АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2002, том 48, № 3, с. 358–370

УДК 534.26

АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ В СИСТЕМЕ ЖИДКОСТЬ–СФЕРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА С ЖИДКИМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

© 2002 г. Р. А. Кособродов

Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений
141570 Московская обл., Солнечногорский р-н, п/о Менделеево
E-mail: myagkov@ntmdt.ru

Поступила в редакцию 6.03.01 г.

Рассматриваются акустические волны, возникающие в упругой сферической оболочке с жидким наполнителем, помещенной в жидкость. Показано, что в общем случае ни один из четырех типов волн, возможных в такой системе (дозвуковая и сверхзвуковая антисимметрические волны Лэмба, симметрическая волна Лэмба, "шепчущие галереи"), не реализуется изолированно, но происходит взаимодействие между волнами разных типов.

Задача рассеяния плоской акустической волны упругой сферической оболочкой относится к так называемым эталонным задачам, для которых получены аналитические решения. Эти задачи важны для оценки точности приближенных и численных методов и помогают понять физические процессы взаимодействия акустических волн с упругими телами. Целью данной статьи является рассмотрение акустических волн, возникающих при рассеянии звука сферической оболочкой с наполнителем, и выяснение механизма взаимодействия между волнами различных типов.

Впервые вопрос рассеяния звука упругой сферической оболочкой, заполненной воздухом, рассмотрен в [1], где для описания движения оболочки использовалась теория тонких оболочек. Как было показано в [2], данная теория плохо описывает изгибные колебания оболочки. Решение задачи на основе точной теории упругости содержится в [3], где рассматривается оболочка, помещенная в идеальную жидкость и заполненная той же жидкостью. Обобщение на случай различных жидкостей легко получается и приводится, например, в [4]. Недавно получено решение для оболочки, частично заполненной жидкостью [5].

В монографии [6] рассеянное поле выражено через механический импеданс оболочки и импедансы излучения во внешнюю и внутреннюю области, и приводятся точные и приближенные формулы для определения механического импеданса.

В настоящей работе использованы результаты [3, 4], справедливые не только для тонких оболочек, но и для упругого сферического слоя произвольной толщины.

Пусть на оболочку падает плоская монохроматическая звуковая волна, описываемая выражением:

$$p_0 = p\exp(ikr\cos\theta), \qquad (1)$$

где p – амплитуда звукового давления, k – волновое число во внешней жидкости, r – расстояние от центра оболочки, θ – угол, отсчитываемый от направления падения волны. Рис. 1 поясняет геометрию задачи. Плоская волна падает в направлении, обратном направлению оси X на рисунке. Плотности внутренней и внешней жидкостей обозначены ρ_1 и ρ_2, соответственно, скорости распространения звука – c_1 и c_2. В выражении (1) и далее для краткости не выписывается множитель $\exp(-i\omega t)$.

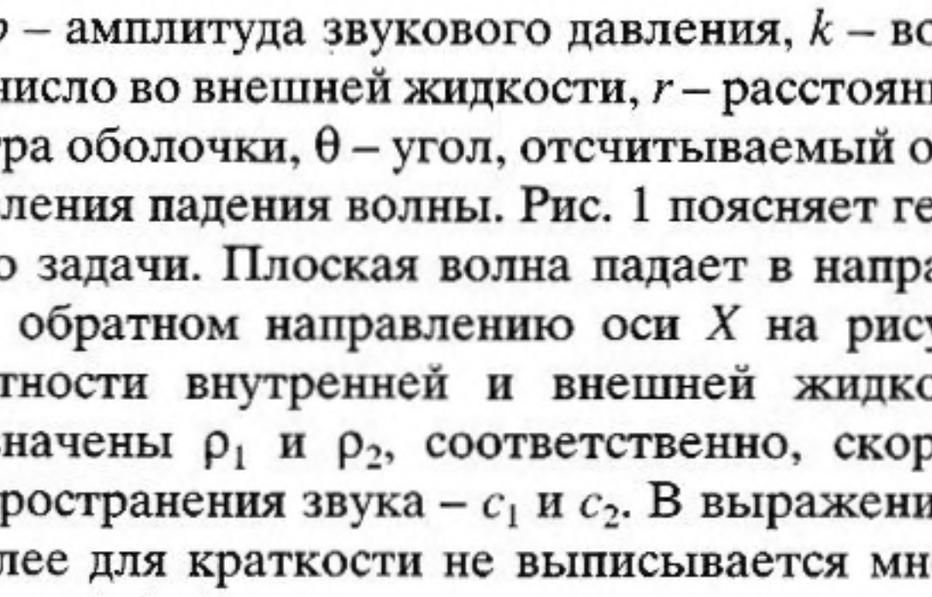

Рис. 1. Геометрия задачи.

Для падающей волны p_0, рассеянной волны $p_2^{(s)}$ и поля внутри оболочки p_1 справедливы разложения:

$$p_0 = p\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n j_n(kr)P_n(\cos\theta), \qquad (2)$$

$$p_1 = p\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n a_n j_n(k_1 r)P_n(\cos\theta), \qquad (3)$$

$$p_2^{(s)} = p\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n b_n h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\theta). \qquad (4)$$

Здесь j_n и $h_n^{(1)}$ – сферические функции Бесселя и Ганкеля порядка n; $P_n(x)$ – многочлен Лежандра, $k_1 = \omega/c_1$. Числовые коэффициенты a_n и b_n и четыре коэффициента $c_n, \ldots, f_n$, входящие в выражения для смещений оболочки, определяются из шести граничных условий: непрерывности смещений на внешней и внутренней поверхностях оболочки, условий равенства полного звукового давления и нормальной составляющей напряжения оболочки (с учетом знака), и условий отсутствия касательных напряжений на поверхностях оболочки [3, 4]. Нахождение коэффициентов сводится к решению системы из шести линейных уравнений с шестью неизвестными:

$$\|m_{ij}\|_n[a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n]^T = [\alpha_1, 0, \alpha_3, 0, 0, 0]^T.$$

Выражения для α_1, α_3 и элементов матрицы m_{ij} приведены в приложении. Таким образом, коэффициенты a_n и b_n зависят от частоты, параметров внешней и внутренней сред (ρ_1, c_1, ρ_2, c_2), плотности материала оболочки, коэффициентов Ламэ, а также от радиуса и толщины оболочки.

Обычно анализируется форм-функция f, которая определяется через звуковое давление рассеянной волны $p_2^{(s)}$ в направлении, обратном направлению падения волны ($\theta = \pi$) на бесконечном удалении от центра оболочки ($r \longrightarrow \infty$). Используя асимптотическое выражение $h_n^{(1)}(x) \approx (-i)^{n+1}\exp(ix)/x$ и учитывая, что $P_n(-1) = (-1)^n$, можно записать форм-функцию f и $p_2^{(s)}$ как:

$$f = \frac{2}{ika}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n b_n,$$
$$p_2^{(s)} = p\frac{ae^{ikr}}{2r}f, \qquad (5)$$

где a – внешний радиус оболочки. Другой часто используемой величиной является сечение рассеяния σ, которое также выражается через форм-функцию:

$$\frac{\sigma}{\pi a^2} = |f|^2.$$

Для анализа форм-функции предлагались различные методы [7]. Широкое распространение получил метод интегрального преобразования Зоммерфельда-Ватсона [8, 9]. Преобразование применяется к ряду парциальных мод типа (4), что позволяет существенно ускорить вычисления этого медленно сходящегося ряда. Кроме того, таким способом можно получить вклад отдельных типов волн в рассеянное звуковое поле.

Другим часто применяемым методом является использование теории резонансного рассеяния [10, 11], заимствованной из квантовой механики. Основная идея состоит в том, что рассеянное поле можно формально представить как сумму двух компонент: резонансной, связанной с упругими резонансами оболочки в вакууме, и фоновой, обусловленной так называемыми дифракционными модами. В качестве фоновой составляющей часто используют звуковое поле, рассеянное на идеально жесткой или мягкой сфере. Выбор подходящей фоновой составляющей, вычитая которую можно получить резонансную часть в классической Брейт-Вигнеровской форме, является главной проблемой в этом методе. Для тонких оболочек фоновая составляющая соответствует рассеянию на мягкой сфере, для очень толстых оболочек – на жесткой сфере. В некоторых работах [4, 11] предложено использовать промежуточное основание, составленное из решений для мягкой и жесткой сфер. Это позволило получать несколько лучшие результаты, но полностью не решило проблемы.

