

УДК 534.26

## О ВИНТОВЫХ ВОЛНАХ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

© 2004 г. В. В. Тютюкин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН

117036 Москва, ул. Шверника 4

E-mail: Tyutekin@akin.ru@

Поступила в редакцию 15.07.2003 г.

Рассматриваются свойства винтовых волн упругой цилиндрической оболочки, описываемой системой уравнений Кирхгофа–Лява. Задача сведена к распространению плоских волн в эквивалентной пластине. На основании полученного дисперсионного уравнения и результатов его решения сделан вывод об анизотропности свойств оболочки. Построены дисперсионные кривые для различных углов распространения винтовых волн относительно оси оболочки. Рассчитаны продольные и поперечные смещения оболочки относительно направления распространения волн.

Задачи о распространении волн в цилиндрических оболочках, в том числе, погруженных в акустическую среду, до сих пор являются актуальными как с точки зрения теории, так и для практических применений [1–7]. Одними из наиболее используемых при решении такого рода задач являются уравнения для упругой цилиндрической оболочки, соответствующие гипотезе Кирхгофа–Лява [8]:

$$LU = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{U} = (u, v, w)^T$  – вектор смещения оболочки,  $L$  – матричный дифференциальный оператор, имеющий вид:

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1 + \sigma}{2a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k_p^2;$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1 + \sigma}{2a} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta}; \quad L_{13} = -L_{31} = -\frac{\sigma}{a} \frac{\partial}{\partial z};$$

$$L_{22} = \frac{1 - \sigma}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k_p^2; \quad L_{23} = -L_{32} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$L_{33} = -\left(\frac{h^2}{12} \Delta^2 + \frac{1}{a^2} - k_p^2\right).$$

Здесь  $z$  и  $\theta$  – цилиндрические координаты,  $u$  и  $v$  – смещения по осям  $z$  и  $\theta$ ,  $w$  – смещение, перпендикулярное к поверхности оболочки,  $a$  – ее радиус,

$h$  – толщина. Кроме того,  $k_p^2 = \frac{\rho \omega^2 (1 - \sigma^2)}{E}$  – ква-

драт волнового числа продольных волн в пластине,  $\rho$  – плотность,  $E$  – модуль Юнга,  $\sigma$  – коэффи-

циент Пуассона,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ .

При решении задач о распространении волн вдоль оси оболочки, описываемой уравнением (1), обычно рассматривают решения, периодические по углу  $\theta$ . В этом случае они имеют зависимость от  $\theta$  в виде  $\cos n\theta$  или  $\sin n\theta$ , где  $n = 0, 1, \dots$ , что соответствует по  $\theta$  стоячей волне. Эту волну можно представить в виде двух бегущих волн  $e^{in\theta}$  и  $e^{-in\theta}$  (с соответствующими коэффициентами), и поэтому все решение, представимое в виде  $e^{i(k_z z \pm n\theta)}$ , является суммой двух волн винтового вида, где  $n$  – целое ( $k_z$  – проекция волнового числа на ось  $z$ ).

В настоящей работе рассматриваются свойства винтовых волн упругой цилиндрической оболочки при произвольном параметре  $v$ . В этом случае решение можно представить в виде:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 e^{i(k_z z \pm v\theta)}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{U}_0 = (u_0, v_0, w_0)^T$  – вектор амплитуд смещений. Формула (2) в общем случае соответствует непериодическим решениям, характерным для незакрепленных оболочек или оболочек с продольным закреплением (в том числе, с продольным разрезом). Такие решения могут предполагать, что в общем случае угол  $\theta$  изменяется в пределах  $-\infty < \theta < \infty$ , т.е. эти решения рассматриваются на многолистной поверхности Римана.

Уравнение (1) позволяет заменить бесконечную в двух измерениях цилиндрическую оболочку плоской бесконечной пластиной. Это можно осуществить путем очевидной замены  $v\theta = k_y y$ , где  $y = a\theta$  – декартова координата (ось  $y$  перпендикулярна оси  $z$ ),  $k_y = \frac{v}{a}$  – проекция волнового числа  $k$  на ось  $y$ . При таком рассмотрении винтовые вол-

