АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, том 49, № 4, с. 565–566

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.26

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ГОФРИРОВАННОЙ ТРУБКЕ

А. Д. Лапин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника, 4
E-mail: mironov@akin.ru

Поступила в редакцию 12.02.2002 г.

При распространении воздуха через трубку с гофрированной стенкой генерируется тональный или мультитональный звук [1–3]. Для понимания физики процесса возбуждения звука необходимо оценить влияние параметров гофра (периодических неровностей) на скорость распространения звука в трубке. Предположим, что гофрированную стенку можно охарактеризовать эффективной акустической податливостью Y, $\operatorname{Im} Y < 0$. Тогда скорость звука в трубке с радиусом R получим по известной формуле [4]:

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{2\rho c}{kR}|Y|}},$$

где ρ и c – плотность среды и скорость звука в ней, k – волновое число. Например, в трубке с малыми близко расположенными друг от друга прямоугольными осесимметричными канавками имеем

$$Y = -\frac{i}{\rho c}\frac{ka}{2}\frac{b}{L},$$

где a и b – соответственно глубина и ширина канавки, L – пространственный период гофра, и скорость звука будет равна

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{a}{R}\frac{b}{L}}} \approx c\left[1 - \frac{a}{2R}\frac{b}{L}\right]. \qquad (1)$$

Она убывает с ростом глубины канавок по линейному закону.

В общем случае не удается определить эффективную податливость гофрированной поверхности простыми физическими методами и поэтому расчет замедления волны приходится производить на основе общей теории распространения волн в периодических структурах [5, 6]. Ниже этот расчет выполнен для трубки с малыми синусоидальными неровностями.

Пусть стенки трубки жесткие и пусть в цилиндрической системе координат они заданы уравнением $r = R + a\cos(qz + qz + \varepsilon)$, где $kR < 1$, $ka \ll 1$, $qa \ll 1$, $2\pi/q$ – период неровностей. Звуковое давление p удовлетворяет уравнению Гельмгольца в заполняющей среде и следующему граничному условию на стенках

$$\frac{dp}{dr} - \frac{dp}{dz}\frac{du}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad r = R + u(z),$$

где $u(z) = a\cos(qz + \varepsilon)$. Это точное граничное условие можно снести на цилиндрическую поверхность $r = R$ и тогда в первом приближении по $k|u|$ и $\left|\frac{du}{dz}\right|$ мы получим соотношение

$$\left[\frac{dp}{dr}\right]_{r=R} + \left[\frac{d^2p}{dr^2}\right]_{r=R} u(z) - \left[\frac{dp}{dz}\right]_{r=R}\frac{du}{dz} = 0. \qquad (2)$$

Нулевая мода в трубке без неровностей имеет вид $p = \exp(ikz)$. Нулевую моду в трубке с малыми синусоидальными неровностями ищем в виде

$$p(r, z) = F(r, z)\exp[i(k + \alpha)z],$$

где $|\alpha| \ll k$, $F(r, z)$ – периодическая функция по z с периодом $2\pi/q$. Представляя эту функцию в виде ряда Фурье и удовлетворяя уравнению Гельмгольца, получим выражение

$$p(r, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n I_0(\varsigma_n r)\exp(i\xi_n z), \qquad (3)$$

где

$$\xi_n = (k + \alpha + nq), \quad (\varsigma_n = \sqrt{(k + \alpha + nq)^2 - k^2}),$$

$I_0(X) \equiv J_0(iX)$ – цилиндрическая функция Бесселя мнимого аргумента.