Новый способ выделения резонансной составляющей предложен в серии работ [12–14] и, для цилиндрической оболочки, применен в [15]. Согласно этому методу, резонансная составляющая выделяется не путем вычитания некоторого фона, а получается в результате численного определения полюсов форм-функции (корней дисперсионного уравнения $\det\|m_{ij}\| = 0$) на комплексной плоскости частоты при заданном номере моды $n = 0, 1, 2, \ldots$, так что каждая парциальная мода в выражении (5) анализируется в отдельности. Частоту принято выражать в безразмерных комплексных величинах ka. Зная положения полюсов и номер парциальной моды, легко определить фазовую скорость и построить дисперсионные кривые. Анализ дисперсионных кривых позволяет идентифицировать резонансы по принадлеж-

Таблица 1. Параметры, использованные в расчете; c_L и c_T – скорости продольной и поперечной волны в титане, соответственно

	Плотность, кг/м^3	Скорость звука, м/с
воздух	1.293	346
эфир	713.5	985
вода	1000	1500
титан	4540	$c_L = 5718.8$; $c_T = 3056.8$

ности к определенному типу движения (волне). Этим методом и были получены все результаты в данной статье.

В последнее время опубликовано много работ, посвященных взаимодействию упругих и акустических волн как в классических [16–18] так и в более сложных [19–22] системах. Появление этой статьи во многом вызвано публикацией [15], в которой исследуются волны изгибного типа, распространяющиеся в цилиндрической оболочке с жидким заполнителем. Настоящая работа развивает результаты, полученные в [15]. Рассмотрение не ограничивается только волнами изгибного типа, анализируются и продольные волны. Расчеты выполнены в более широком диапазоне безразмерных частот. Кроме того, кратко обсуждаются результаты для полой оболочки, полученные впервые в [12, 14], что позволяет нагляднее представить механизм взаимодействия различных типов волн.

Численное определение положения полюсов x_{nq} на комплексной плоскости безразмерной частоты ka выполнялось с использованием теоремы Коши о вычетах [23]. Прямоугольная область $0 < \mathrm{Re}(ka) < 100$, $0 < \mathrm{Im}(ka) < 5$ разбивалась прямоугольной сеткой. В каждой ячейке сетки при заданном значении n вычислялся интеграл:

$$I_0 = \oint_C b_n(ka)d(ka),$$

где C – граница ячейки, $b_n(ka)$ – коэффициент в разложении (5), представленный как функция частоты. Если I_0 был отличен от нуля (в пределах точности вычислений), то положение полюса x_{nq} определялось [11] из отношения интегралов:

$$x_{nq} = \frac{1}{I_0}\oint_C kab_n(ka)d(ka).$$

Индекс n в обозначении полюса соответствует номеру парциальной моды, q определяет принадлежность к некоторому типу волны. Вычисления производились в программе, специально составленной с помощью математического пакета Matlab 5.2.

Относительная фазовая скорость волны c_{nq}^{ph}/c_2 по определению [4, 24] есть

$$\frac{c_{nq}^{ph}}{c_2} = \frac{\mathrm{Re}(x_{nq})}{n + (1/2)}.$$

Расчеты были выполнены для сферической оболочки из титана с отношением толщины h к радиусу $h/a = 0.042$. В качестве заполнителя рассматривались вода, эфир и воздух. Числовые параметры, принятые для расчета, указаны в таблице 1.

Рассмотрим вначале более простую систему – пустую сферическую оболочку, погруженную в воду. Подробное обсуждение читатель найдет в [12, 14], здесь же будут приведены только результаты расчетов и некоторые выводы.

На рисунке 2а показан модуль форм-функции. В довольно сложной частотной зависимости $|f|$ можно выделить две характерные области: при малых значениях частоты $1 < ka < 4$ присутствуют несколько мощных резонансных пиков, в диапазоне ka примерно от 20 до 35 имеется несколько широких перекрывающихся резонансных максимумов, создающих характерный подъем. Выше частоты $ka \approx 50$ форм-функция колеблется вблизи единицы с заметными резонансными пиками и провалами.

Изрезанность форм-функции обусловлена возбуждением в оболочке упругих волн. В оболочке в вакууме в рассматриваемом частотном диапазоне распространяются две упругие волны, которые по аналогии с волнами в пластине были названы антисимметричной, a_0, и симметричной, s_0, волнами Лэмба [12]. На рисунке 3а показаны дисперсионные кривые волн Лэмба в оболочке в вакууме и в пластине равной толщины [25]. Самой низкой модой, на которой возможно возбуждение волны a_0 в оболочке, является вторая мода. На низких частотах (в нашем случае $ka < 10$) волны в оболочке существенно отличаются от волн в пластине и их название носит условный характер. К примеру, в реальной оболочке на низких частотах невозможно возбудить волну a_0 без появления симметричной волны [6].

Фазовая скорость волны s_0 слабо изменится, если погрузить оболочку в жидкость (рис. 3а). Как видно, наличие внешней жидкости заметно сказывается лишь на резонансных частотах нулевой и первой моды, где волна несколько замедляется. Начиная с четвертой моды, кривые практически сливаются, и волна s_0 почти не испытывает дисперсии.

