, см. например [1], в периодических структурах [2], на поверхности упругого тела [3].

Как известно [4], вблизи края пластины, находящейся в вакууме, может распространяться волна типа релеевской. Дисперсионное уравнение для кромочных волн в пластине, находящейся в контакте с акустической средой, исследованы в [5]. Установлено, что вдоль прямолинейной трещины со свободными кромками могут распространяться симметричная и антисимметричная волны. Симметричная волна возможна при любом соотношении параметров и при любых частотах, а антисимметричная волна существует лишь в ограниченном диапазоне частот. В данной работе изучается поток мощности, переносимой симметричной и антисимметричной кромочными волнами. Поток мощности представлен в виде суммы мощности E' , переносимой в акустической среде, и мощности E'' изгибных колебаний пластины, в котором в свою очередь выделен вклад E''' уголкового сил.

Пусть как и в [5] механическая система состоит из акустического полупространства $\{z < 0\}$, ограниченного пластиной Кирхгофа $\{z = 0\}$, в которой имеется трещина на прямой $\{x = 0\}$. Симметричная и антисимметричная кромочные волны определяются формулами [5]

$$e^{i\mu_0 y} V_0(x, z) = e^{i\mu_0 y} \frac{c_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma\mu_0^2 + \lambda^2}{l(\lambda, \mu_0)} e^{i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 + \mu_0^2 - k^2} z} d\lambda, \quad (1)$$

$$e^{i\mu_1 y} V_1(x, z) = e^{i\mu_1 y} \frac{c_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2 - \sigma)\mu_1^2 + \lambda^2}{l(\lambda, \mu_1)} e^{i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 + \mu_1^2 - k^2} z} d\lambda, \quad (2)$$

где

$$l(\lambda, \mu) = ((\lambda^2 + \mu^2)^2 - k_0^4) \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2} - \nu,$$

а волновые числа μ_0 и μ_1 определяются из соответствующих дисперсионных уравнений (см. формулы (12) и (15) в [5]). Волнам давления V_0 и V_1 отвечают смещения пластины ξ_0 и ξ_1 соответственно

$$\xi_j(x) = -\rho^{-1} \omega^{-2} \frac{dV_j(x, 0)}{dz}.$$

Здесь ω – частота колебаний, ρ – плотность акустической среды.

Амплитуды c_0 и c_1 могут быть выбраны, например из условия нормировки амплитуды смещения берегов трещины.

$$c_0 = \frac{\rho \omega^2}{D_2(\mu_0) + \sigma \mu_0^2 D_0(\mu_0)}, \quad c_1 = 2\rho \omega^2,$$

где

$$D_j(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i0\lambda} \frac{\lambda^j \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2}}{l(\lambda, \mu)} d\lambda.$$

Для потока мощности воспользуемся формулами [6], при этом мощность, распространяющаяся в пластине, представим согласно [7]

$$E' = \frac{1}{2\omega\rho} \mu \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dx |V(x, z)|^2, \quad (3)$$

$$E'' = E''' + D\omega\mu \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\mu^2 |\xi(x)|^2 + \text{Re} \left(\xi^*(x) \frac{d^2 \xi(x)}{dx^2} \right) \right), \quad (4)$$

$$E''' = -D\omega(1 - \sigma)\mu \text{Re} \left[\xi^* \frac{d\xi}{dx} \right]. \quad (5)$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость пластины, σ – коэффициент Пуассона, звездочкой обозна-

