АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2005, том 51, № 5, с. 623–627

УДК 534.1

КОЛЕБАНИЯ С ВЫСОКОЙ ДОБРОТНОСТЬЮ В СЛОИСТОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

© 2005 г. **О. Ю. Динариев, В. Н. Николаевский**

Институт физики Земли РАН
123995, Москва, ул. Б. Грузинская, 10
E-mail: dinariev@mail.ru

Поступила в редакцию 23.06.04 г.

Рассмотрены условия существования в слоистых средах долгоживущих акустических резонансов, обусловленных колебаниями среды с малыми декрементами. Получены теоретические априорные оценки, связывающие распределение резонансных частот в комплексной области с характеристиками неоднородности слоистой системы. Изложена схема расчета резонансов при численном моделировании. Приведены примеры геофизических сред с долгоживущими резонансами.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в задаче о колебаниях упругого тела конечных размеров определяется счетный набор собственных колебательных мод, частоты которых имеют точку сгущения на бесконечности. Если же это тело поместить в бесконечную среду с другими свойствами, то в общем случае спектр собственных частот сдвигается в комплексной области. При этом собственные частоты приобретают мнимые части, а соответствующие колебательные моды называются акустическими резонансами. Исследование взаимосвязи между характеристиками неоднородности и параметрами резонансов составляет содержание акустической спектроскопии [1]. Нужно отметить, что концептуальный и математический аппарат этого раздела науки в значительной степени заимствован из квантовой механики [2], где исследование резонансов составляет важнейший источник информации о квантовых системах.

В геофизике значительный интерес представляют исследования резонансов, связанных со слоистой упругой средой. Такие резонансы влияют на амплитудно-частотную характеристику системы среда + наземный объект [3] и, следовательно, на условия эксплуатации сооружений и приборов. Особое значение имеют долгоживущие резонансы, т.к., по современным представлениям, именно они определяют эффективность вибросейсмического воздействия на нефтяные пласты [4]. В работе [5] исследовалось распределение резонансных частот в комплексной плоскости для слоистой бесконечной среды. В настоящей работе изучаются условия существования долгоживущих резонансов для бесконечной и полубесконечной среды.

АКУСТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСЫ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Рассмотрим упругие волны (продольные или поперечные), описываемые уравнением

$$\rho\partial_t^2 u - \partial_x(E\partial_x u) = f, \tag{1}$$

где $u = u(t, x)$ – функция перемещений, $\rho = \rho(x)$ – плотность, $E = E(x)$ – модуль упругости, $f = f(t, x)$ – поле внешних сил. Удобно переопределить пространственную координату с помощью дифференциального соотношения

$$dy = E_0 dx/E(x),$$

где E_0 – постоянная с размерностью давления (характерное значение модуля упругости). Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\kappa^2\partial_t^2 u - \partial_y^2 u = f_* = E_0^{-2}Ef \\ \kappa = (\rho E)^{1/2}E_0^{-1}.\end{gathered} \tag{2}$$

Обсудим граничные условия для уравнения (2). Будем искать решение уравнения (2) для полупространства $y > 0$ (задача 1) и для бесконечного пространства $-\infty < y < +\infty$ (задача 2), которое можно интерпретировать как отклик системы на внешнюю силу f. В обоих случаях предполагается, что сила f обращается в нуль вне некоторого конечного пространственного интервала с длиной L. Кроме того, величина κ вне этого пространственного интервала является постоянной. Можно считать, что $\kappa = \kappa_-$, $y < 0$ (задача 2) и $\kappa = \kappa_+$, $y > L$ (задачи 1, 2). На пространственной бесконечности накладываются условия излучения, на границе полупространства в задаче 1 – условие отсутствия

напряжения. Таким образом, имеются следующие граничные условия для задачи 1

$$\partial_y u|_{y=0} = 0, \tag{3}$$

$$(\kappa_+\partial_t u + \partial_x u) \longrightarrow 0, \quad y \longrightarrow +\infty, \tag{4}$$