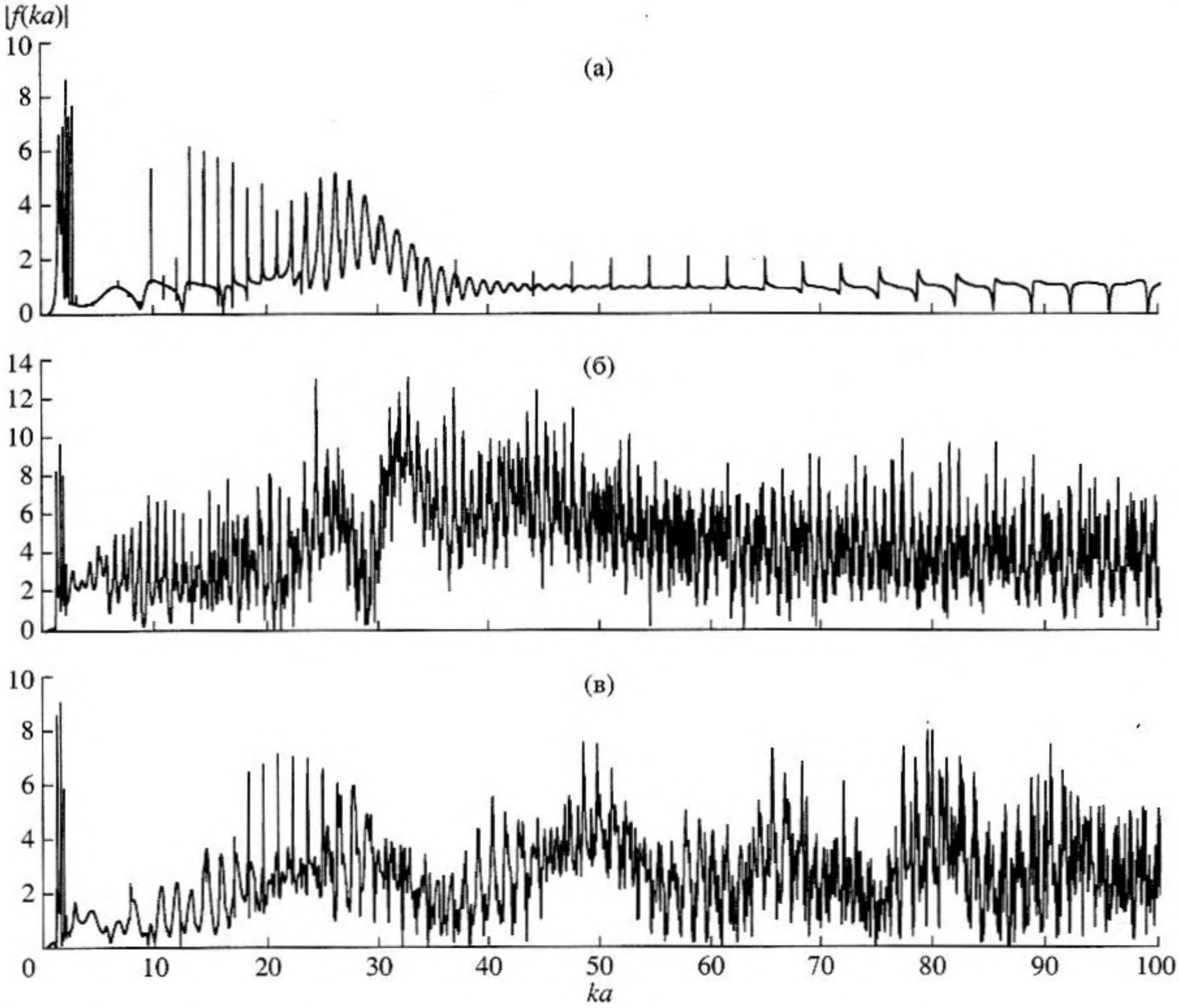

Рис. 2. Модуль форм-функции: а – пустой оболочки, б – оболочки, заполненной эфиром, в – заполненной водой.

Совсем по-другому обстоит дело с антисимметричной волной Лэмба. Фазовая скорость этой волны в оболочке в вакууме быстро уменьшается при малых значениях ka, проходит минимум вблизи $ka \approx 5$, после чего возрастает и, начиная с $ka \approx \approx 27$, превышает скорость звука в воде. Когда оболочка погружена в воду, наблюдается интересное явление расщепления волны a_0 на две составляющие, условно названные в [12] дозвуковой a_{0-} и сверхзвуковой a_{0+} (в других работах, например в [15], сверхзвуковая ветвь называется "волной А", но мы будем пользоваться обозначениями, введенными в [12]).

Дисперсионные кривые волн a_{0-} и a_{0+}, рассчитанные для указанных выше числовых параметров, также приведены на рис. 3а. Положение полюсов, соответствующих волнам s_0, a_{0-} и a_{0+}, показано на рисунке 3б.

Механизм взаимодействия двух ветвей антисимметричной волны Лэмба можно представить следующим образом. На низких частотах (в нашем случае, $ka < 20$) волна a_{0+} ведет себя как дифракционная и распространяется в воде вблизи поверхности оболочки. Ее полюсы расположены далеко от действительной оси (рис. 3б), и она вносит малый вклад в рассеянное поле. В низкочастотной области в оболочке распространяется волна a_{0-}, которая мало отличается от изгибной волны a_0 в "сухой" оболочке. Из-за влияния присоединенной массы окружающей оболочку жидкости, фазовая скорость волны a_{0-} несколько уменьшается по сравнению со скоростью a_0 (рис. 3а). Полюсы, связанные с волной a_{0-}, лежат очень близко к действительной оси (рис. 3б).

В области частот, где фазовая скорость изгибной волны в "сухой" оболочке приближается к c_2 ($20 < ka < 40$), происходит обмен ветвями. Скорость дозвуковой волны a_{0-} начинает плавно возрастать, стремясь к c_2, в то время, как дисперсионная кривая ветви a_{0+} приближается к кривой для a_0. Начиная с $ka \approx 20$, полюсы ветви a_{0-} быстро отдаляются от действительной оси и волна превра-

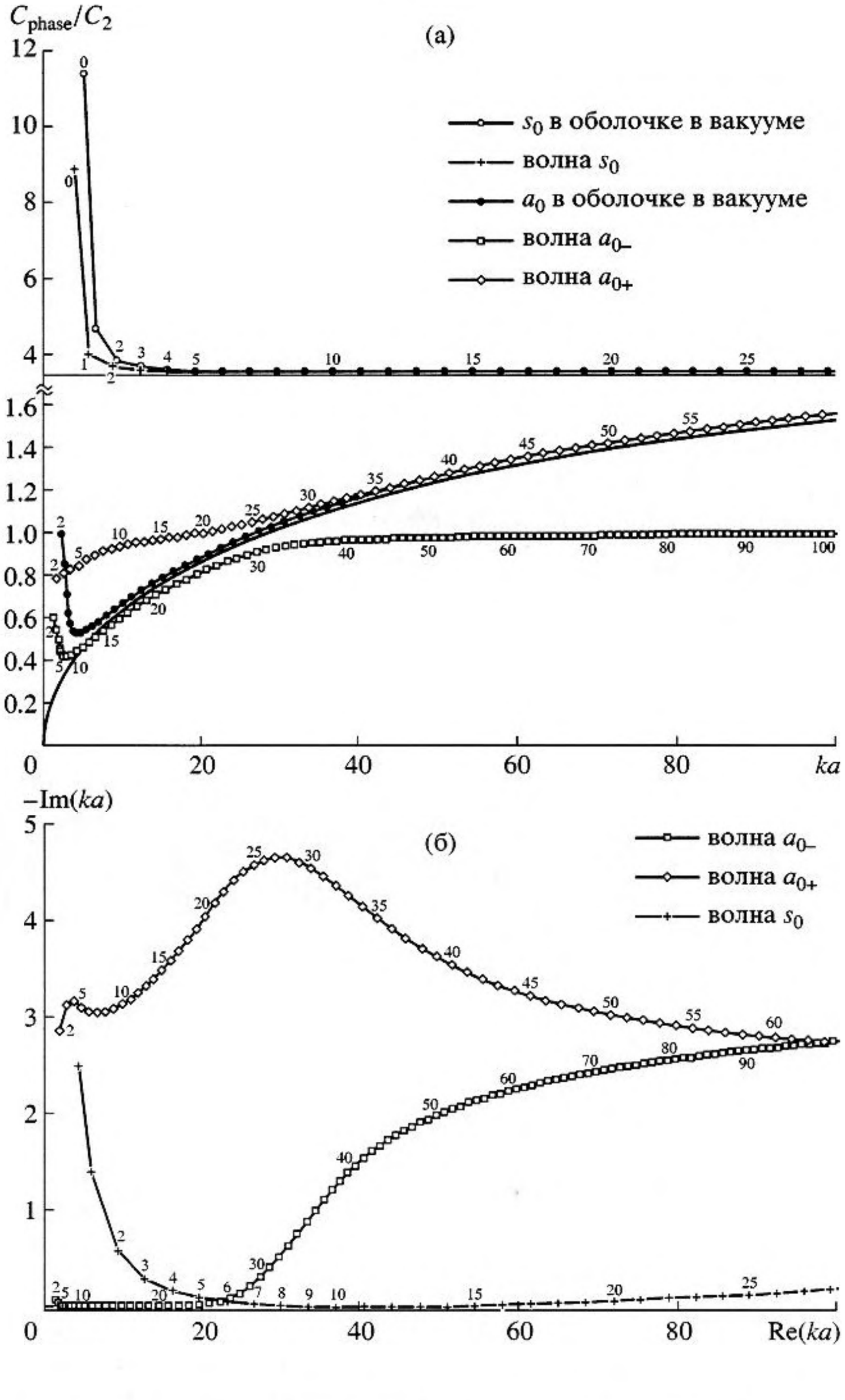

Рис. 3. Дисперсионные кривые (а) и положения полюсов (б) на комплексной плоскости безразмерной частоты ka, соответствующие антисимметричной и симметричной волнам Лэмба в оболочке в вакууме и в пустой оболочке в воде. Сплошными кривыми показаны скорости волн в титановой пластине той же толщины. Цифры рядом с кривыми – номера мод.

щается в дифракционную. Напротив, ветвь a_{0+} трансформируется в изгибную волну, распространяющуюся по оболочке. В области частот, где происходит обмен ветвями, форм-функция имеет характерный подъем.