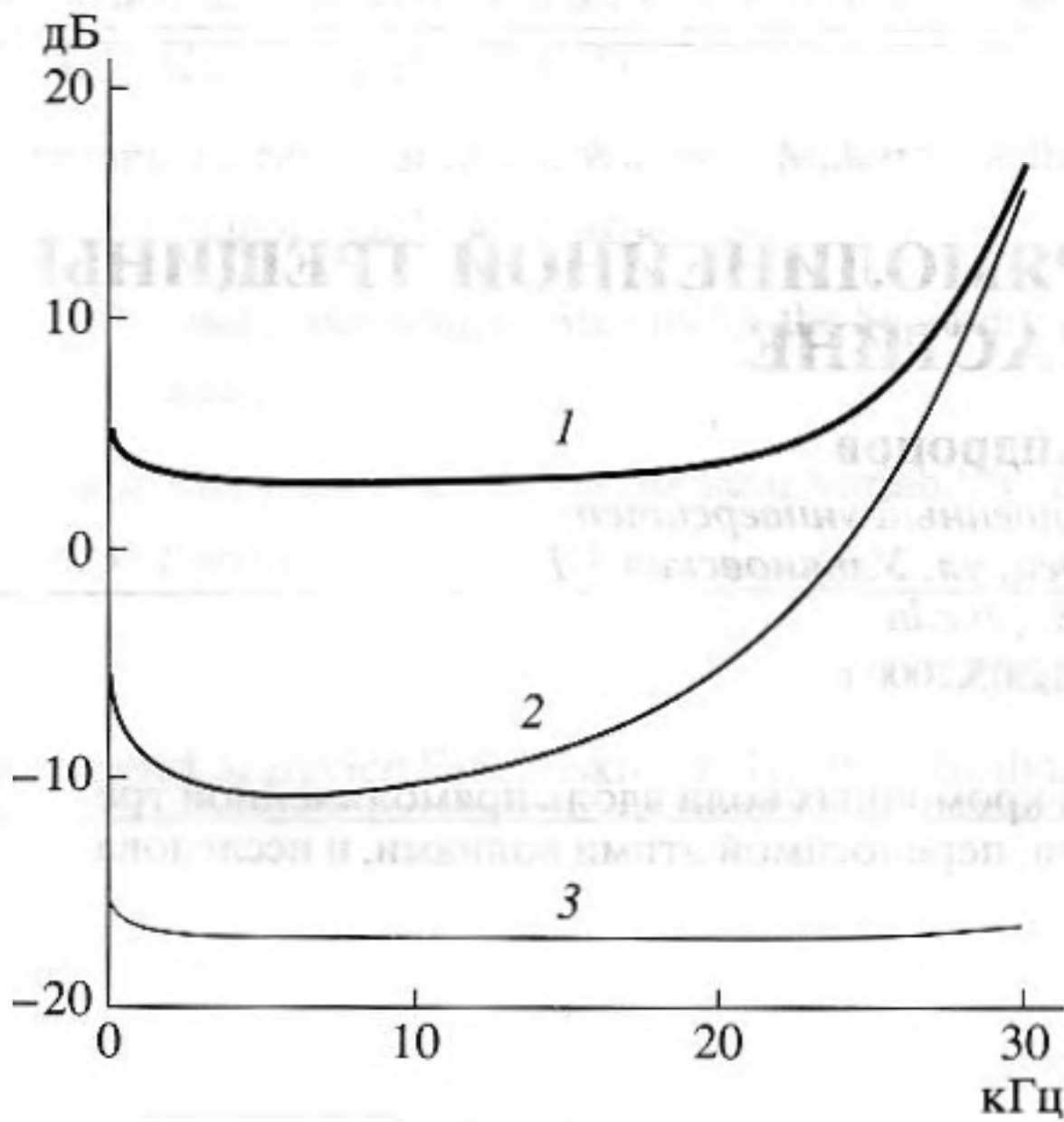


Рис. 1. Частотные зависимости потоков мощности кромочной волны для пластины в воде. 1 – суммарный поток мощности; 2 – вклад акустических колебаний; 3 – вклад уголкового сил.

чено комплексное сопряжение, а символом $[f]$ – скачок функции f при $x = 0$.