и для задачи 2

$$(\kappa_-\partial_t u - \partial_x u) \longrightarrow 0, \quad y \longrightarrow -\infty, \tag{5}$$

$$(\kappa_+\partial_t u + \partial_x u) \longrightarrow 0, \quad y \longrightarrow +\infty. \tag{6}$$

Поскольку в уравнении (2) и граничных условиях (3)–(6) отсутствует явная зависимость от времени, то можно осуществить преобразование Фурье

$$v = v(\omega, y) = \int \exp(-i\omega t)u(t, y)dt.$$

Тогда получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\partial_y^2 v + \omega^2\kappa^2 v = F = -\int \exp(-i\omega t)f_*(t, y)dt \tag{7}$$

с граничными условиями для задачи 1

$$\partial_y v|_{y=0} = 0 \tag{8}$$

$$(i\omega\kappa_+ v + \partial_x v) \longrightarrow 0, \quad y \longrightarrow +\infty \tag{9}$$

и для задачи 2

$$(i\omega\kappa_- v - \partial_x v) \longrightarrow 0, \quad y \longrightarrow -\infty, \tag{10}$$

$$(i\omega\kappa_+ v + \partial_x v) \longrightarrow 0, \quad y \longrightarrow +\infty. \tag{11}$$

Для каждой из задач 1, 2 введем в рассмотрение два решения однородного уравнения (7) (т.е. когда $F = 0$) $v_- = v_-(\omega, y)$, $v_+ = v_+(\omega, y)$, которые определяются следующими граничными условиями: для задачи 1

$$v_-|_{y=0} = 1, \quad \partial_y v_-|_{y=0} = 0,$$

$$v_+ \longrightarrow \exp(-i\omega\kappa_+ y), \quad y \longrightarrow +\infty$$

и для задачи 2

$$v_- \longrightarrow \exp(i\omega\kappa_- y), \quad y \longrightarrow -\infty,$$

$$v_+ \longrightarrow \exp(-i\omega\kappa_+ y), \quad y \longrightarrow +\infty.$$

Определим функцию Грина по формуле

$$G(\omega, y, y_0) = \Delta^{-1}\begin{cases} v_+(\omega, y)v_-(\omega, y_0), & y > y_0, \\ v_-(\omega, y)v_+(\omega, y_0), & y < y_0, \end{cases} \tag{12}$$

$$\Delta = \partial_y v_+(\omega, y_0)v_-(\omega, y_0) - v_+(\omega, y_0)\partial_y v_-(\omega, y_0).$$

Здесь Δ – определитель Вронского, построенный по двум решениям однородного уравнения. Поэтому Δ не зависит от параметра y_0: $\Delta = \Delta(\omega)$.

Как легко проверить, выполняется уравнение

$$(\partial_y^2 + \omega^2\kappa^2(y))G(\omega, y, y_0) = \delta(y - y_0),$$

где в правой части стоит δ-функция Дирака. Поэтому можно выписать формальное решение уравнения (7)

$$v(\omega, y) = \int G(\omega, y, y_0)F(\omega, y_0)dy_0. \tag{13}$$

Интегрирование в (13) осуществляется по полуоси для задачи 1 и по всей оси для задачи 2. Выражение (13) дает решение поставленных задач, т.к. поставленные граничные условия на функции $v_- = v_-(\omega, y)$, $v_+ = v_+(\omega, y)$ обеспечивают выполнение граничных условий (8)–(11).

