АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2002, том 48, № 3, с. 428–429

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.26

ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКА РЕШЕТКОЙ РЕЗОНАТОРОВ С ДИССИПАЦИЕЙ

А. Д. Лапин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева
117036 Москва, ул. Шверника 4
Тел.: (095)126-9004; Факс: (095)126-8411
E-mail: ras@akin.ru

Поступила в редакцию 18.04.2001 г.

Эффективным средством поглощения звука является резонансная звукопоглощающая конструкция, представляющая собой жесткую стенку, к которой на малом расстоянии друг от друга присоединены одинаковые резонаторы с диссипацией [1–3]. Такую стенку можно охарактеризовать эффективным импедансом. На резонансной частоте этот импеданс является вещественной величиной, определяемой диссипативными потерями в резонаторах. Пусть на стенку под углом θ к ее нормали падает плоская звуковая волна. При вещественном эффективном импедансе, равном $\rho c/\cos\theta$, где ρc – волновое сопротивление среды (воздуха), эта волна полностью поглощается стенкой с резонаторами. Представляет интерес рассмотреть общую задачу о поглощении плоской звуковой волны решеткой резонаторов с любым (не малым) пространственным периодом и выяснить условия, при которых эта решетка является эффективным поглотителем звука.

Пусть жесткая стенка совпадает с плоскостью $z = 0$, резонаторы расположены в точках с координатами $x = qL$, $y = sl$, где L и l – соответственно периоды решетки по осям x и y, q и s – любые целые числа. Все резонаторы одинаковые и их размеры малы по сравнению с длиной звуковой волны, площадь поперечного сечения горла резонатора равна S_0. Каждый резонатор характеризуется импедансом Z_0, равным отношению полной внешней силы, действующей на этот резонатор, к его объемной скорости. Из полупространства $z > 0$ на решетку падает плоская гармоническая звуковая волна с давлением

$$p^{(0)} = A\exp[i(k_x^0x + k_y^0y - k_z^{00}z)], \qquad (1)$$

где k_x^0, k_y^0 и $(-k_z^{00})$ – соответственно проекции волнового вектора падающей волны на оси x, y и z, A – амплитуда волны. Над жесткой стенкой без резонаторов полное поле $P^{(0)}$ равно сумме падающей и отраженной волн

$$P^{(0)} = 2A\exp[i(k_x^0x + k_y^0y)]\cos(k_z^{00}z).$$

Над жесткой стенкой с резонаторами полное поле P ищем в виде $P = P^{(0)} + p^{(1)}$, где $p^{(1)}$ – рассеянное поле.

Обозначим через V объемную скорость резонатора, находящегося в начале координат ($x = y = 0$). Объемная скорость резонатора, находящегося в точке с координатами ($x = qL$, $y = sl$), будет $V\exp(i(k_x^0qL + k_y^0sl))$. Рассеянное поле $p^{(1)}$ равно полю, создаваемому решеткой монополей. Оно удовлетворяет уравнению Гельмгольца в среде ($z > 0$) и следующему граничному условию при $z = 0$:

$$\frac{dp^{(1)}}{dz} = i\omega\rho V\exp[i(k_x^0x + k_y^0y)]\times \sum_{q,s}\delta(x - qL)\delta(y - sl), \qquad (2)$$

где ω – частота звука, $k = \omega/c$ – волновое число, ρ и c – соответственно плотность среды и скорость звука в ней, $\delta(x)$ – дельта-функция. Рассеянное поле получим методом Фурье, оно имеет вид

$$p^{(1)} = \sum_{m,n}\frac{k\rho cV}{Llk_z^{mn}}\exp[i(k_x^mx + k_y^ny + k_z^{mn}z)], \qquad (3)$$

где

$$k_x^m = k_x^0 + m\frac{2\pi}{L}, \quad k_y^n = k_y^0 + n\frac{2\pi}{l},$$

$$k_z^{mn} = \sqrt{k^2 - (k_x^m)^2 - (k_y^n)^2},$$

суммирование производится по всем целым m и n. Согласно формуле (3), рассеянное поле $p^{(1)}$ состоит из однородных и неоднородных брэгговских спектров (плоских волн). Спектр (m, n) является однородной волной при $(k_x^m)^2 + (k_y^n)^2 \le k^2$ и неоднородной волной при $(k_x^m)^2 + (k_y^n)^2 > k^2$.