Подставим (1) и (2) в (3), (4) и (5) и заменим порядок интегрирования. Интеграл по z вычисляется явно, а интегралы по x дают дельта-функцию. Окончательно имеем

$$E'_0 = \frac{\mu_0 |c_0|^2}{8\pi\rho\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sigma\mu_0^2 + \lambda^2)^2 d\lambda}{l^2(\lambda, \mu_0) \sqrt{\lambda^2 + \mu_0^2 - k^2}}, \quad (6)$$

$$E''_0 = E'_0 + \frac{D\mu_0 |c_0|^2}{2\pi\rho^2\omega^3} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sigma\mu_0^2 + \lambda^2)^2 (\lambda^2 + \mu_0^2 - k^2) (\mu_0^2 + \lambda^2)}{l^2(\lambda, \mu_0)} d\lambda,$$

$$E'''_0 = \frac{D(1-\sigma)\mu_0 |c_0|^2}{\rho^2\omega^3} (D_2(\mu_0) + \sigma\mu_0^2 D_0(\mu_0)) \quad (8)$$

для симметричной волны и

$$E'_1 = \frac{\mu_1 |c_1|^2}{8\pi\rho\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{((2-\sigma)\mu_1^2 + \lambda^2)^2 \lambda^2 d\lambda}{l^2(\lambda, \mu_1) \sqrt{\lambda^2 + \mu_1^2 - k^2}}, \quad (9)$$

$$E''_1 = E'_1 + \frac{D\mu_1 |c_1|^2}{2\pi\rho^2\omega^3} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 ((2-\sigma)\mu_1^2 + \lambda^2)^2 (\lambda^2 + \mu_1^2 - k^2) (\mu_1^2 + \lambda^2)}{l^2(\lambda, \mu_1)} d\lambda, \quad (10)$$

$$E'''_1 = \frac{D(1-\sigma)\mu_1 |c_1|^2}{\rho^2\omega^3} (D_4(\mu_1) + (2-\sigma)\mu_1^2 D_2(\mu_1)) \quad (11)$$

для антисимметричной волны.

Интегралы в (6), (7), (9) и (10) – вещественные, так как волновые числа μ_0 и μ_1 больше чем k . Эти интегралы могут быть сведены к сумме вычетов аналогично тому, как это сделано в [8] с интегралами D_j . Получающиеся при этом формулы – весьма громоздкие, поскольку все полюсы имеют кратность 2.

Ниже приведены результаты численных расчетов для потоков мощности и форм колебаний. На рис. 1 представлены зависимости потоков мощности симметричной кромочной волны вдоль трещины в сантиметровой стальной пластине, погруженной в воду. Потоки мощности нормированы на поток мощности кромочных волн в изолированной пластине

$$E^0 = D\omega k_0^2 \frac{\tau_0}{a_+^2} \left(\frac{a_+^2}{\sqrt{\tau_0 - 1}} - \frac{a_-^2}{\sqrt{\tau_0 + 1}} + 4(1-\sigma)(a_+ \sqrt{\tau_0 - 1} - a_- \sqrt{\tau_0 + 1}) \right),$$

где $a_{\pm} = (1-\sigma)\tau_0^2 \pm 1$, а $k_0\tau_0$ – волновое число кромочной волны в изолированной пластине, определяемое формулой [4]

$$\tau_0 = ((1-\sigma)(3\sigma - 1 + 2\sqrt{1 - 2\sigma + 2\sigma^2}))^{-1/4}.$$

На рис. 2 представлены те же потоки для пластины в воздухе. Рисунок 2а отвечает симметричной волне, а рис. 2б – нечетной. На графиках видна перестройка энергетических характеристик на частотах, близких к частоте совпадения. При более низких частотах основную долю мощности составляет мощность упругой деформации пластины, которая для четной волны практически совпадает с E^0 , при переходе через частоту совпадения основной вклад уже дает поток мощности в прилегающей акустической среде. При дальнейшем увеличении частоты вклад мощности упругой деформации опять становится доминирующим. Заметные на рис. 2а осцилляции на высоких частотах связаны с погрешностью вычислений. Как указано в [5], на высоких частотах волновое число симметричной кромочной волны μ_0 близко к волновому числу изгибных волн k в пластине, погруженной в акустическую среду. В формулы для потока мощности входит величина $\mu_0^2 - k^2$, при вычислении которой происходит потеря точности. Аналогичная потеря точности происходит и вблизи верхней критической частоты для антисимметричной кромочной волны.