Если оболочка заполнена жидкостью (или газом), то в ней возможен еще один тип движения – волны типа "шепчущих галерей" [25], wg. Дисперсионные уравнения для волн этого типа в сферической полости радиуса a_2 с абсолютно жесткими

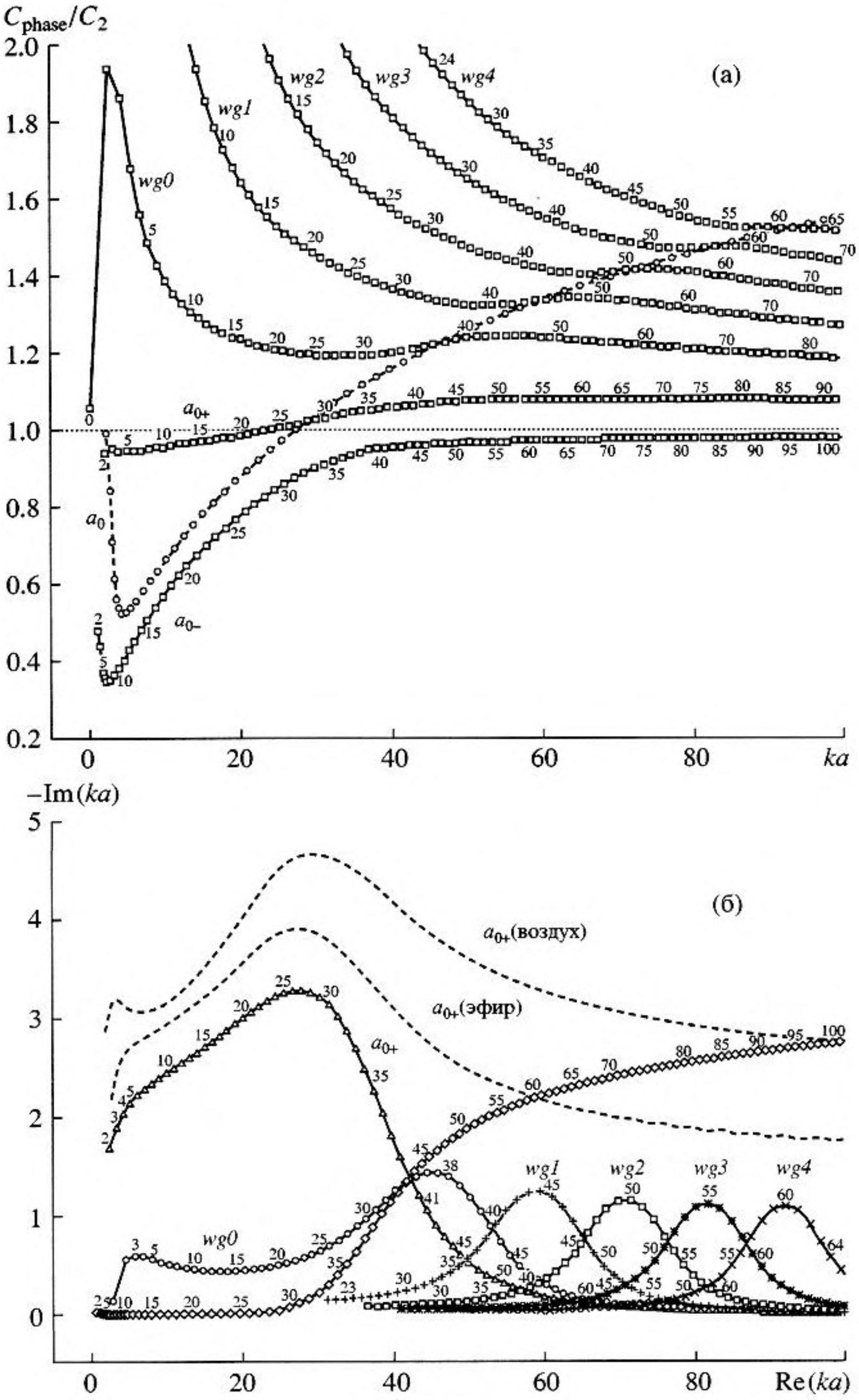

Рис. 4. Дисперсионные кривые (а) и положения полюсов (б) волн a_{0-}, a_{0+} и волн типа "шепчущих галерей", wg, для оболочки, заполненной водой. Для сравнения показаны относительная фазовая скорость волны a_0 в оболочке в вакууме и положения полюсов волны a_{0+} в оболочке, заполненной воздухом и эфиром. Полюса, принадлежащие волнам wg_1–wg_4 показаны, начиная с $ka > 30$. Цифры рядом с кривыми – номера мод.

и абсолютно мягкими границами записываются в виде $j_n'(k_1a_2) = 0$ и $j_n(k_1a_2) = 0$, соответственно.

Резонансы, связанные с данным типом волн, существенно усложняют вид форм-функции. На рисунках 2б и 2в представлены модули форм-функций для оболочки, заполненной эфиром и водой. Как видно из рис. 2в, помимо характерного подъема в диапазоне ka от 20 до 35, форм-функция имеет еще несколько подобных особенностей в областях $40 < ka < 55$, $65 < ka < 75$ и т.д. Однако форм-функции для оболочки, заполненной эфи-

Таблица 2. Безразмерные комплексные частоты полюсов, ka, определяющих симметричную волну Лэмба, s_0. Для оболочек с водой и эфиром указаны два ближайших полюса

Мода	Оболочка в вакууме	Пустая оболочка в воде	Оболочка с эфиром	Оболочка с водой
0	5.6823	4.4494–2.5016i	5.1544–1.2674i	3.9221–0.4227i
			5.2791–0.4580i	6.0701–0.8611i
1	6.9511	6.0319–1.3931i	6.0487–0.2946i	5.5152–0.2388i
			6.7402–0.8382i	7.4481–0.7111i
2	9.5726	9.2103–0.5746i	9.1039–0.2104i	7.7202–0.0167i
			9.8137–0.3553i	9.4238–0.4052i
3	12.7789	12.6373–0.2855i	12.4002–0.0669i	12.1449–0.0223i
			13.0210–0.2282i	13.3383–0.3034i
4	16.1568	16.0945–0.1567i	15.7118–0.0078i	16.0331–0.1005i
			16.2895–0.1575i	

ром, имеет совершенно отличный вид: подъем в диапазоне ka от 20 до 35 не так явно различим, как на рис. 2а и 2в, и он распространяется на больший интервал частот, примерно от $ka = 20$ до $ka = 60$.

Рассмотрим более подробно случай оболочки, заполненной водой. Для него были определены положения полюсов и построены дисперсионные кривые, представленные на рис. 4. Волна a_{0-} легко узнается, так как почти не изменяет своего вида по сравнению с волной a_{0-} в пустой оболочке. Как и следовало ожидать, из-за влияния заполнителя скорость данной волны несколько уменьшилась. Если минимальная относительная скорость волны a_0 в "сухой" оболочке равна 0.520, то в пустой оболочке, помещенной в воду, она уменьшается до 0.406, и становится равной 0.345 в оболочке с водным заполнителем.

Сверхзвуковая ветвь антисимметричной волны, a_{0+}, испытывает значительное изменение. В диапазоне частот $40 < ka < 55$ происходит взаимодействие с самой медленной из волн типа "шепчущих галерей", wg_0, после чего относительная фазовая скорость ветви a_{0+} перестает расти и выходит на уровень приблизительно 1.08. Скорость волны wg_0, распространяющейся в полости с абсолютно мягкими или абсолютно жесткими границами, как известно, монотонно уменьшается. В нашем случае вблизи области взаимодействия с a_{0+} фазовая скорость wg_0 начинает плавно расти и в диапазоне ka от 35 до 55 эта волна как бы замещает a_{0+}. Далее, когда скорость wg_0 приближается к скорости следующей из волн "шепчущих галерей", wg_1, снова происходит взаимодействие, и волна wg_0 превращается в wg_1. То же самое происходит и со следующими волнами: wg_1, wg_2 и т.д. Это интересное явление было, вероятно впервые, отмечено Векслером в [15] для случая цилиндрической оболочки.