Объемную скорость V получим из импедансных условий на рассеивателях. Структура рассеянного поля определяется периодом рассеивающей решетки. Поле ($P^{(0)} + p^{(1)}$), умноженное на $\exp[-i(k_x^0 x + k_y^0 y)]$, является периодической функцией по x с периодом L и периодической функцией по y с периодом l. По этой причине достаточно удовлетворить граничному условию на резонаторе, располженном в начале координат. Полная внешняя сила, действующая на этот резонатор, равна

$$-\int_{S_0}[P^{(0)} + p^{(1)}]_{z=0}dS,$$

где интегрирование производится по сечению горла резонатора. На резонаторе выполняется соотношение

$$Z_0 V = -\int_{S_0}[P^{(0)} + p^{(1)}]_{z=0}dS.$$

Преобразуем его к виду

$$(Z_0 + Z)V = -\int_{S_0} P_{z=0}^{(0)}dS, \qquad (4)$$

где $Z = \frac{1}{V}\int_{S_0} p_{z=0}^{(1)}dS$ – импеданс излучения монополя. При учете формулы (3) получим следующее выражение для импеданса излучения:

$$Z = \sum_{m,n}\frac{k\rho c}{Llk_z^{mn}}\int_{S_0}\exp[i(k_x^m x + k_y^n y)]dxdy.$$

Вещественная часть этого импеданса называется сопротивлением излучения и она равна

$$R \equiv \operatorname{Re} Z \approx \sum_{m,n}{}' \frac{k\rho c S_0}{Llk_z^{mn}}, \qquad (5)$$

где штрих над суммой означает, что суммирование производится по всем m и n, при которых k_z^{mn} – вещественное.

В соотношении (4) правая часть равна приближенно $-2AS_0$. Из этого соотношения найдем объемную скорость монополя

$$V = \frac{-2AS_0}{[(R_0 + R) + i(X_0 + X)]}, \qquad (6)$$

где $X \equiv \operatorname{Im} Z$, R_0 и X_0 – соответственно вещественная и мнимая части импеданса Z_0. Подставляя V в формулу (3), получим рассеянное поле $p^{(1)}$. Согласно формулам (3) и (6), интенсивное рассеяние происходит только при взаимной компенсации реактивных компонент импедансов Z_0 и Z, т.е. при выполнении соотношения

$$X_0 + X = 0. \qquad (7)$$

Из этого соотношения определяются частоты резонансного рассеяния. На резонансной частоте амплитуда рассеянного однородного спектра (m, n) равна

$$A_{mn}^{(1)} = \frac{k\rho c V}{Llk_z^{mn}} = -\frac{2S_0 Ak\rho c}{Llk_z^{mn}(R_0 + R)},$$

где величина R определяется по формуле (5).

Пусть пространственные периоды решетки не превышают половину длины звуковой волны. Тогда все рассеянные спектры, кроме спектра (0,0), неоднородные и величина R равна $\frac{k\rho c S_0}{Llk_z^{00}}$. Амплитуда однородного спектра (0,0) будет $A_{00}^{(1)} = -\frac{2A}{1 + (R_0/R)}$. Складывая однородную отраженную волну с нулевым однородным рассеянным спектром, получим убегающую однородную плоскую волну с амплитудой, равной

$$A + A_{00}^{(1)} = A\left[1 - \frac{2}{1 + (R_0/R)}\right].$$

При $R_0 = R = \frac{k\rho c S_0}{Llk_z^{00}}$ амплитуда ($A + A_{00}^{(1)}$) обращается в нуль. Это означает, что решетка резонаторов с диссипацией полностью поглощает падающую волну (1).

Отметим, что при равенстве сопротивлений трения и излучения одиночного резонатора в свободной безграничной среде его сечение поглощения достигает максимума и равно его сечению рассеяния [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. Изд-во Московского университета, 1960.
2. *Malcolm J. Crocker*. Editor-in-Chief. Acoustics Handbook. John wiley & Sons, Inc., New York, 1997.
3. *Cavanaugh W.J., Wilkes J.A.* Architectural Acoustics: Principles and Partice. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
4. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.