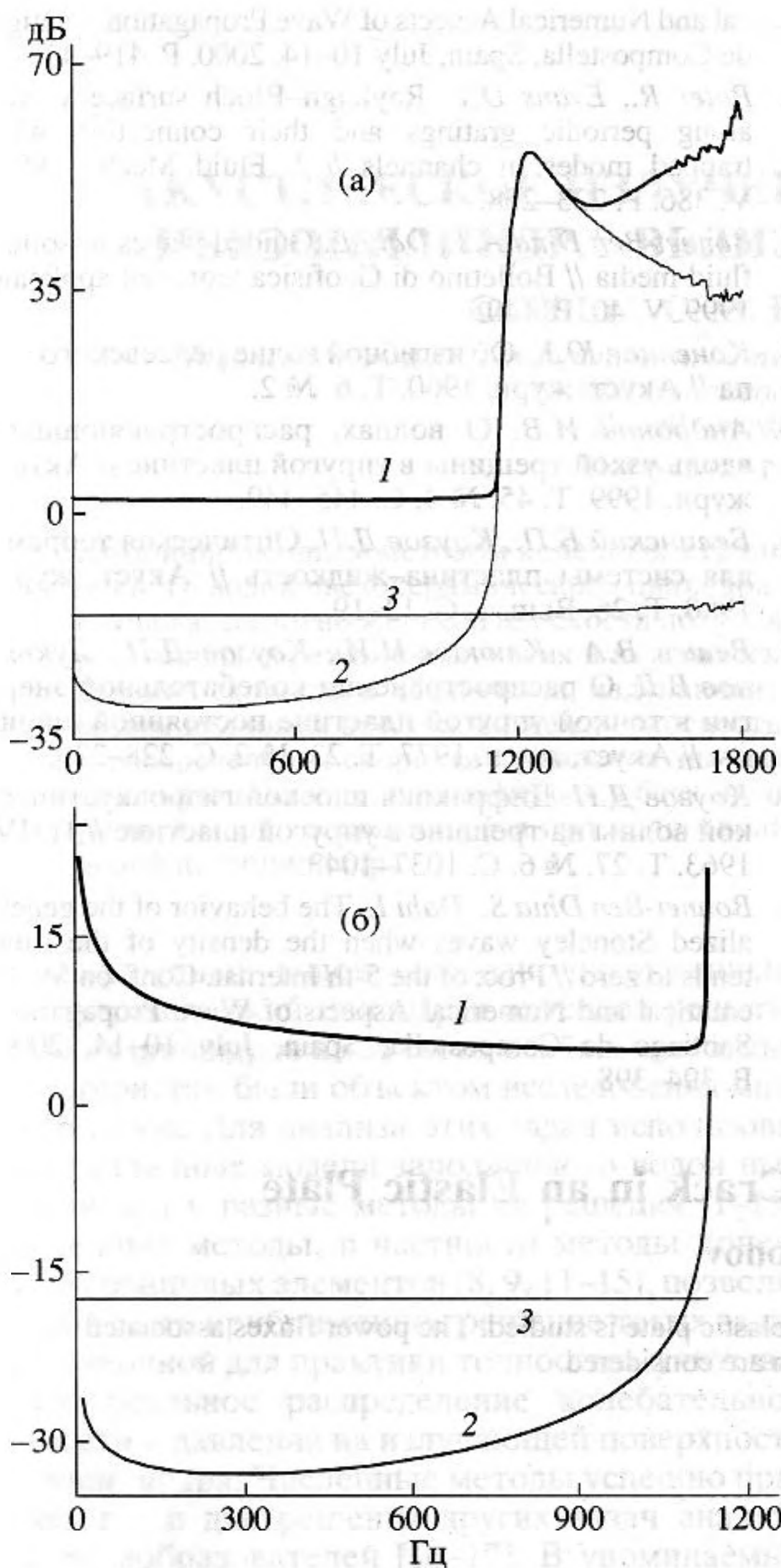


Рис. 2. а – Частотная зависимость потока мощности симметричной волны для пластины в воздухе. 1 – суммарный поток мощности; 2 – вклад изгибных колебаний; 3 – вклад уголкового сил; б – Частотная зависимость потока мощности антисимметричной волны для пластины в воздухе. 1 – суммарный поток мощности; 2 – вклад изгибных колебаний; 3 – вклад уголкового сил.