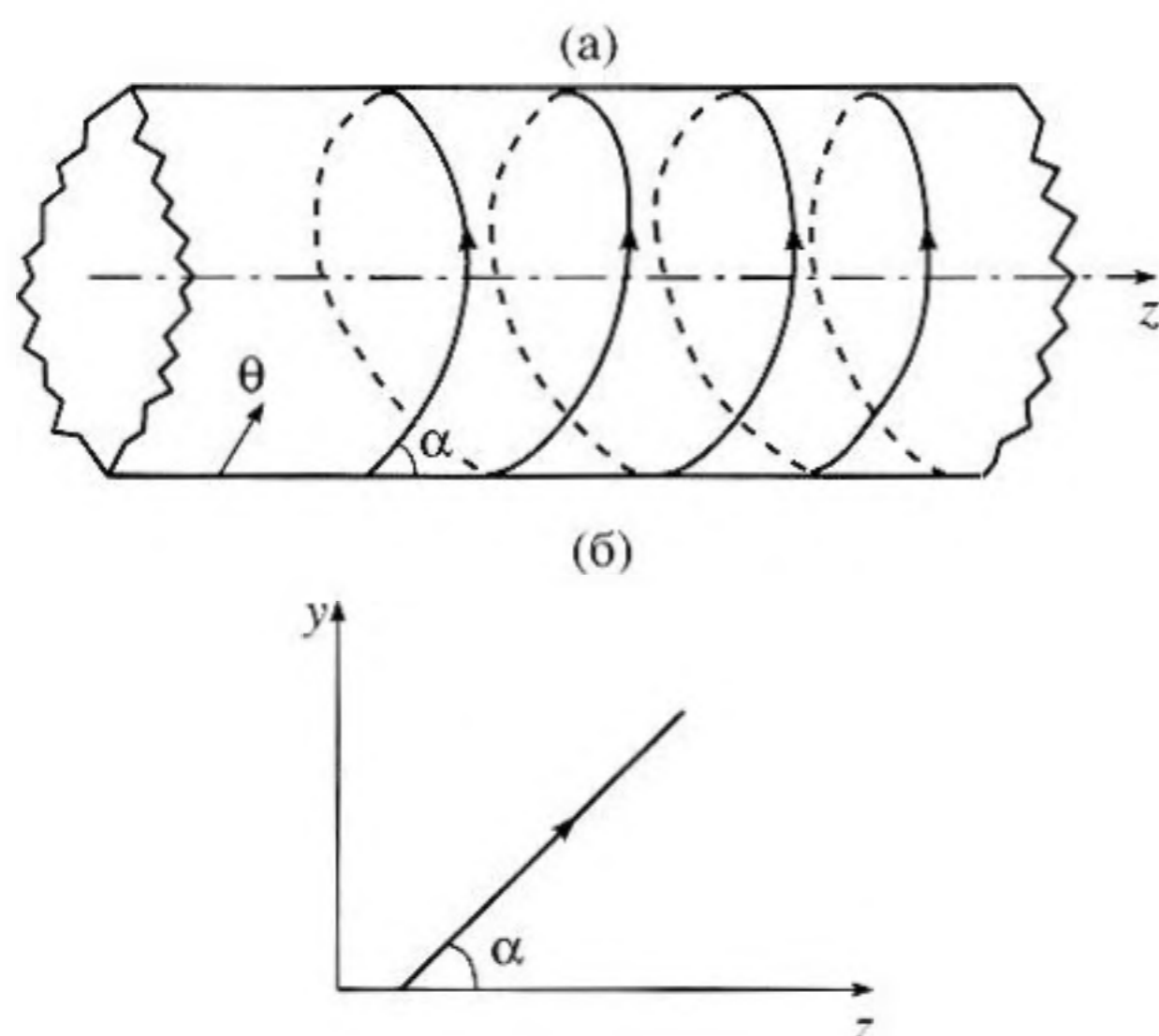


Рис. 1. а) Винтовая волна при  $-\infty < \theta < \infty$ .  
б) Эквивалентная плоская волна в пластине.

ны (2) (рис. 1а) заменяются плоскими волнами (рис. 1б) вида:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 e^{i(k_z z \pm k_y y)}. \quad (3)$$

Существенным параметром задачи в этом случае является угол  $\alpha$  между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью  $z$ . Очевидно, что  $k^2 = k_y^2 + k_z^2$ ,  $k_z = k \cos \alpha$ ,  $k_y = k \sin \alpha$ . При этом для винтовой волны

$$\sin \alpha = \frac{v}{ka}. \quad (4)$$

Отметим, что для периодических решений уравнения (1) существует дискретный набор углов  $\alpha_n$ , для которых

$$\sin \alpha_n = \frac{n}{ka}. \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) следует, что при  $v > ka$  угол  $\alpha$  становится мнимой величиной, а винтовая волна — неоднородной по углу  $\theta$ ; в случае  $n > ka$  периодических действительных решений не существует.

Величина  $k$  является волновым числом свободных волн пластины. Например, для однородной упругой среды свободными волнами являются продольная и две поперечные волны. Для однородной упругой пластины таких волн четыре: продольная, сдвиговая, а также однородная и неоднородная изгибные волны.

Для получения дисперсионного уравнения относительно величины  $k$  подставим решение (3) в уравнение (1), а затем введем в него величины  $k$  и  $\alpha$ , используя указанные выше замены. В результате получим следующее матричное уравнение

$$A(k, \alpha) \mathbf{U}_0 = 0. \quad (6)$$

Здесь  $A(k, \alpha)$  — матрица  $3 \times 3$ , имеющая составляющие:

$$A_{11} = (1 - c \sin^2 \alpha) X^2 - 1;$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{c}{2} \sin 2\alpha X^2;$$

$$A_{13} = -A_{31} = i\sigma \cos \alpha \frac{X}{Y};$$

$$A_{22} = (1 - c \cos^2 \alpha) X^2 - 1;$$

$$A_{23} = -A_{32} = i \sin \alpha \frac{X}{Y}; \quad A_{33} = \frac{(HY)^2}{12} X^4 + \frac{1}{Y^2} - 1.$$

С целью безразмерного представления уравнения (6) здесь введены следующие обозначения:

$$X = \frac{k}{k_p}; \quad Y = k_p a; \quad H = \frac{h}{a}; \quad c = \frac{1 + \sigma}{2}.$$

Дисперсионное уравнение можно представить в виде

$$\Delta = \det A(k, \alpha) = 0. \quad (7)$$

Прежде чем перейти к результатам решения уравнения (7), сделаем несколько замечаний.

Это уравнение определяет значения волновых чисел свободных волн бесконечной пластины, обладающей рядом специфических свойств. Так, величина угла  $\alpha$  является произвольным параметром, который характеризует анизотропию свойств пластины, возникшую из-за искривления оболочки в одной плоскости. Далее, все три смещения пластины связаны друг с другом, в то время как для обычной пластины поперечные смещения ( $w$ ), характеризующие ее изгибные колебания, не зависят от продольно-сдвиговых смещений ( $u, v$ ), происходящих в ее плоскости. Решения уравнения (7) должны существенно зависеть от параметра  $Y$  и при  $Y \rightarrow \infty$  рассматриваемая пластина переходит в обычную изотропную пластину ( $k$  не зависит от угла  $\alpha$ ), а смещение  $w$  не зависит от  $u$  и  $v$ . (О свободных волнах для этого случая говорилось выше.)

Решения уравнения (7) были получены при следующих значениях параметров:  $\sigma = 0.28$ ,  $H_1 = 0.1$  и  $H_2 = 0.05$ . Находились значения безразмерных волновых чисел  $X$  для свободных волн оболочки в зависимости от частотного параметра  $Y$  при некоторых дискретных значениях угла  $\alpha$ . Результаты расчетов представлены на рис. 2–5.

На рис. 2а приведены частотные характеристики для угла  $\alpha = 0$  (волны распространяются вдоль оси  $z$ ). Это хорошо известный случай осесимметричных волн с  $n = 0$ .