Удовлетворим граничному условию на стенках трубы. С этой целью подставим формулу (3) в соотношение (2) и приравняем коэффициенты при гармониках $\exp(i\xi_n z)$ нулю. Тогда получим систему однородных алгебраических уравнений для амплитуд A_n. Приравнивая определитель этой системы нулю, получим дисперсионное уравнение для коэффициента α. При учете в формуле (3) лишь трех слагаемых ($n = 0, 1, -1$) получим определитель третьего порядка и дисперсионное уравнение примет вид $|d_{ij}| = 0$, где

$$d_{11} = \varsigma_0 I_0'(\varsigma_0 R),$$

$$d_{12} = [I_0''(\varsigma_1 R)\varsigma_1^2 - q\xi_1 I_0(\varsigma_1 R)]u_{-1},$$

$$d_{13} = [\varsigma_{-1}^2 I_0''(\varsigma_{-1} R) + q\xi_{-1} I_0(\varsigma_{-1} R)]u_1,$$

$$d_{21} = [\varsigma_0^2 I_0''(\varsigma_0 R) + q\xi_0 I_0 R)]u_1,$$

$$d_{22} = \varsigma_1 I_0(\varsigma_1 R), \quad d_{23} = d_{32} = 0,$$

$$d_{31} = [\varsigma_0^2 I_0''(\varsigma_0 R) - q\xi_0 I_0(\varsigma_0 R)]u_{-1},$$

$$d_{33} = \varsigma_{-1} I_0''(\varsigma_{-1} R), \quad u_1 = \frac{a}{2}\exp(i\varepsilon),$$

$$u_{-1} = \frac{a}{2}\exp(-i\varepsilon),$$

штрих означает дифференцирование по аргументу, i – номер строки, j – номер столбца. Это дисперсионное уравнение имеет решение

$$\alpha \approx \frac{a^2}{4kR}\left\{\frac{(-qk)}{\varsigma_{-1}}\left[\varsigma_{-1}^2 + \frac{q\xi_{-1}}{1 - \dfrac{1}{(\xi_{-1}R)}\dfrac{I_1(\varsigma_{-1}R)}{I_0(\varsigma_{-1}R)}}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{(qk)}{\varsigma_1}\left[(\varsigma_1^2 - q\xi_1) - \frac{\varsigma_1^2}{(\varsigma_1 R)}\frac{I_1(\varsigma_1 R)}{I_0(\varsigma_1 R)}\right]\right\}_{\alpha = 0}. \tag{4}$$

Скорость звука в гофрированной трубке равна

$$\gamma = \frac{\omega}{(k+\alpha)} \approx c(1 - \alpha/k).$$

При $\varsigma_{\pm 1} R \gg 1$ из формулы (4) получим выражение

$$\alpha \approx \frac{k(qa)^2}{4R}\left[\frac{1}{\varsigma_{-1}^0} + \frac{1}{\varsigma_{+1}^0}\right], \quad \varsigma_{\pm 1}^0 = \sqrt{(k \pm q)^2 - k^2}.$$

При $q \gg k$ имеем $\varsigma_{+1}^0 \approx \varsigma_{-1}^0 \approx k$ и поэтому $\alpha \approx \dfrac{kqa^2}{2R}$.

Скорость звука в гофрированной трубке равна

$$\gamma \approx c\left[1 - \frac{a}{2R}(qa)\right]. \tag{5}$$

Она убывает с ростом амплитуды неровностей по квадратичному закону. Различие амплитудных зависимостей в формулах (1) и (5) обусловлено различием наклонов гофра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petrie A.M., Huntley I.D.* The acoustic output produced by a steady airflow through a corrugated duct // Journal of Sound and Vibration. 1980. V. 70. № 1. P. 1–9.
2. *Nakamura Y., Fukamachi N.* Sound generation in corrugated tubes // Fluid Dynamics Research. 1991. № 7. P. 255–261.
3. *Cadwell L.H.* Singing corrugated pipes revisited // American Journal of Physics. 1994. V. 62. № 3. P. 224–227.
4. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
5. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М.: Издательство иностранной литературы, 1959.
6. *Элаши Ш.* Волны в активных и пассивных периодических структурах. Обзор. ТИИЭР. 1976. Т. 64. № 12. С. 22–59.