Рисунки 1 и 2 показывают, что вклад уголкового сил E'' не претерпевает резких изменений ни в окрестности частоты совпадения, ни на критических частотах антисимметричной волны. Таким образом, можно предположить, что формы колебаний кромок пластин в существенном сохраняют свой характер. Расчеты показывают, что вблизи трещины зависимости смещения ξ

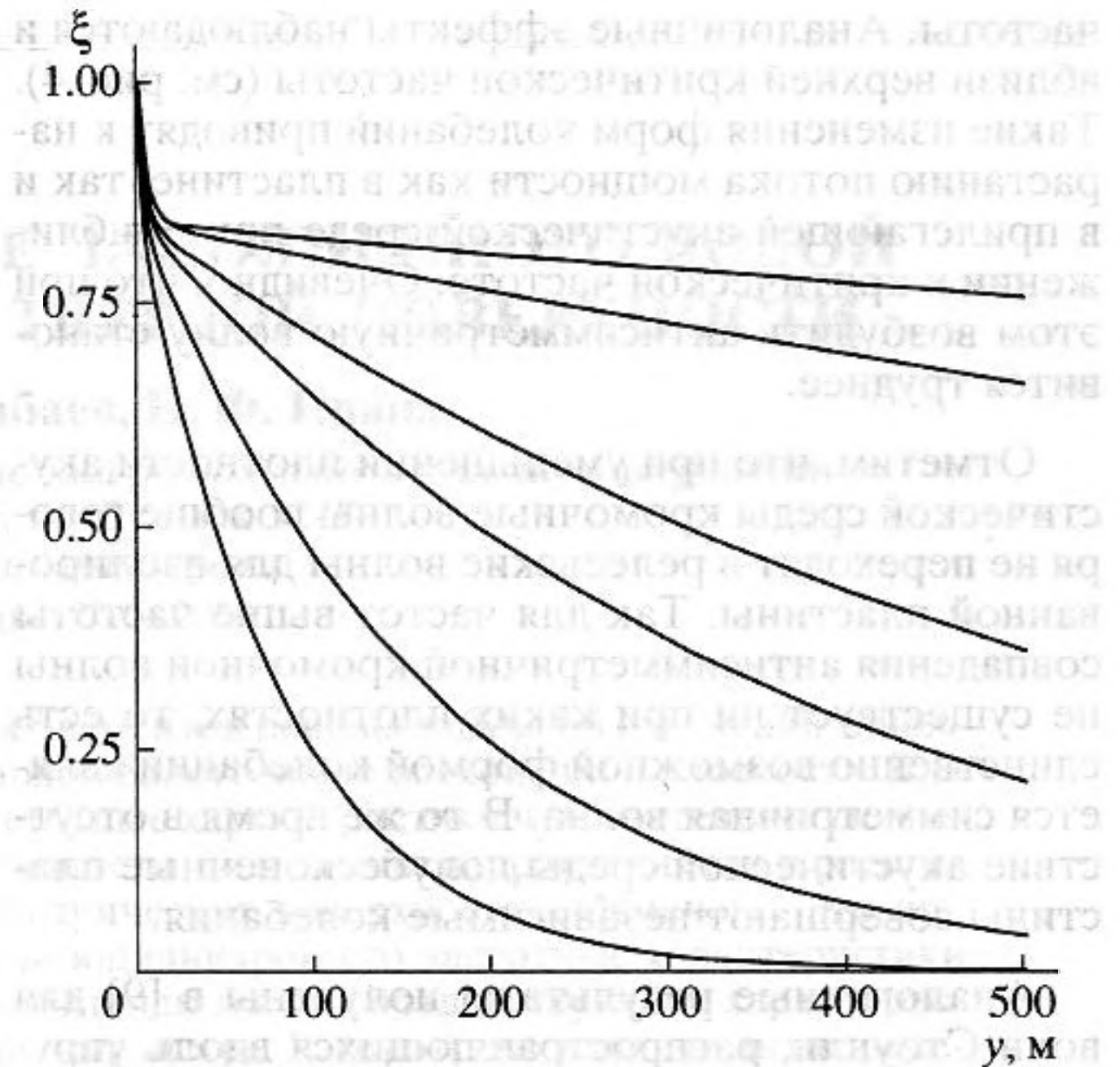


Рис. 3. Формы смещения пластины в антисимметричной волне для частот (снизу вверх) 0.5, 0.2, 0.1, 0.075, 0.05 и 0.045 Гц.