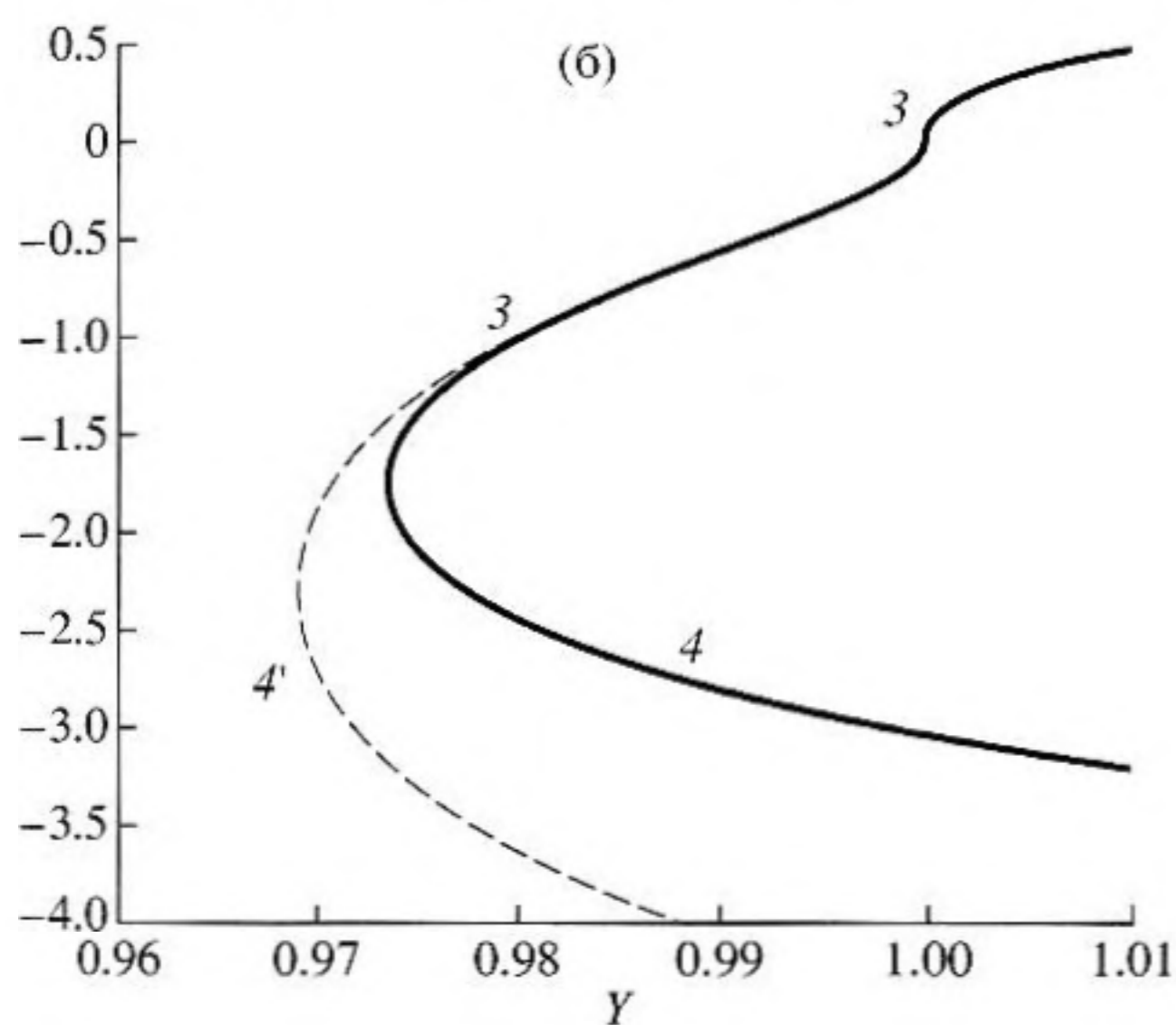
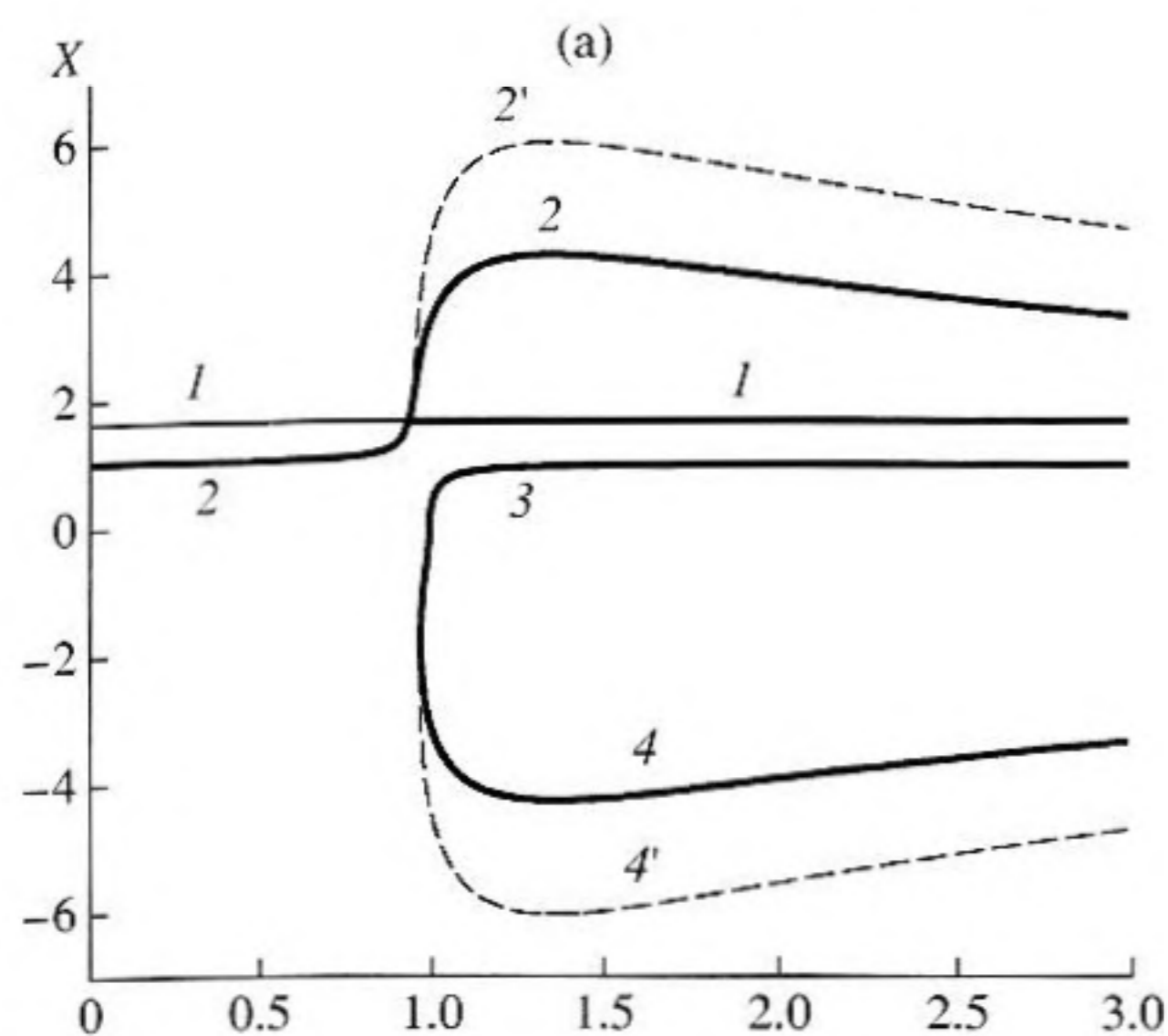


Рис. 2. а) Дисперсионные кривые для цилиндрической оболочки с параметрами  $\sigma = 0.28$ ,  $--- H = 0.05$ ,  $— H = 0.1$ . Угол  $\alpha = 0^\circ$ . Значения  $X < 0$  соответствуют мнимым ветвям.