Таким образом, антисимметричная волна Лэмба (изгибная волна), как таковая, не распространяется в оболочке с жидким заполнителем, помещенной в жидкую среду. Изгибная волна получается как результат взаимодействия между волнами типа a_{0-}, a_{0+}, wg. Легко заметить, что форм-функция имеет особенности в областях взаимодействия (обмена ветвями) между волнами различных типов.

Интересно проследить изменение траекторий полюсов, определяющих волны разных типов (рис. 4б). Сравнивая рисунки 3б и 4б, легко видеть, что траектория полюсов a_{0-} мало меняется. Напротив, полюсы волны a_{0+} начинают быстро приближаться к действительной оси при $ka > 30$. Это подтверждает предположение, что на этих частотах данная волна изменяет свой характер и становится волной wg, полюсы которой, как правило, имеют малую мнимую часть.

Полюсы волн wg_0–wg_4 плавно отдаляются от действительной оси в частотной области взаимодействия волн, затем опять приближаются к ней. Полюсы, максимально удаленные от оси, точно соответствуют пересечению дисперсионных кривых волн wg и волны a_0 (рис. 4). Для наглядности, на рисунке 4б нанесены также траектории полюсов волны a_{0+}, распространяющейся в оболочке, заполненной воздухом и эфиром. Заметно, что увеличение плотности заполнителя приводит к уменьшению ширины резонансов данной волны.

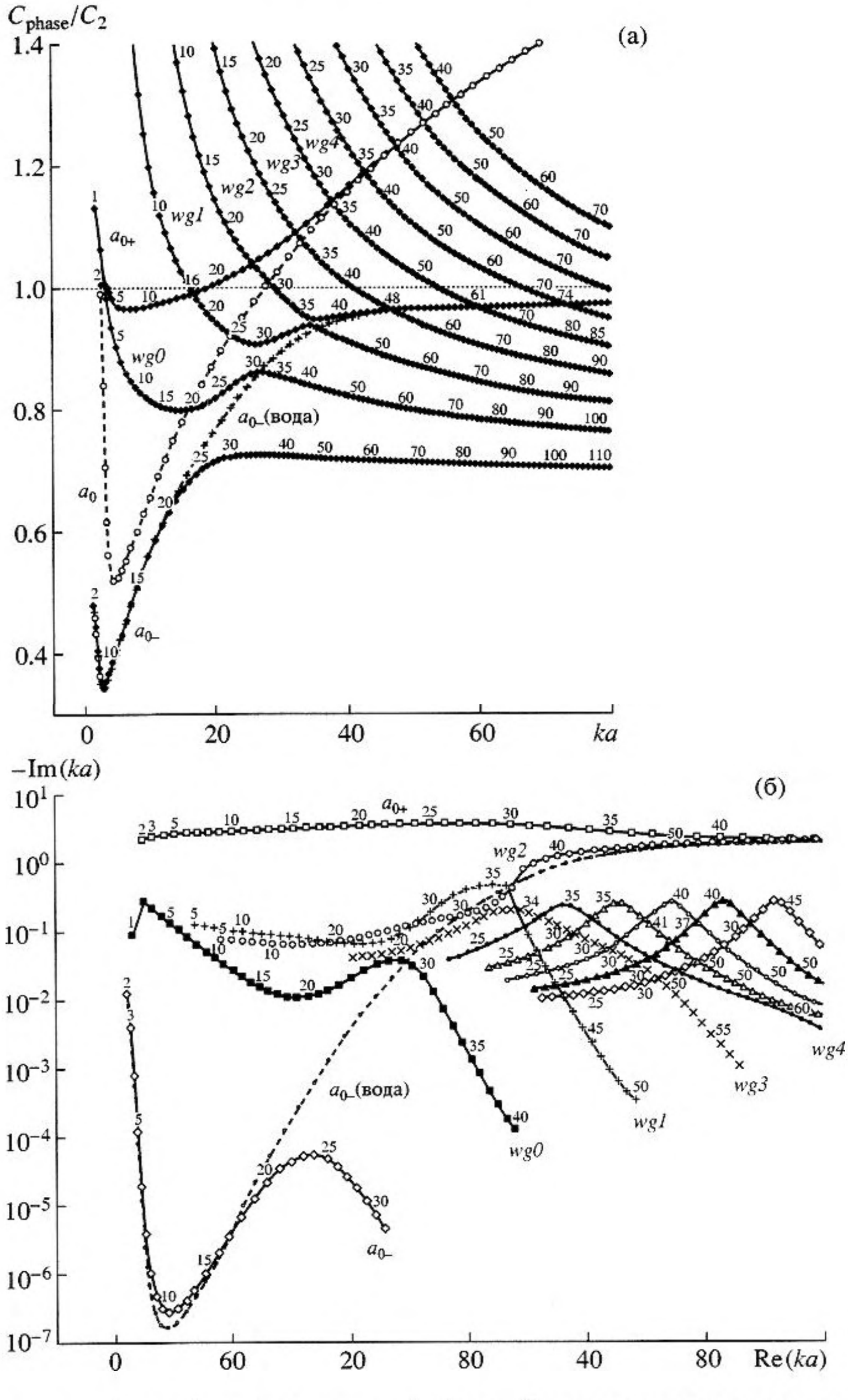

Рис. 5. То же, что и на рис. 4, для оболочки, заполненной эфиром. Для сравнения показаны относительная фазовая скорость волны a_0 в оболочке в вакууме и кривые, соответствующие волне a_{0-} в оболочке, заполненной водой.

Если оболочка заполнена жидкостью, в которой скорость звука меньше, чем во внешней среде, например эфиром, то картина усложняется. В этом случае может возникать взаимодействие волн wg как с волной a_{0+}, так и с волной a_{0-}.

Дисперсионные кривые волн, распространяющихся в оболочке, заполненной эфиром, показаны на рис. 5а. На том же рисунке показаны кривые относительной фазовой скорости волн a_0 (в оболочке в вакууме) и a_{0-} в оболочке, заполненной водой. Скорость волны a_{0-} в оболочке с эфиром и в оболочке, заполненной водой, почти одинакова на частотах $ka < 13$, далее происходит взаимодействие с волной wg_0. До частоты $ka \approx 35$