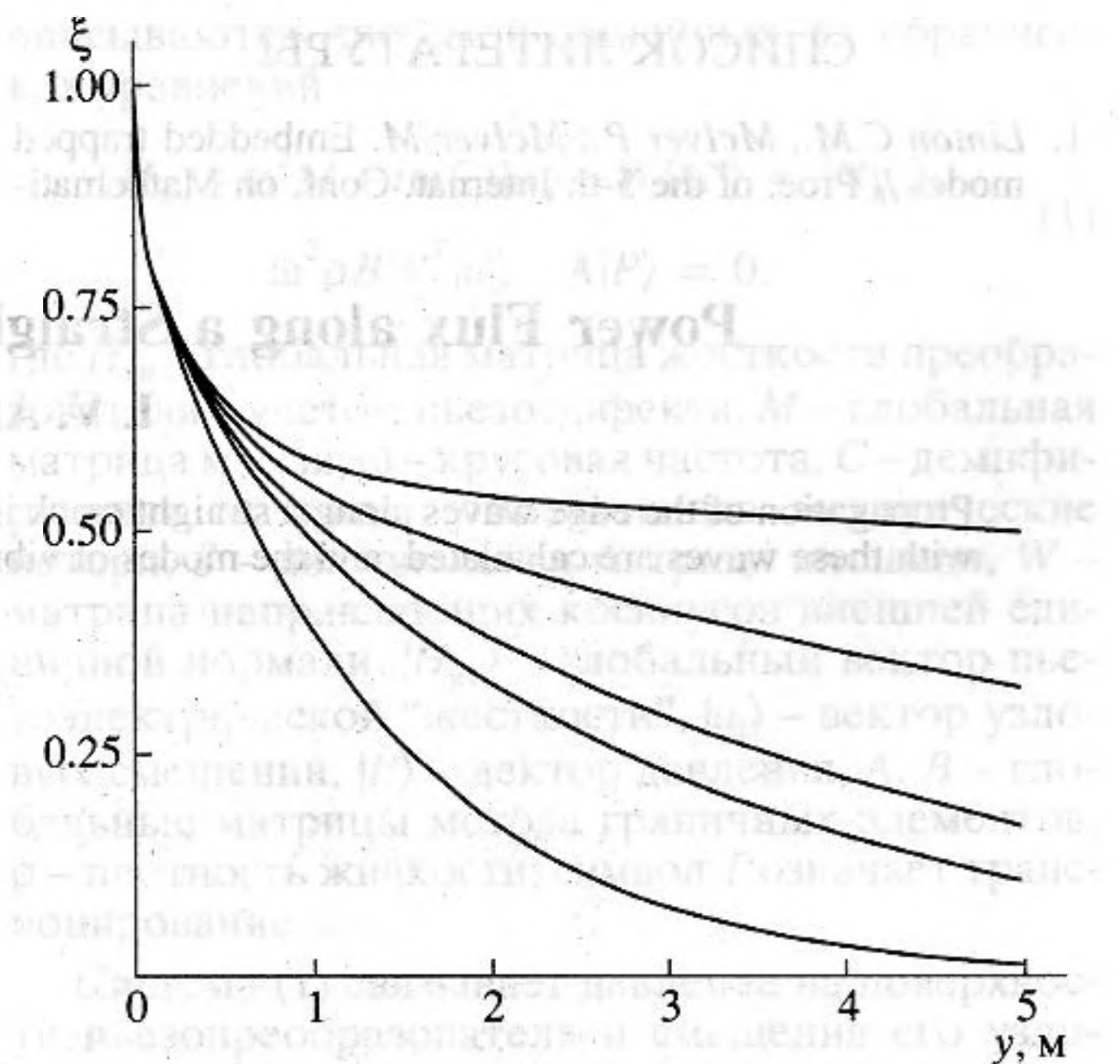


Рис. 4. Формы смещения пластины в антисимметричной волне для частот (снизу вверх) 1000, 1130, 1132, 1134 и 1135 Гц.

пластин от расстояния до кромки представляют собой быстро спадающие кривые, практически неотличимые для симметричной и антисимметричной волн. Вблизи критических частот для антисимметричной волны скорость убывания смещения замедляется. На рис. 3 представлены изменения формы колебаний антисимметричной кромочной волны вблизи нижней критической

частоты. Аналогичные эффекты наблюдаются и вблизи верхней критической частоты (см. рис. 4). Такие изменения форм колебаний приводят к нарастанию потока мощности как в пластине, так и в прилегающей акустической среде при приближении к критической частоте. Очевидно, что при этом возбудить антисимметричную волну становится труднее.

Отметим, что при уменьшении плотности акустической среды краевые волны вообще говоря не переходят в релеевские волны для изолированной пластины. Так для частот выше частоты совпадения антисимметричной краевой волны не существует ни при каких плотностях, то есть единственно возможной формой колебаний является симметричная волна. В то же время в отсутствие акустической среды полубесконечные пластины совершают независимые колебания.

Аналогичные результаты получены в [9] для волн Стоунли, распространяющихся вдоль упругого цилиндра, при уменьшении плотности акустической среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Linton C.M., McIver P., McIver M. Embedded trapped modes // Proc. of the 5-th Internat. Conf. on Mathemati-

