АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2002, том 48, № 6, с. 854–855

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

УДК 532.517

УЧЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ И ВИХРЕВОЙ КОМПОНЕНТ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПРИ АНАЛИЗЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ

© 2002 г. С. А. Рыбак

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника, 4
E-mail: rybak@akin.ru

Взаимодействие вихревой и потенциальной компонент поля скоростей, порождаемое граничными условиями на жесткой стенке, рассмотрено нами в работах [1, 2, 3]. Ниже проанализирована роль взаимодействия (сцепления) указанных компонент поля в самой жидкости (а не только на границе), вызванного сдвиговым течением, что приводит к возникновению гидродинамической неустойчивости в сдвиговом потоке даже при отсутствии точки перегиба его профиля.

Систему гидродинамических уравнений для плоской модели (x, y) x-координата вдоль потока $U(y)$, y – по нормали к потоку, запишем в квадратичном по вектору скорости $v_i(t, x, y)$ приближении:

$$\frac{\partial}{\partial t}v_i + \left[(v_k + U\delta_{kx})\frac{\partial}{\partial x_i}(v_i + U\delta_{ix})\right] =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta\Delta v_i + \left(\varsigma + \frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k};$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + U\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) = 0; \qquad (1)$$

$$\delta\rho = \delta p/c^2 - \frac{\gamma - 1}{2\rho_0 c^4}\delta p^2; \quad v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y};$$

$$v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

В линеаризованном пределе получим систему уравнений:

$$D\Delta\phi - U_{yy}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \Delta\varphi U_y + U_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \eta\Delta^2\phi;$$

$$D\Delta\varphi + \frac{1}{\rho_0}\Delta p = \left(\varsigma + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta^2\varphi - 2U_y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial x}\right); \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\rho c^2}Dp + \Delta\varphi = 0; \quad D = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}.$$

Первое уравнение системы (2) – это модифицированное уравнение Орра–Зоммерфельда [4]. Именно, в нем учтена связь вихревой компоненты поля скоростей с потенциальной компонентой, возникающая благодаря наличию сдвигового течения $U(y)$. Второе и третье уравнение в совокупности эквиваленты, по-существу, уравнению Лайтхилла [5] с линеаризованной на фоне сдвигового течения правой частью и написаны нами с учетом неоднородного по оси Y доплеровского сдвига частоты.

Условия возникновения неустойчивости в такой системе не определяются необходимостью наличия точки перегиба в профиле $U(y)$, как это диктуется теоремой Рэлея (см. например, [4, 6]) при учете лишь вихревой компоненты поля. Покажем, что неустойчивость возникает даже в простейшем случае линейной зависимости $U(y)$, где точка перегиба отсутствует:

$$U(y) = U_0(1 + \varepsilon qy). \qquad (3)$$

Здесь q – проекция волнового вектора гармонической волны в направлении Y, предположено, что

$$\varepsilon = \frac{1}{qL} \ll 1, \quad L^{-1} \propto \frac{U_y}{U}. \qquad (4)$$

Для анализа неустойчивости необходимо учесть сжимаемость среды, то есть конечную скорость распространения потенциальной (звуковой) волны, сцепленной с вихревой компонентой согласно уравнениям (2). Возникновение этой волны может иметь, например, шумовую природу (тепловые шумы).

Это весьма важно, разумеется, для объяснения причин возникновения гидродинамической неустойчивости в различных ситуациях, в частности в пограничном слое, где наличие точки перегиба в профиле $U(y)$ далеко не всегда очевидно.