Функции $v_- = v_-(\omega, y)$, $v_+ = v_+(\omega, y)$ аналитически продолжаются на комплексные значения ω. Соответственно, допускают продолжение функции $\Delta = \Delta(\omega)$, $G(\omega, y, y_0)$. При этом функция Грина $G(\omega, y, y_0)$ может иметь полюсы, совпадающие с нулями функции $\Delta = \Delta(\omega)$. Если Ω является корнем уравнения

$$\Delta(\omega) = 0, \tag{14}$$

то соответствующие функции координаты $v_-(\Omega, y)$, $v_+(\Omega, y)$, пропорциональны:

$$v_+(\Omega, y) = C(\Omega)v_-(\Omega, y). \tag{15}$$

Обратное тоже верно: из равенства (15) вытекает соотношение (14).

Известно [5], что для всякого решения Ω уравнения (14) либо $\Omega = 0$, либо $\mathrm{Im}\Omega > 0$. Решения с положительной мнимой частью могут и отсутствовать, однако если они существуют, то они отождествляются с резонансными частотами рассматриваемой слоистой системы. В то же время соответствующие решения задачи $v_- = v_-(\Omega, y)$ (или $v_+ = v_+(\Omega, y)$, что равнозначно в силу (15)) отождествляются с резонансными колебательными модами.

Основанием для этого определения является следующее рассуждение. Используя формулу (12), выполним обратное преобразование Фурье

$$u(t, y) = (2\pi)^{-1}\int \exp(i\omega t)\times \\ \times G(\omega, y, y_0)F(\omega, y_0)dy_0 d\omega. \tag{16}$$

Интегрирование в (16) осуществляется вдоль прямой $\mathrm{Im}\Omega = a$, лежащей ниже всех особенностей подынтегрального выражения. Как было указано выше, полюсы функции Грина $G(\omega, y, y_0)$ лежат в верхней комплексной полуплоскости. Пусть все особенности функции $F(\omega, y)$ лежат выше прямой $\mathrm{Im}\Omega = \Lambda > 0$. Это предположение соответствует условию, что внешняя сила $f_*(t, y)$ обращается в нуль при $t < t_*$ для некоторого значения t_* (теорема Пэли–Винера [6]). Что касается функции Грина $G(\omega, y, y_0)$, то в полосе $0 \le \mathrm{Im}\Omega < \Lambda$ могут находиться полюса $\Omega_0 = 0$, Ω_1, Ω_2, …, причем $\mathrm{Im}\Omega_n > 0$ при $n > 0$. Сдвигая контур интегрирова-

ния в (16) вверх с обходом полюсов и взятием соответствующих вычетов, получаем формулу

$$u(t, y) = i\int dy_0 \mathrm{Res}_{\Omega_0}[G(\omega, y, y_0)F(\omega, y_0)]dy_0 + \\ + i\sum_{n>0}\int dy_0 \exp(i\Omega_n t)\times \\ \times \mathrm{Res}_{\Omega_n}[G(\omega, y, y_0)F(\omega, y_0)]dy_0 + O(\exp(-\Lambda t)).$$

Из этого выражения видно, что полное решение содержит сумму затухающих колебаний (резонансов), соответствующих комплексным частотам Ω_n. При этом $\alpha_n = \mathrm{Re}\Omega_n$ – частота колебания, $\beta_n = \mathrm{Im}\Omega_n$ – коэффициент затухания, $T_n = 2\pi/\alpha_n$ – период колебания, $\tau_n = 1/\beta_n$ – время жизни, $\xi_n = \tau_n/T_n$ – безразмерное время жизни резонанса.

Итак, для определения резонансов слоистой системы достаточно иметь решение однородного уравнения (2). Существует небольшое число случаев, когда такое решение можно получить в аналитическом виде [7] и, следовательно, точно указать параметры резонансов. В общем случае необходимо решать волновое уравнение численно при разных комплексных значениях ω и затем численно искать решение уравнения (13). Отметим, что удобный способ оценки количества N_C корней уравнения (13) в области комплексной плоскости, ограниченной кусочно-гладким контуром C, предоставляет формула

$$N_C = (2\pi i)^{-1}\int_C \Delta(\omega)^{-1}(\partial\Delta(\omega)/\partial\omega)d\omega,$$

где правая часть для конкретных сред и контуров C может быть определена численно.

