АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2005, том 51, № 1, с. 133–134

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.2

О ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЕ ПОЛЯ, ГЕНЕРИРУЕМОГО НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ

© 2005 г. С. А. Рыбак

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника 4
E-mail: rybak@akinru
телефон: 7-095-126-9072
Fax: 7-095-126-8411

Поступила в редакцию 24.05.04 г.

Система уравнений гидродинамики для плоской модели (x, y), x – координата вдоль потока $U(y)$, y – координата, нормальная к потоку, в квадратичном приближении имеет вид [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}v_i + \left[(v_k + U\delta_{kx})\frac{\partial}{\partial x_k}(v_i + U\delta_{ix})\right] =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta\Delta v_i + \left(\varsigma + \frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) = 0; \qquad (1)$$

$$\delta\rho = \delta p/c^2 - \frac{\gamma - 1}{2\rho_0 c^4}\delta p^2;$$

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Система уравнений в линеаризованном пределе имеет вид:

$$D\Delta\phi - U_{yy}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \Delta\varphi U_y + U_{yy}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \eta\Delta^2\phi;$$

$$D\Delta\varphi + \frac{1}{\rho_0}\Delta p = \left(\varsigma + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta^2\varphi - 2U_y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right); \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\rho c^2}Dp + \Delta\varphi = 0; \quad D = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}.$$

Первое уравнение системы (2) – это модифицированное уравнение Орра–Зоммерфельда, хорошо известное без двух последних членов в левой части (2). Здесь мы приняли во внимание взаимодействие вихревой и потенциальной компонент поля скоростей, возникающее благодаря сдвиговому течению $U(y)$. Второе и третье уравнения в совокупности эквивалентны уравнению Лайтхилла [3] с линеаризованной правой частью. Они написаны с учетом неоднородного в направлении y доплеровского сдвига частоты. Неустойчивость возникает уже в случае линейного изменения течения в направлении y:

$$U(y) = U_0 + \varepsilon y, \quad U_{yy}(y) = 0. \qquad (3)$$

Учет потенциальной компоненты волнового поля, как будет проиллюстрировано ниже (уравнение (5)), является необходимым условием для возникновения неустойчивости в отсутствие точки перегиба профиля течения.

Пренебрегая вязкостью, получим:

$$D\Delta\phi + \Delta\varphi U_y = 0;$$

$$D\Delta\varphi + \frac{1}{\rho_0}\Delta p = -2U_y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right); \qquad (4)$$

$$\frac{1}{\rho_0 c^2}Dp + \Delta\varphi = 0.$$

Замкнутое уравнение для $p(x, y, t)$ следует из (4):

$$\Delta\left(\Delta p - \frac{1}{c^2}D^2 p\right) = 2\frac{U_y}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}Dp - U_y\frac{\partial}{\partial x}p\right). \qquad (5)$$

Наличие производных различной четности в (5) есть признак неконсервативности задачи.

Заметим, что из (4) следует уравнение Пуассона для функции тока:

$$\Delta\phi = \frac{U_y}{\rho c^2}p. \qquad (6)$$

В соответствии с соотношением (3)

$$U_y = \varepsilon.$$

Систему уравнений (4) решим в первом порядке по ε, что означает, что U, U_y мы предполагаем постоянными:

$$\varphi = c_1\exp[j(-\omega t + kx + qy)],$$
$$\phi = c_2\exp[j(-\omega t + kx + qy)]. \qquad (7)$$

Положим

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1. \qquad (8)$$

Из системы уравнений (4) получим дисперсионное уравнение:

$$(\omega - Uk^2) - (k^2 + q^2)c^2 = \\ = \frac{-2j(\omega - Uk)U_y kq + 2k^2 U_y^2}{k^2 + q^2}. \tag{9}$$

Из уравнения (9) находим:

$$\omega_0 = U_0 k + c(k^2 + q^2)^{1/2}, \\ \omega_1 = j\frac{U_y kq}{k^2 + q^2}. \tag{10}$$

Мы пренебрегли последним членом в соотношении (9), квадратичным по U_y. Заметим, что при $c^2 \longrightarrow \infty$ $k^2 \longrightarrow -q^2$ и решение (10) не имеет места.