б) То же, что на рис. 2а, но отдельно для мнимых ветвей. Обозначения те же.

Видно, что в пределе при  $Y \rightarrow 0$  существуют две волны с действительными значениями волновых чисел: сдвиговая, имеющая  $X_1 = \frac{k_t}{k_p} = \sqrt{\frac{2}{1-\sigma}} = 1.667$ , и так называемая стержневая (юнговская) продольная волна с  $X_2 = \frac{k_{ю}}{k_p} = \sqrt{\frac{1}{1-\sigma^2}} = 1.042$ . Так как эти две волны существуют независимо друг от друга, то их ветви могут пересекаться. Поскольку уравнение (7) относительно  $X$  является алгебраическим уравнением 8-й степени, то в этом диапазоне имеются еще 4 корня, от-

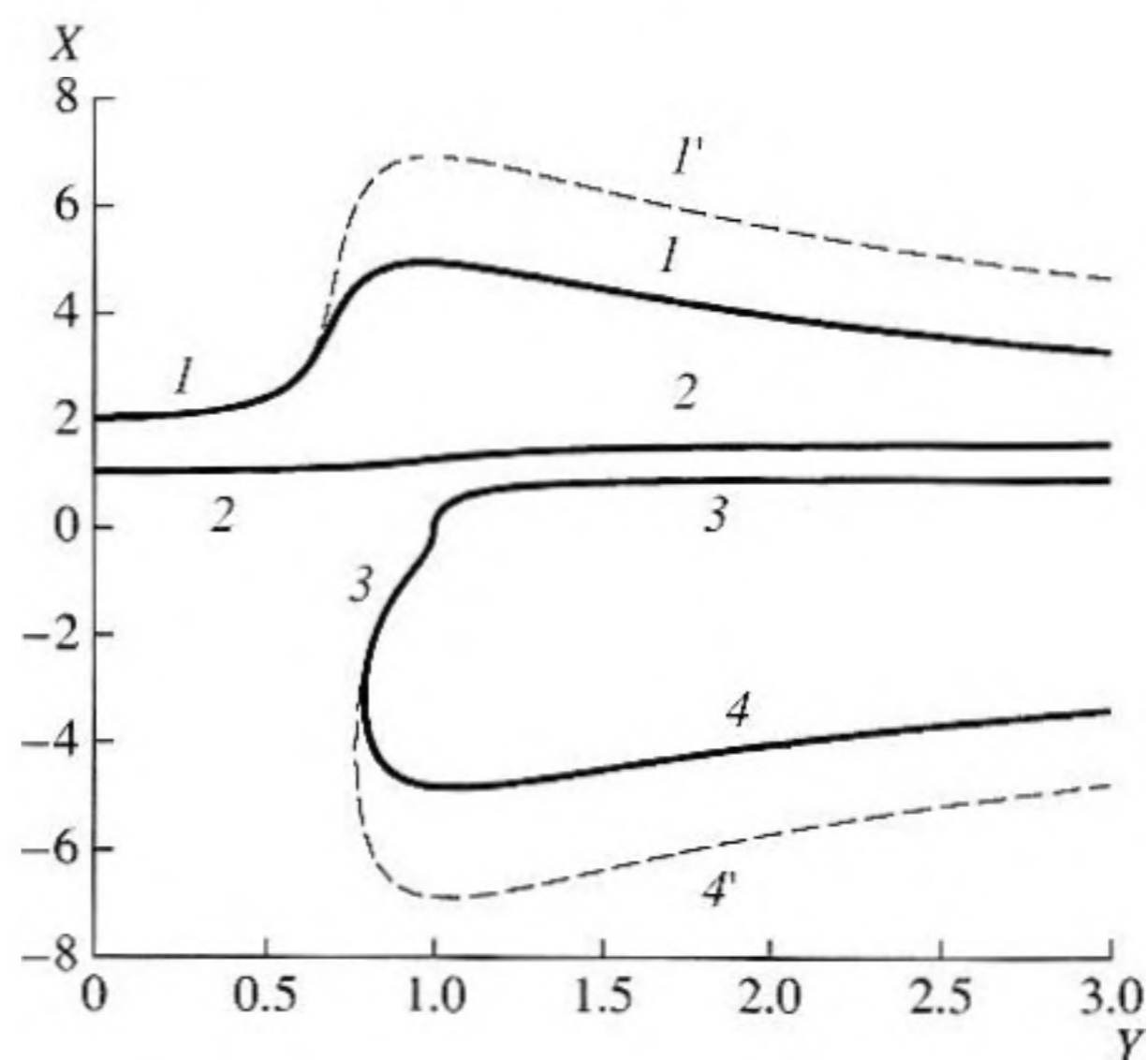


Рис. 3. То же, что на рис. 2а. Угол  $\alpha = 30^\circ$ .

носящихся к волнам изгибного типа и имеющих вид  $X = \pm x \pm y$ , где  $x$  и  $y$  – действительные числа, которые здесь интереса не представляют.

При значении  $Y = 1$  (случай так называемого кольцевого резонанса) зарождается продольная оболочечная волна  $X_3$ , которая при  $Y \rightarrow \infty$  превращается в продольную пластинчатую волну. Одновременно появляются две волны изгибного типа: волна 2 с действительным значением  $X_2$  (в которую переходит стержневая продольная волна) и волна 4 с мнимым волновым числом  $X_4$ . (На всех рисунках мнимые значения волновых чисел отнесены к нижней полуплоскости  $X$ .) На рисунке нанесены пунктиром также волновые числа  $X'_2$  и  $X'_4$ , соответствующие значению  $H = H_2$ . Видно, что ветви  $X_2$  и  $X'_2$ , а также  $X_4$  и  $X'_4$  при  $Y > 1$  раздваиваются, что говорит об их изгибном характере. Действительные ветви  $X_1$  и  $X_2$  при  $Y < 1$ , а также  $X_1$  и  $X_3$  при  $Y > 1$  совпадают для обоих значений  $H$ , т.к. они практически не зависят от этого параметра.

На рис. 2б представлены ветви 3, 4 и 4'. Видно, что две последние ветви соединяются при значении  $Y_0 \approx 0.98$ , что позволяет отнести мнимую ветвь при  $Y_0 < Y < 1$  к продольному типу волн.

Таким образом, при  $Y > 1$  имеются 4 свободные волны (волны обратного направления мы не рассматриваем), что соответствует степени уравнения (7).

Последующие рисунки иллюстрируют взаимную трансформацию волновых чисел свободных волн при изменении величины угла  $\alpha$ .