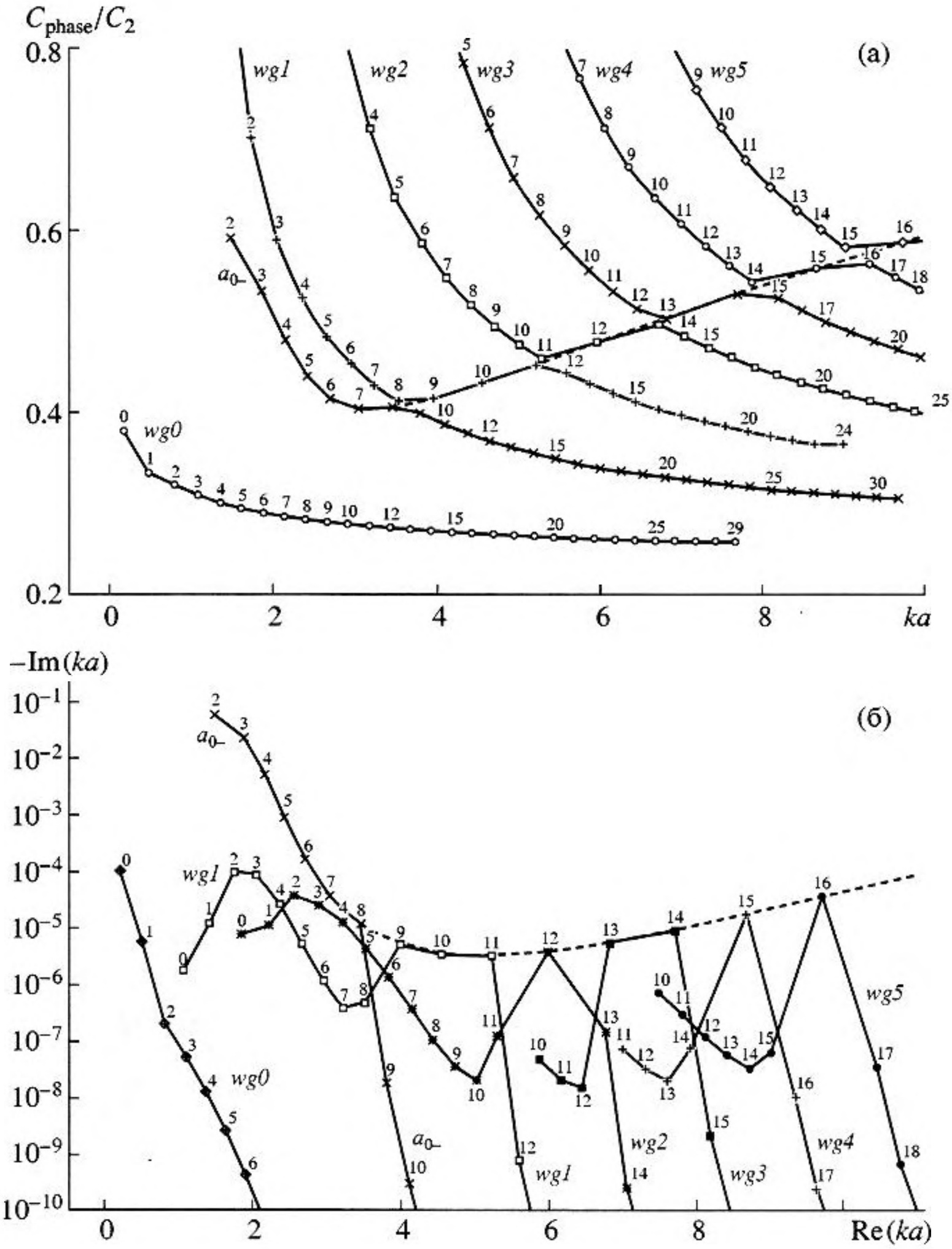

Рис. 6. Дисперсионные кривые (а) и положения полюсов (б) волн типа a_{0-} и wg для оболочки, заполненной воздухом. Пунктир соответствует волне a_{0-} в пустой оболочке.

дисперсионная кривая волны a_{0-} реализуется в виде отрезков волн wg_0 и wg_1, после чего ее характер, по-видимому, меняется. Исходя из положения полюсов, показанных на рисунке 5б, следует заключить, что, начиная с $ka \approx 35$, взаимодействие не происходит, так как траектория wg_2 начинает отдаляться от действительной оси и проходит вблизи траектории волны a_{0-}, распространяющейся в оболочке, заполненной водой.

На отсутствие взаимодействия указывает и вид дисперсионных кривых (рис. 5а). Как было показано в [15], форма дисперсионных кривых вблизи пересечения с кривой для волны a_0 определяется плотностью наполнителя. Чем легче наполнитель, тем ближе кривые волн wg прилегают к кривой a_0. Тот же вывод можно сделать, сравнивая рис. 4а и 5а. Однако форма кривых wg_3, wg_4 и т.д. практически не меняется при пересечении с кривой wg_1, что указывает на отсутствие взаимодействия.

По тем же соображениям и волна a_{0+} была выделена как отдельный тип движения (рис. 5).

В заключение приведем без подробного рассмотрения дисперсионные кривые и положения полюсов для оболочки, заполненной воздухом (рис. 6). Данным примером иллюстрируется, во-первых, зависимость формы дисперсионных кри-

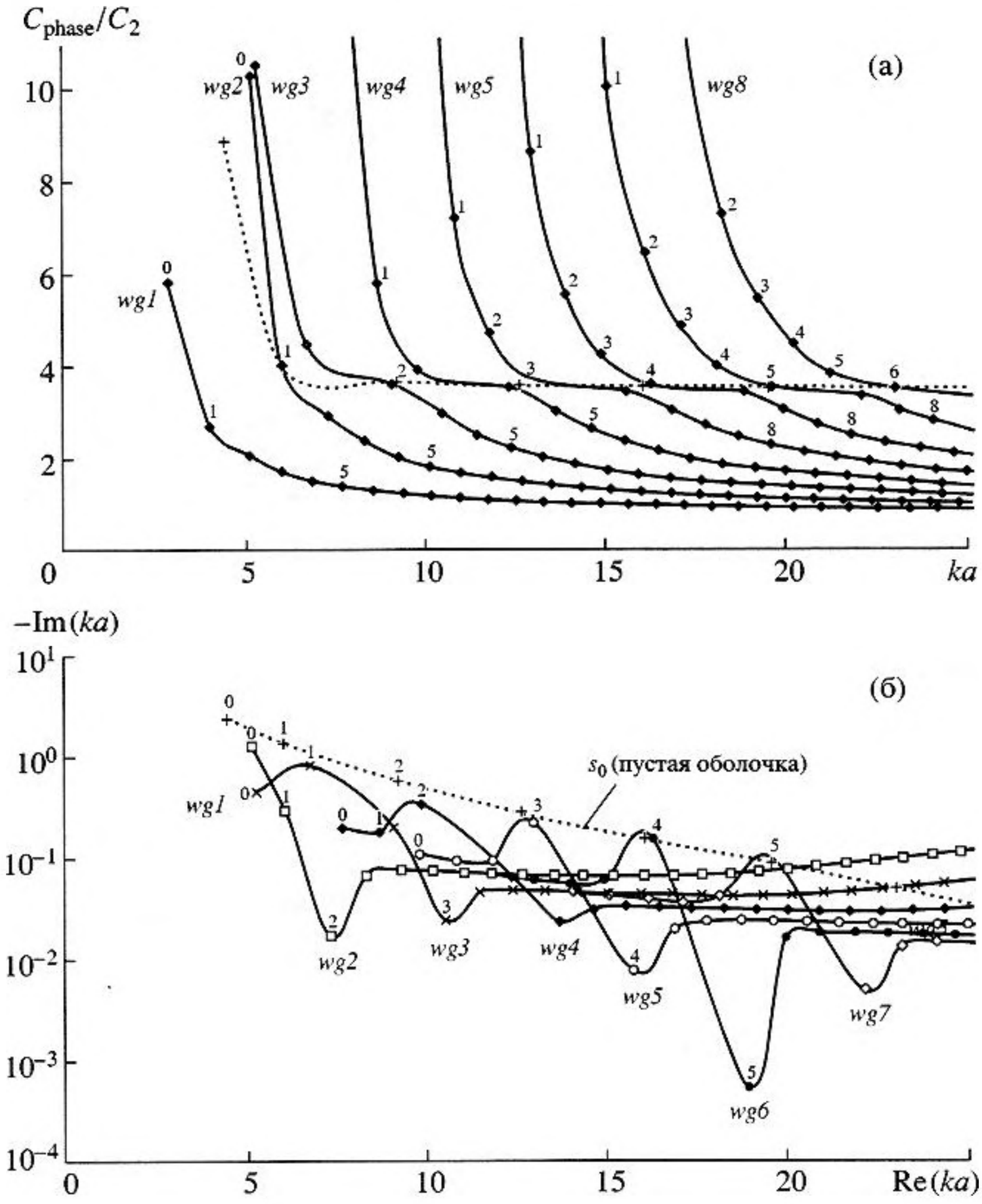

Рис. 7. Дисперсионные кривые (а) и положения полюсов (б) для оболочки, заполненной эфиром. Пунктирные кривые соответствуют симметричной волне в полой оболочке в воде.

вых от плотности заполнителя, во-вторых, предположение, что взаимодействие между волнами различных типов происходит тогда, когда траектории полюсов этих волн расположены близко друг к другу. Форм-функция для этого случая не приводится, так как мало отличается от изображенной на рис. 2а.