cal and Numerical Aspects of Wave Propagation, Santiago de Compostella, Spain, July 10–14, 2000. P. 419–423.

2. Poter R., Evans D.V. Rayleigh–Bloch surface waves along periodic gratings and their connection with trapped modes in channels // J. Fluid Mech., 1999. V. 386. P. 233–258.
3. Bonnet-Ben Dhia A.S., Dahi L. Guided waves in solid–fluid media // Bolletino di Geofisica teoria ed applicate 1999. V. 40. P. 140.
4. Коненков Ю.К. Об изгибной волне релеевского типа // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 2.
5. Андронов И.В. О волнах, распространяющихся вдоль узкой трещины в упругой пластине // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 4. С. 445–449.
6. Белинский Б.П., Коузов Д.П. Оптическая теорема для системы пластина–жидкость // Акуст. журн. 1980. Т. 26. Вып. 1. С. 13–19.
7. Вешев В.А., Клюкин И.И., Коузов Д.П., Лукьянов В.Д. О распространении колебательной энергии в тонкой упругой пластине постоянной ширины // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 2. С. 228–233.
8. Коузов Д.П. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине // ПММ 1963. Т. 27. № 6. С. 1037–1043.
9. Bonnet-Ben Dhia S., Dahi L. The behavior of the generalized Stoneley waves when the density of the fluid tends to zero // Proc. of the 5-th Internat. Conf. on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Santiago de Compostella, Spain, July 10–14, 2000. P. 394–398.

Power Flux along a Straight Crack in an Elastic Plate

I. V. Andronov

Propagation of the edge waves along a straight crack in an elastic plate is studied. The power fluxes associated with these waves are calculated, and the modes of vibration are considered.