На рис. 3 представлены аналогичные данные для  $\alpha = 30^\circ$ . Из рис. 3 видно, что происходит транс-

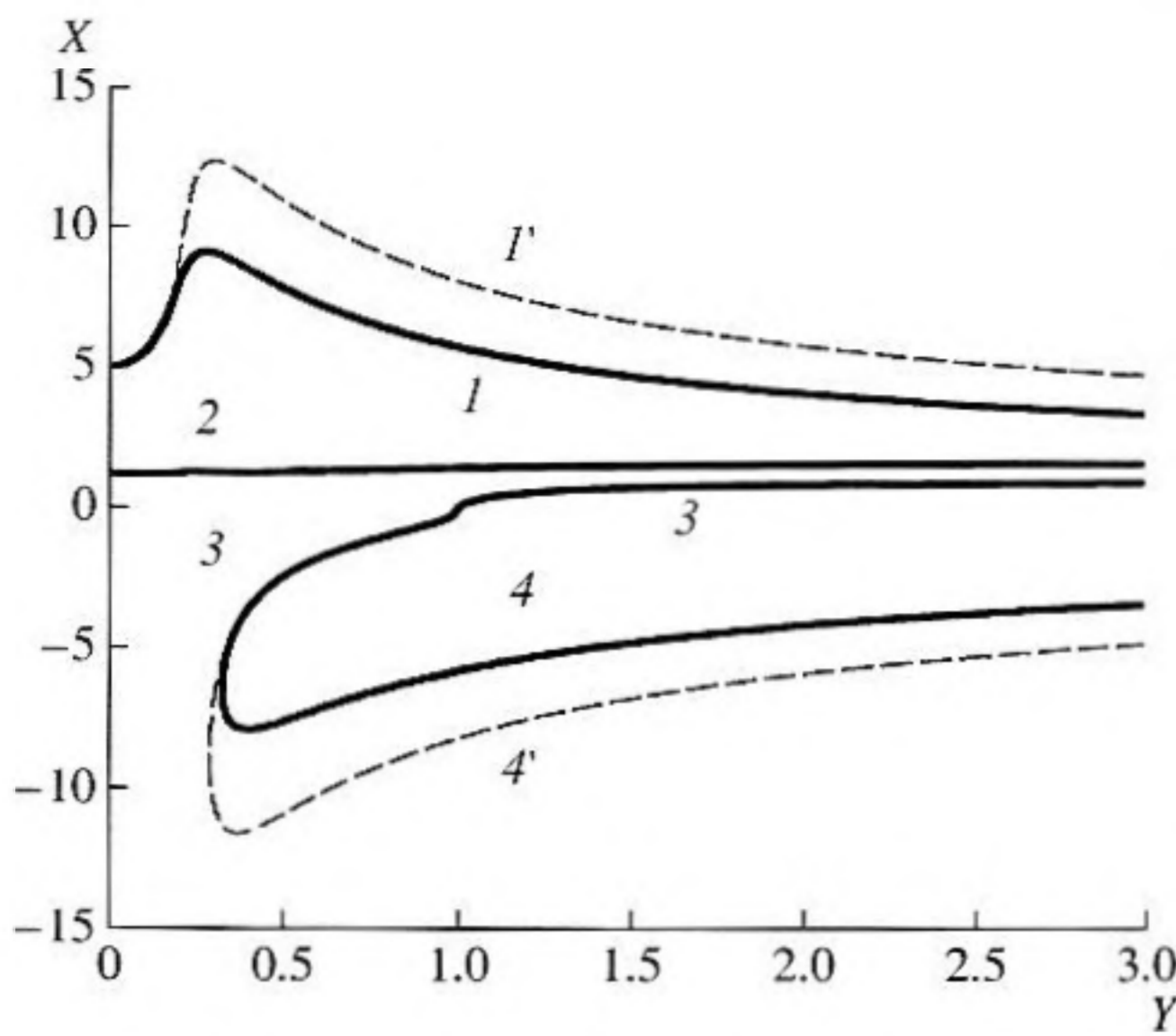


Рис. 4. То же, что на рис. 2а. Угол  $\alpha = 60^\circ$ .

формация перехода ветвей из одних волн в другие по сравнению со случаем  $\alpha = 0^\circ$ . Так, при  $Y \approx 1$  "юнговская" ветвь  $X_2$  переходит в сдвиговую  $X_1$ , а последняя – в действительную изгибную  $X_1$ . Такая трансформация проявляется при всех углах  $\alpha > 0$ . Кроме этого изменяются сами значения волновых чисел (фазовых скоростей) свободных волн. При дальнейшем увеличении угла  $\alpha$  (для рис. 4  $\alpha = 60^\circ$ ) качественно картина не меняется.