При идентификации полюсов, определяющих симметричную волну Лэмба, s_0, возникли некоторые сложности: иногда было трудно определить, какой из двух близкорасположенных полюсов соответствует данной волне. В таблице 2 приведены результаты вычисления нескольких первых полюсов волны s_0 для оболочки в вакууме и в воде с различными наполнителями. Так, например, для оболочки, заполненной эфиром, траектория полюсов волны s_0 может проходить как через точки 5.1544 – 1.2674i; 6.0487 – 0.2946i; 9.1039 – 0.2104i, …, так и через 5.2791 – 0.4580i; 6.7402–0.8382i и т.д. Подобные затруднения возникли и с полюсами волн типа wg.

Было сделано предположение, что волна s_0 также взаимодействует с волнами типа "шепчущих галерей" и, как таковая, в данной системе не существует, но реализуется в результате взаимодействия волн wg. На рисунках 7а и 8а показаны дисперсионные кривые для оболочек с эфиром и водой, соответственно, которые иллюстрируют сказанное. Пунктиром с крестиками показана кривая относительной фазовой скорости волны s_0 в пустой оболочке, помещенной в воду.

Если данное предположение верно, что траектории полюсов волн wg будут иметь вид, представленный на рисунках 7б и 8б. Для эфира (рис. 7б)

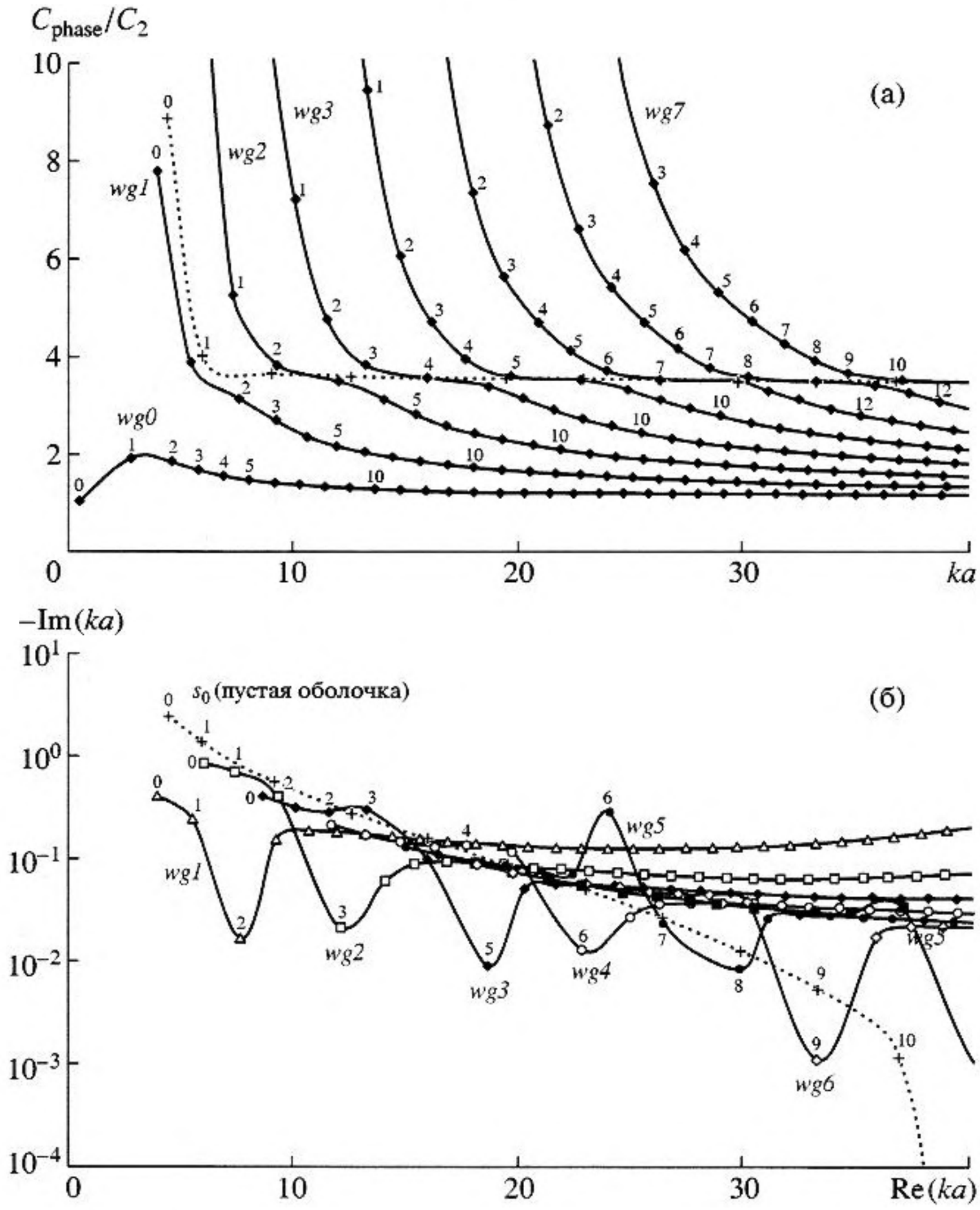

Рис. 8. То же, что и на рис. 7, для оболочки, заполненной водой.

данная картина более наглядна. Вблизи соответствующих полюсов волны s_0 в пустой оболочке траектории имеют излом. Если соединить полюсы wg_2, $n = 0$; wg_3, $n = 1$ и т.д., то получим траекторию кажущейся волны s_0, которая начиная с $n = 4$ будет практически совпадать с траекторией s_0.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были исследованы акустические волны, возникающие в упругой сферической оболочке, заполненной жидкостью. Если в оболочке в вакууме на низких частотах возможно распространение двух упругих волн Лэмба: симметричной (продольной) и антисимметричной (изгибной), то при помещении пустой оболочки в жидкость наблюдается интересное явление – расщепление антисимметричной волны на две ветви.

При заполнении оболочки газом или жидкостью в ней становится возможен еще один тип движения – волны типа "шепчущей галереи". Эти волны распространяются во внутреннем объеме оболочки. Как было показано в данной статье, в такой системе, в общем случае, ни один тип движения (волны a_0, s_0, wg) не реализуется самостоятельно, но осуществляется в результате взаимодействия различных волн. Механизм взаимодействия подобен обмену ветвями между волнами a_{0-} и a_{0+} в пустой оболочке.

Условием для такого взаимодействия является пересечение дисперсионных кривых волн, распространяющихся в уединенных системах и, по-видимому, близость ширины резонансных максимумов, соответствующих различным волнам (близость траекторий полюсов).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Элементы матрицы m_{ij}:

$$m_{11} = 0, \quad m_{12} = (2n+1)i^n h_n^{(1)'}(ka)\frac{pa}{\rho_2 c_2 \omega},$$

$$m_{13} = -\mu_{L1} j_n'(\mu_{L1}), \quad m_{14} = -\mu_{L1} n_n'(\mu_{L1}),$$

$$m_{15} = n(n+1) j_n(\mu_{T1}), \quad m_{16} = n(n+1) n_n(\mu_{T1}),$$

$$m_{21} = (2n+1)i^n j_n'(k_1 a_2)\frac{pa_2}{\rho_1 c_1 \omega}, \quad m_{22} = 0,$$