Система уравнений (2) приобретает с учетом (3) вид (вязкостью мы пренебрегаем):

$$D\Delta\phi + \Delta\varphi U_y = 0;$$
$$D\Delta\varphi + \frac{1}{\rho_0}\Delta p = -2U_y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial x}\right); \tag{5}$$
$$\frac{1}{\rho_0 c^2}Dp + \Delta\varphi = 0.$$

В соответствии с соотношениями (3)–(4)

$$U_y = \varepsilon q U_0. \tag{6}$$

Систему уравнений (5) будем решать в первом порядке по ε, то есть, полагая U и U_y константами. В этом случае:

$$\varphi = c_1\exp[j(-\omega t + kx + qy)],$$
$$\phi = c_2\exp[j(-\omega t + kx + qy)]. \tag{7}$$

Положим

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1. \tag{8}$$

Подставив (7) в систему уравнений (5), получим дисперсионное уравнение:

$$(\omega - Uk)^2 - (k^2 + q^2)c^2 = \\ = \frac{-2j(\omega - Uk)U_y kq + 2k^2U_y^2}{k^2 + q^2}. \tag{9}$$

с учетом (3), (4) и (8) находим:

$$\omega_0 = U_0 k + c(k^2 + q^2)^{1/2},$$
$$\omega_1 = j\frac{U_0 kq^2}{k^2 + q^2}, \quad j\delta\omega = \varepsilon\omega_1 = j\frac{U_0 kq}{L(k^2 + q^2)}. \tag{10}$$

При этом, воспользовавшись неравенством (4), мы пренебрегли последним членом в числителе правой части (9).

Следовательно, даже в простейшем случае линейной зависимости сдвиговой скорости (3), при учете взаимодействия потенциальной и вихревой компонент волнового поля, возникает волновая неустойчивость. Существенно, что сжимаемость среды необходимо учитывать, в противном случае в соотношении (9) появляется расходимость.

Рассмотрим теперь развитие неустойчивости в области $y > 0$ при условии:

$$v_y = 0 \text{ на плоскости } y = 0, \tag{11}$$

(жесткая стенка). Сдвиговое течение удовлетворяет соотношению:

$$U = U_0\frac{y}{L}, \quad 0 < y. \tag{12}$$

Выбор приближенного решения в форме (7) при условии (11) приводит к равенству нулю совокупной компоненты колебательной скорости v_y:

$$v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \text{ при всех } y > 0. \tag{13}$$

Из соотношений (5), (7) и (13) следует:

$$q = -j\frac{kU_y}{S}, \quad S = \omega - Uk. \tag{14}$$

Следует подчеркнуть, что для того чтобы волна (ϕ, φ) затухала в направлении $y > 0$, нужно чтобы выполнялось условие $\mathrm{Im}\,q > 0$. Последнее условие реализуется, в частности, для волны с $k < 0$.

Дисперсионное уравнение (9) можно теперь привести к виду:

$$S^4 - c^2k^2(S^2 - U_y^2) = 0. \tag{15}$$

Биквадратное уравнение (15) имеет, в частности, решение:

$$S = \omega - Uk = \frac{ck}{\sqrt{2}}\left(1 + j\frac{\varepsilon}{2}\right),$$
$$\varepsilon = \left(\frac{4U'^2}{c^2k^2} - 1\right)^{1/2}, \tag{16}$$

при условии $\varepsilon \ll 1$.

Неустойчивость возникает в рассматриваемой модели при условии

$$M^2 = \frac{U^2}{c^2} > \frac{k^2L^2}{4}. \tag{17}$$

Разумеется, изучение дальнейшего развития процесса неустойчивости требует анализа нелинейной системы уравнений (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-02-17143) и Программы поддержки научных школ (грант № 00-15-96678), а также INTAS 99-98.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1–2. *Наугольных К.А., Рыбак С.А.* Об излучении звука турбулентным пограничным слоем // Тр. Акуст. ин-та. 1971. Вып. 16. С. 129–135. Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 6. С. 890–894.
3. *Рыбак С.А.* Связь касательных напряжений на жесткой стенке с пульсациями давления, генерируемыми в турбулентном пограничном слое // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 5. С. 717–719.
4. *Линь Цзя-Цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 194 с.
5. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях, М.: Мир, 1981. 595 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц М.* Гидродинамика. Гл. 4. М.: Наука, 1986.