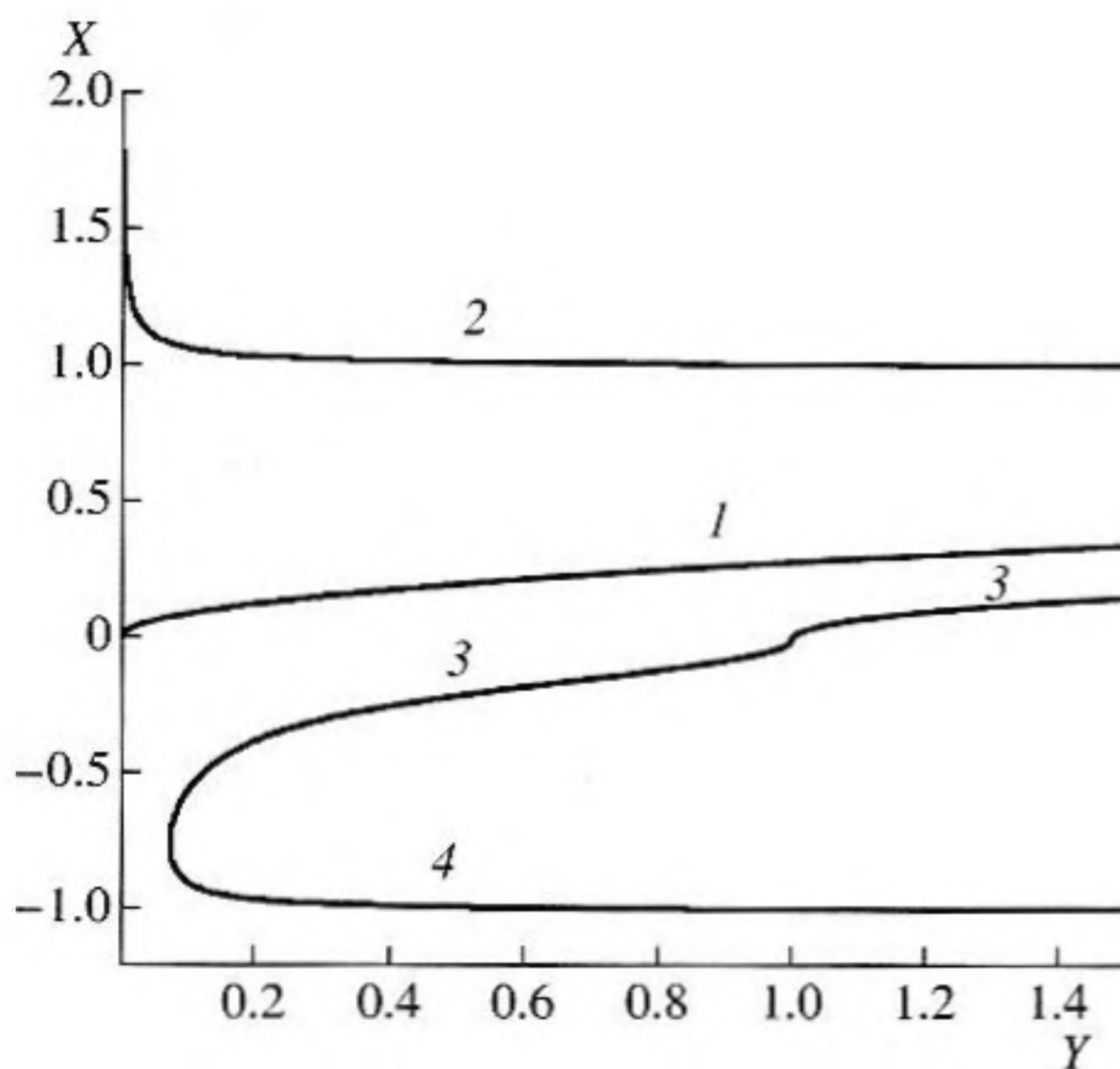


Рис. 5. То же, что на рис. 2а. Угол  $\alpha = 90^\circ$ . Величина  $\hat{X} = X \frac{k_p}{k_u}$ .

На рис. 5 представлен предельный случай  $\alpha = 90^\circ$  (волна распространяется по окружности). Здесь величина  $X = \frac{k}{k_p}$  заменена на  $\hat{X} = \frac{k}{k_u}$ , где  $k_u$  – волновое число изгибных волн в плоской пластине. Между этими величинами существует очевидная связь

$$\hat{X} = X \sqrt{\frac{YH}{\sqrt{12}}}$$

Из рис. 5 видно, что при  $Y \approx 0$  величина  $\hat{X}_2 \approx 2.8$ , т.е. скорость распространения изгибной волны по изогнутой пластине в этой области частот меньше скорости для плоской пластины. Кроме этой волны существуют чисто сдвиговая волна  $\hat{X}_1$  и две мнимые волны  $\hat{X}_3$  и  $\hat{X}_4$  (те же, что и на рис. 3 и 4), но возникающие при частоте  $Y = 0.075$ . При этом уже для  $Y \approx 0.5$  и действительная, и мнимая ветви волн изгибного типа мало отличаются от изгибных волн плоской пластины.

Важной характеристикой винтовых волн является степень анизотропии волновых свойств эквивалентной пластины. С этой целью представим решения уравнения (7) в другом виде. На рис. 6 по оси абсцисс отложена величина  $X_z = \frac{k_z}{k_p}$ , а по оси ординат  $X_y = \frac{k_y}{k_p}$  для отдельных значений безраз-

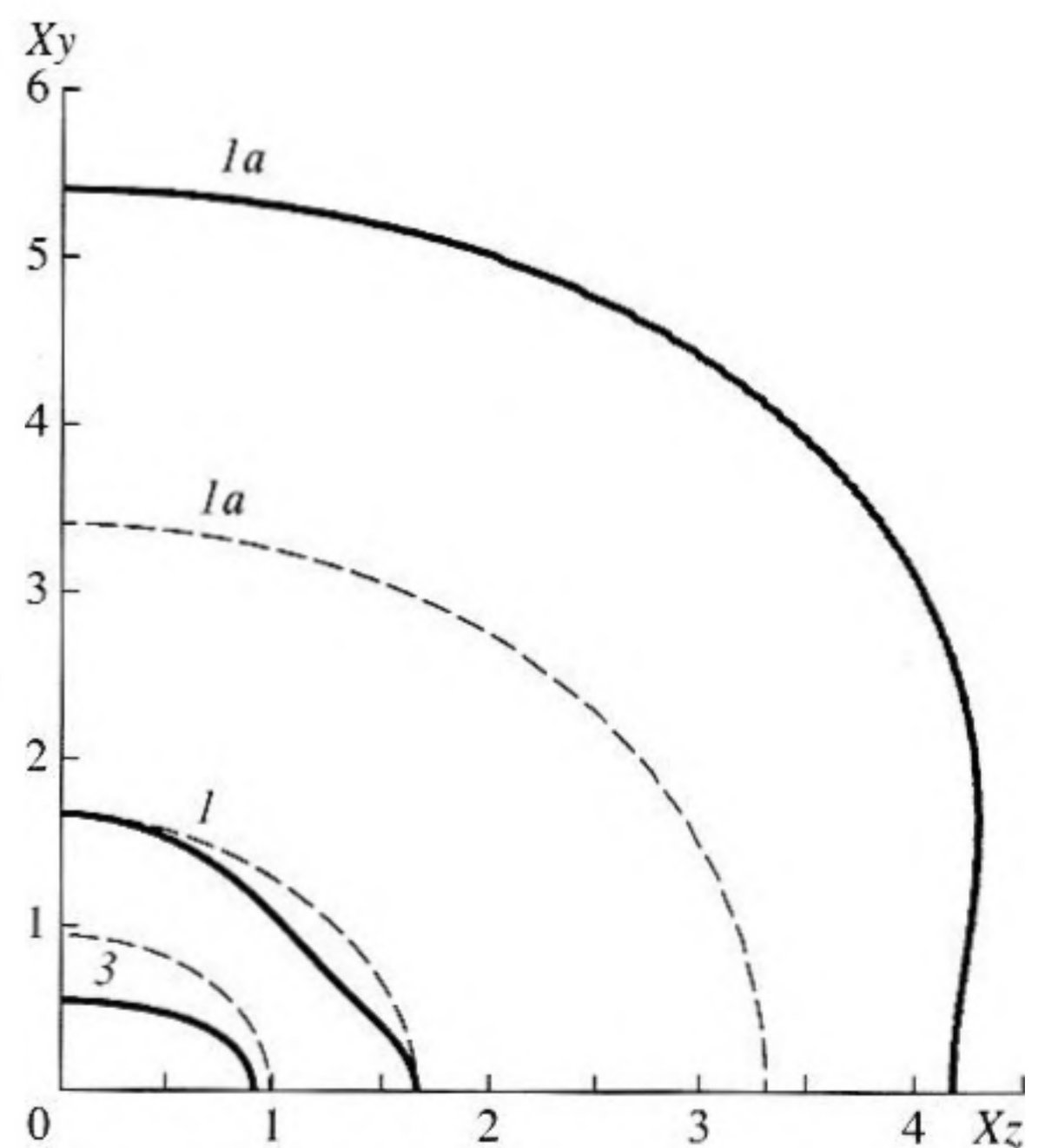


Рис. 6. Иллюстрация анизотропных свойств оболочки.  $H = 0.1$ ; —  $Y = 1.2$ ; ---  $Y = 3$ .