$$m_{23} = -\mu_{L2} j_n'(\mu_{L2}), \quad m_{24} = -\mu_{L2} n_n'(\mu_{L2}),$$

$$m_{25} = n(n+1) j_n(\mu_{T2}), \quad m_{26} = n(n+1) n_n(\mu_{T2}),$$

$$m_{31} = 0, \quad m_{32} = (2n+1)i^n h_n^{(1)}(ka) pa^2,$$

$$m_{33} = 2\mu\mu_{L1}^2 j_n''(\mu_{L1}) - \lambda\mu_{L1}^2 j_n(\mu_{L1}),$$

$$m_{34} = 2\mu\mu_{L1}^2 n_n''(\mu_{L1}) - \lambda\mu_{L1}^2 n_n(\mu_{L1}),$$

$$m_{35} = 2\mu n(n+1)(j_n(\mu_{T1}) - \mu_{T1} j_n'(\mu_{T1})),$$

$$m_{36} = 2\mu n(n+1)(n_n(\mu_{T1}) - \mu_{T1} n_n'(\mu_{T1})),$$

$$m_{41} = (2n+1)i^n j_n(k_1 a_2) pa_2^2, \quad m_{42} = 0,$$

$$m_{43} = 2\mu\mu_{L2}^2 j_n''(\mu_{L2}) - \lambda\mu_{L2}^2 j_n(\mu_{L2}),$$

$$m_{44} = 2\mu\mu_{L2}^2 n_n''(\mu_{L2}) - \lambda\mu_{L2}^2 n_n(\mu_{L2}),$$

$$m_{45} = 2\mu n(n+1)(j_n(\mu_{T2}) - \mu_{T2} j_n'(\mu_{T2})),$$

$$m_{46} = 2\mu n(n+1)(n_n(\mu_{T2}) - \mu_{T2} n_n'(\mu_{T2})),$$

$$m_{51} = 0, \quad m_{52} = 0, \quad m_{53} = 2\mu_{L1} j_n'(\mu_{L1}) - 2j_n(\mu_{L1}),$$

$$m_{54} = 2\mu_{L1} n_n'(\mu_{L1}) - 2n_n(\mu_{L1}),$$

$$m_{55} = -\mu_{T1}^2 j_n''(\mu_{T1}) - (n^2 + n - 2) j_n(\mu_{T1}),$$

$$m_{56} = -\mu_{T1}^2 n_n''(\mu_{T1}) - (n^2 + n - 2) n_n(\mu_{T1}),$$

$$m_{61} = 0, \quad m_{62} = 0, \quad m_{63} = 2\mu_{L2} j_n'(\mu_{L2}) - 2j_n(\mu_{L2}),$$

$$m_{64} = 2\mu_{L2} n_n'(\mu_{L2}) - 2n_n(\mu_{L2}),$$

$$m_{65} = -\mu_{T2}^2 j_n''(\mu_{T2}) - (n^2 + n - 2) j_n(\mu_{T2}),$$

$$m_{66} = -\mu_{T2}^2 n_n''(\mu_{T2}) - (n^2 + n - 2) n_n(\mu_{T2})$$

Компоненты столбца свободных членов:

$$\alpha_1 = -(2n+1)i^n j_n'(ka)\frac{pa}{\rho_2 c_2 \omega},$$

$$\alpha_3 = -(2n+1)i^n j_n(ka) pa^2.$$

Здесь $j_n(x)$ и $n_n(x)$ – сферические функции Бесселя и Неймана порядка n, штрих означает производную по x, $\mu_{L1} = \frac{\omega}{c_L} a$, $\mu_{L2} = \frac{\omega}{c_L} a_2$, $\mu_{T1} = \frac{\omega}{c_T} a$, $\mu_{T2} = \frac{\omega}{c_T} a_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Junger M.C.* Sound scattering by thin elastic shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1952. V. 24. № 4. P. 366–373.
2. *Kalnins A.* Affect of bending on vibrations of spherical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1964. V. 36. № 1. P. 74–81.
3. *Goodman R.R., Stern R.* Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1962. V. 34. № 3. P. 338–344.
4. *Murphy J.D., George J., Nagl A., Überall H.* Isolation of the resonant component in acoustic scattering from fluid-loaded elastic spherical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. V. 65. № 2. P. 368–373.
5. *Fawcett J.A.* Scattering from a partially fluid filled, elastic-shelled sphere // J. Acoust. Soc. Amer. 2001. V. 109. № 2. P. 508–513.
6. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
7. *Лямшев Л.М.* Незеркальное отражение, резонансное рассеяние и излучение звука пластинками и оболочками в воде // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 5. С. 693–716.
8. *Williams K.L., Marston P.L.* Backscattering from an elastic sphere: Sommerfeld–Watson transformation and experimental confirmation // J. Acoust. Soc. Amer. 1985. V. 78. № 3. P. 1093–1102.
9. *Williams K.L., Marston P.L.* Synthesis of backscattering from an elastic sphere using the Sommerfeld–Watson transformation and giving a Fabry–Perot analysis of resonances // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 79. № 6. P. 1702–1708.
10. *Flax L., Dragonette L.R., Überall H.* Theory of elastic resonance excitation by sound scattering // J. Acoust. Soc. Amer. 1978. V. 63. № 3. P. 723–731.
11. *Gaunaurd G.C., Werby M.F.* Sound scattering by resonantly excited, fluid-loaded, elastic spherical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1991. V. 90. № 5. P. 2536–2550.
12. *Sammelmann G.S., Trivett D.H., Hackman R.H.* The acoustic scattering by a submerged, spherical shell. I: The bifurcation of the dispersion curve for the spherical antisymmetric Lamb wave // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. V. 85. № 1. P. 114–124.
13. *Sammelmann G.S., Hackman R.H.* The acoustic scattering by a submerged, spherical shell. II: The high-frequency region and the thickness quasiresonance // J. Acoust. Soc. Amer. 1991. V. 89. № 5. P. 2096–2103.
14. *Hackman R.H., Sammelmann G.S.* The acoustic scattering by a submerged, spherical shell. III: Pole trajectories in the complex-ka plane // J. Acoust. Soc. Amer. 1991. V. 90. № 5. P. 2705–2717.
15. *Векслер Н.Д., Жан-Луи Избики, Жан-Марк Конуар.* Изгибные волны при рассеянии акустичес-

кой волны оболочкой, заполненной жидкостью // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 3. С. 321–330.

16. *Hefner B.T., Marston P.L.* Backscattering enhancements associated with subsonic Rayleigh waves on polymer spheres in water. Observation and modeling for acrylic spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 107. № 4. P. 1930–1936.
17. *Kohji Toda, Kenji Motegi.* Coupling of velocity dispersion curves of leaky Lamb waves on a fluid-loaded plate // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 107. № 2. P. 1045–1048.
18. *Padilla F., de Billy M., Quentin G.* Theoretical and experimental studies of surface waves on plane solid-fluid interface when the fluid sound velocity is located between the shear and the longitudinal ones in fluid // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 106. № 2. P. 666–673.
19. *Henry J.K., Clark R.L.* Noise transmission from a curved panel into a cylindrical enclosure: Analysis of structural acoustic coupling // J. Acoust. Soc. Amer. 2001. V. 109. № 4. P. 1456–1463.
20. *Tournour M., Atalla N.* Pseudostatic corrections for the forced vibroacoustic response of a structure-cavity system // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107. Pt. 1. № 5. P. 2379–2386.
21. *Sum K.S., Pan J.* On acoustic and structural modal cross-coupling in plate-cavity systems // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 107. № 4. P. 2021–2038.
22. *Pei-Tai Chen.* A modal-type analysis of the interactions for submerged elastic structures with the surrounding heavy acoustic medium // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105. № 1. P. 106–121.
23. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Часть 2. М.: Наука, 1974. 672 с.
24. *Talmant M., Überall H., Miller R.D., Werby M.F., Dickey J.W.* Lamb waves and fluidborne waves on water-loaded, air-filled thin spherical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. V. 86. № 1. P. 278–289.
25. *Бреховских Л.М.* Волны с слоистых средах. М.: Наука, 1973. 290 с.

Acoustic Waves Propagating in a Fluid-Filled Spherical Shell Placed in a Liquid

R. A. Kosobrodov

All-Russia Research Institute of Physico-Technical and Radio-Engineering Measurements, p/o Mendeleevo, Solnechnogorskii raion, Moscow oblast, 141570 Russia

e-mail: myagkov@ntmdt.ru

Abstract—Acoustic waves arising in a fluid-filled elastic spherical shell placed in a liquid are considered. It is demonstrated that, in a general case, none of the four types of waves possible in such a system (subsonic and supersonic antisymmetric Lamb waves, symmetric Lamb waves, and whispering galleries) is realized separately, but an interaction between the waves of different types takes place.