Вернемся теперь к системе (1) и линеаризуем ее, не разделяя поле скоростей на потенциальную и вихревую части. В этом случае получим волновое уравнение для поля давления $p(x, y, t)$ в более простой форме, чем (5), даже для произвольного $U(y)$:

$$\left(\frac{\omega_d^2}{c^2} + \Delta\right)p = -\frac{2kU'}{\omega_d}p_y,$$

$$p = p(y)\exp(-j\omega_d t + jkx), \tag{11}$$

$$\omega_d = \omega - U(y)k.$$

В линеаризованном пределе:

$$\omega_d = \omega_{d0} - U'yk, \quad \omega_{d0} = \omega - U_0 k.$$

Здесь $p_y = \dfrac{\partial p}{\partial y} = -j\rho\omega_d v_y$.

Найдем $p(y)$ для нормальной волны в волноводе $0 < y < h$, в первом порядке по U' $(U_0 = 0)$:

$$p(y) = A\exp(jq_1 y) + B\exp(-jq_2 y).$$

$$q_{1,2} = -\frac{jkU'}{\omega_{d0}}(+/-)\left(\frac{\omega_{d0}^2}{c^2} - k^2\right)^{1/2}. \tag{12}$$

По существу, мы используем два малых параметра

$$\frac{U'hk}{\omega_{d0}} \ll 1, \quad \frac{h\omega_{d0}^2}{qc^2} \ll 1.$$

Найдем решение при граничных условиях

$$v_y = 0 \text{ при } y = 0, \\ p = Z(\omega)v_y \text{ при } y = h. \tag{13}$$

Дисперсионное уравнение примет вид:

$$\exp(2jq_0 h)\frac{[1 - Z_1(q_0 - P)](q_0 + P)}{[1 + Z_1(q_0 + P)](q_0 - P)} + 1 = 0.$$

$$P = \frac{jkU'}{\omega_{d0}}, \quad q_0 = \left(\frac{\omega_{d0}^2}{c^2} - k^2\right)^{1/2}. \tag{14}$$

$$Z_1 = \frac{Z}{-j\omega_d\rho}.$$

Решая соотношение (14), можно получить:

$$\operatorname{Im}\omega(q_0) < 0. \tag{15}$$

Характерные случаи:

а) когда для импеданса на границе

$$\operatorname{Im}Z \neq 0.$$

b) когда $Z = \infty$, $\exp(2jq_0 h) = 1$, $q_{0n} = \dfrac{\pi n}{h}$.

В первом случае имеются четыре решения ω_{d0} для последнего уравнения (12) и одно из них имеет мнимую часть типа (15).

Как было показано нами ранее [4], интеграл энергии для линеаризованной системы уравнений (1) в присутствии сдвигового течения $U(y)$ принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{2}\rho(v_x^2 + v_y^2) + \frac{p^2}{2\rho c^2}\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i}(pv_i) = -\rho v_x v_y U_y. \tag{16}$$

Поток энергии от сдвигового течения, являющийся причиной неустойчивости, описывается в терминах напряжений Рейнольдса в правой части соотношения (16). Его знак определяется знаком правой части (16). Обе компоненты нестабильной волны (ψ, φ) являются следствием этого процесса. В изменении знака кривизны профиля течения нет необходимости.

В то же время изменение знака кривизны профиля течения необходимо для возникновения неустойчивости, если не учитывать потенциальную часть генерируемого поля.

Работа поддержана грантами – РФФИ 02-02-17143 и научной школы НШ-1176-2003-2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рыбак С.А.* Учет взаимодействия потенциальной и вихревой компонент поля скоростей при анализе неустойчивости сдвигового течения // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 6. С. 854–855.
2. *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958, 194 с.
3. *Дж. Лайтхилл.* Волны в жидкостях. М.: "Мир", 1981. 595 с.
4. *Rybak S.A.* Sound and Pseudosound Generation in Turbulent Boundary Layer. 16-th ISNA. Moscow, 2002. V. 1. P. 235–239.