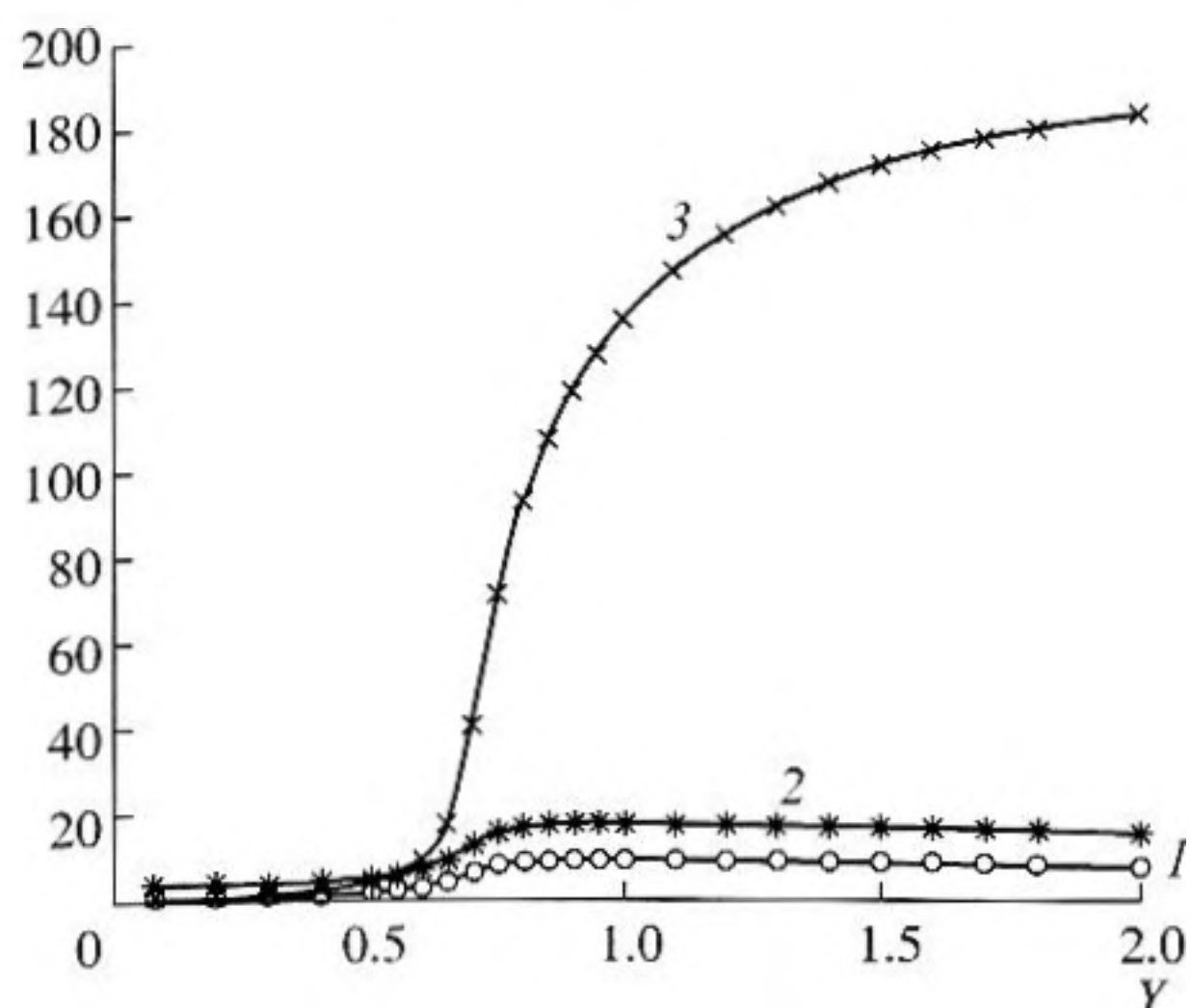


Рис. 7. Амплитуды смещений в винтовой волне для ветви  $X = X_1$  при  $\alpha = 30^\circ$  и  $H = 0.05$ .

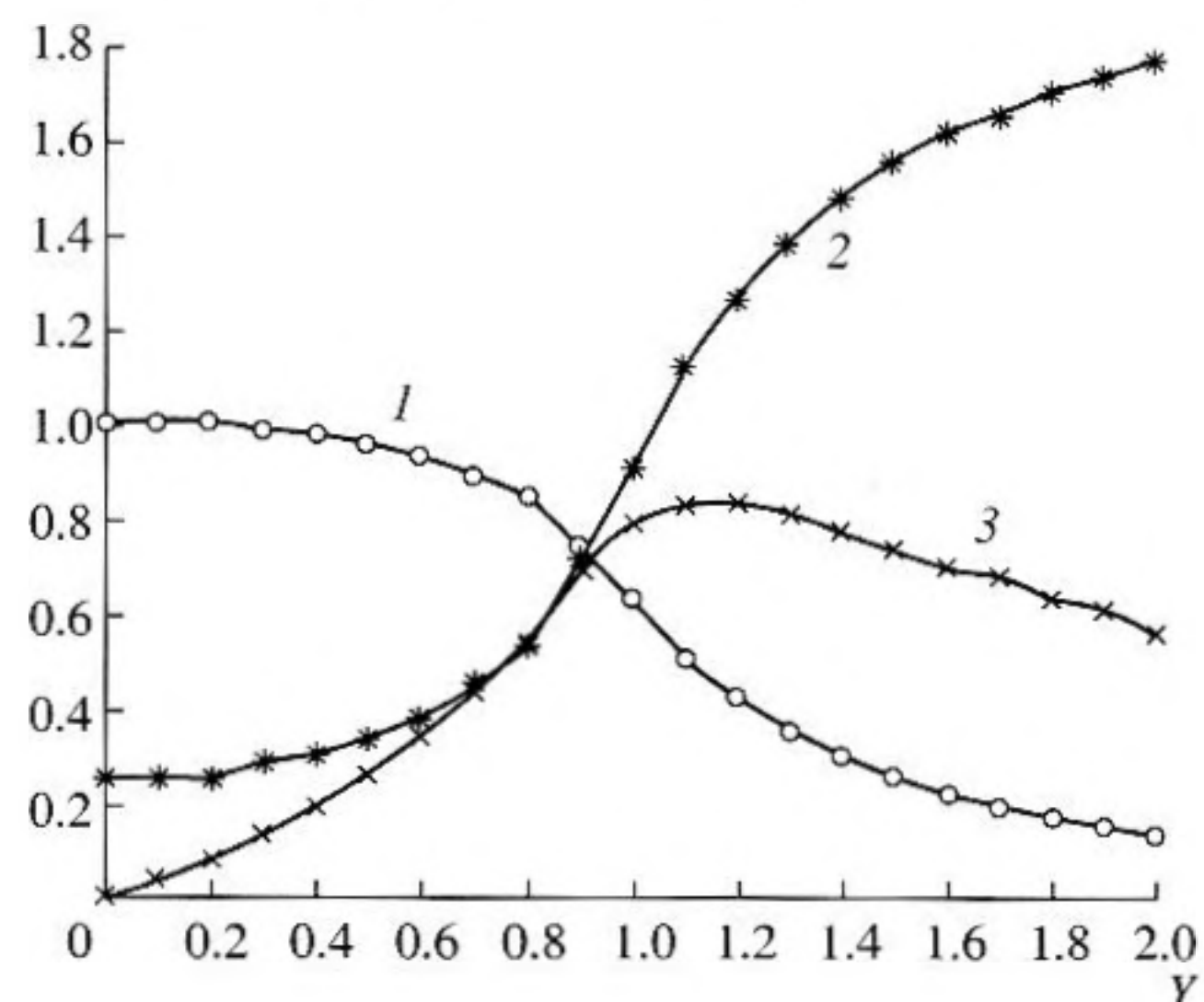


Рис. 8. То же, что на рис. 7, но для ветви  $X = X_2$ .

мерной частоты  $Y$ , указанных на рисунках. На изображенных кривых, соответствующих различным дисперсионным ветвям, указаны те же номера, что и на рис. 2–5 (за исключением действительных изгибных ветвей, обозначенных символом 1a.) Такое представление результатов дает дополнительную информацию о свойствах волн — длина радиус-вектора, проведенного из начала координат к какой-либо кривой, соответствует значению  $X$ , а угол между радиус-вектором и осью  $X_2$  равен  $\alpha$ . Из рисунков хорошо видно, как изменяется  $X$  при непрерывном изменении  $\alpha$ .

Для изотропных сред волновые числа свободных волн не зависят от угла их распространения (относительно какой-либо оси), и поэтому для таких сред кривые, аналогичные приведенным, являются частью окружности. В нашем случае эти кривые по форме могут существенно отличаться от последней, и чем больше это отличие, тем сильнее проявляются анизотропные свойства оболочки. При увеличении параметра  $Y$  эти свойства пропадают и кривые превращаются в окружность.

Представляет интерес рассмотреть характер смещений в волнах винтового типа. С этой целью выразим продольные смещения  $U_n$ , перпендикулярные волновому фронту, и  $U_t$  — поперечные смещения, параллельные ему, и  $W$  — нормальные к плоскости пластины, через смещения  $u_0$ ,  $v_0$  и  $w_0$ , введенные ранее и связанные между собой уравнением (6). Нетрудно получить соотношения

$$\begin{aligned} U_n &= u_0 \cos \alpha + v_0 \sin \alpha; \\ U_t &= -v_0 \cos \alpha + u_0 \sin \alpha; \quad W = w_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Не ограничивая общности, можно положить величину  $u_0 = 1$  и из первых двух уравнений системы (6) определить величины  $v_0$  и  $w_0$ :

$$u_0 = 1; \quad v_0 = \frac{A_v}{A_0}, \quad w_0 = \frac{A_w}{A_0}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_v &= -(A_{11}A_{23} - A_{12}A_{13}); \quad A_w = -(A_{11}A_{22} - A_{12}^2); \\ A_0 &= A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (9) в формулы (8), получим искомые значения  $U_n$ ,  $U_t$  и  $W$  в функции частоты  $Y$  для произвольного угла  $\alpha$ .

На рис. 7 и 8 в качестве примера приведены графики этих величин при  $\alpha = 30^\circ$  для ветвей  $X_1$  и  $X_2$  (из рис. 3) при  $H = 0.05$ . Характер их частотной зависимости подтверждает принадлежность этих ветвей к указанному выше типу волн.

В заключение отметим, что рассмотренные в настоящей статье винтовые волны цилиндрической оболочки (они же свободные волны эквивалентной плоской пластины) являются основой построения неперриодических решений для цилиндрической оболочки. Такими решениями должны описываться волны, распространяющиеся вдоль оси оболочки с продольным или поперечным закреплением (см. выше), а также волноводы, представляющие собой упругие полосы, вырезанные из цилиндрической оболочки вдоль или поперек ее оси. В этом случае винтовые волны будут играть роль так называемых волн Бриллюэна.

В заключение выражаю свою признательность Ю.И. Бобровницкому и А.И. Бойко за полезное обсуждение материалов статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Схенк Т.А., Бентхайн Дж.В. Эффективное вычисление и визуализация дисперсионных кривых для тонкой цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 5. С. 828–841.
2. Музыченко В.В. Дифракция звука на упругих оболочках. М.: Наука, 1993.
3. Scott J.F.M. The free modes of propagation of an infinite fluid-loaded thin cylindrical shell // J. Sound Vib. 1988. № 125. P. 241–280.
4. Junger M.C., Feit D. Sound, Structures, and their Interaction. Second Edition. MIT Press, 1986.
5. Haumesser L., Decultet D., Leon F., Maze G. Experimental identification of finite cylindrical shell vibration modes // JASA. 2002. V. 111. № 5. P. 2034–2039.
6. J.D. Kaplunov, Wilde M.V. Free interfacial vibration in cylindrical shells // JASA. 2002. V. 111. № 6. P. 2692–2704.
7. Saijyou K., Yoshikawa S. Analysis of flexural wave velocity and vibration mode in thin cylindrical shell // JASA. 2002. V. 111. № 6. P. 2034–2039.
8. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966.

## Helical Waves of an Elastic Cylindrical Shell

V. V. Tyutekin

Properties of helical waves of a cylindrical shell described by Kirchhoff–Love equations are considered. The problem is reduced to the case of propagation of plane waves in an equivalent plate. On the basis of the corresponding dispersion equation and its solution, a conclusion is made about the anisotropy of the shell properties. Dispersion curves are plotted for different angles of propagation of helical waves with respect to the shell axis. Displacements of the shell along and across the direction of wave propagation are calculated.