ДОЛГОЖИВУЩИЕ РЕЗОНАНСЫ

Для изучения условий существования долгоживущих резонансов удобно начать с простейших моделей, где резонансы вычисляются точно. Рассмотрим задачу 1, где $\kappa = \kappa_0$ при $0 < y < L$, $\kappa = \kappa_+$ при $L < y$. На каждом из интервалов решение однородного уравнения (2) находится в виде суммы экспонент, стыковка осуществляется из условий непрерывности функции v и ее производной. Непосредственным вычислением находится определитель Вронского

$$\Delta = -2^{-1}i\omega((\kappa_+ - \kappa_0)\exp(i\omega(\kappa_+ - \kappa_0)L) + \\ + (\kappa_+ + \kappa_0)\exp(i\omega(\kappa_+ + \kappa_0)L)).$$

Поэтому уравнение для резонансов имеет вид

$$\exp(2i\omega\kappa_0 L) = \gamma, \tag{17}$$

где $\gamma = (\kappa_0 - \kappa_+)/(\kappa_0 + \kappa_+)$. В зависимости от знака γ имеется два набора решений: а) если $\gamma > 0$,

$$A_+ = \{(2\kappa_0 L)^{-1}(2\pi n + i\beta)|n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}; \tag{18}$$

б) если $\gamma < 0$,

$$A_- = \{(2\kappa_0 L)^{-1}(\pi + 2\pi n + i\beta)\big|n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}, \tag{19}$$

где $\beta = -\ln|\gamma|$. Если $\gamma = 0$, уравнение (17) решений не имеет. Очевидно, что долгоживущие резонансы могут существовать при $|\gamma|$, близких к единице, т.е. когда акустические жесткости слоев сильно различаются.

Рассмотрим теперь задачу 2, где $\kappa = \kappa_-$ при $y < 0$, $\kappa = \kappa_0$ при $0 < y < L$, $\kappa = \kappa_+$ при $L < y$. Задача решается аналогично случаю задачи 1, определитель Вронского вычисляется в явном виде

$$\Delta = -i\omega(2\kappa_0)^{-1}\exp(-i\omega\kappa_+ L)\times \\ \times((\kappa_+ - \kappa_0)(-\kappa_- + \kappa_0)\exp(-i\omega\kappa_0 L) + \\ + (\kappa_+ + \kappa_0)(\kappa_- + \kappa_0)\exp(i\omega\kappa_0 L)).$$

Аналогично случаю рассмотренной выше задачи 1, уравнение для резонансов имеет вид (17) с набором решений (18), (19), где

$$\gamma = (\kappa_0 - \kappa_-)(\kappa_0 - \kappa_+)/(\kappa_0 + \kappa_+)(\kappa_0 + \kappa_+).$$

Опять, долгоживущие резонансы возможны, когда акустическая жесткость промежуточного слоя значительно выше или ниже акустической жесткости граничных слоев.

Хотя в случае слоистых сред общего вида вычислить резонансы в аналитическом виде не удается, можно получить априорные оценки на их распределение в комплексной плоскости. Для этого удобно вычислить функции Грина для следующих вспомогательных безрезонансных задач.

Задача 1, $\kappa = \kappa_+$ при $0 < y$, функция Грина $G_*(y, y_0, \omega)$ вычисляется по формуле (12), где

$$v_- = (\exp(-i\omega\kappa_+ y) + \exp(i\omega\kappa_+ y))/2,$$

$$v_+ = \exp(-i\omega\kappa_+ y),$$

$$\Delta = -i\omega\kappa_+.$$

Задача 2, $\kappa = \kappa$ при $y < 0$, $\kappa = \kappa$ при $0 < y$, функция Грина $G_*(y, y_0, \omega)$ вычисляется по формуле (12), где

$$v_- = \begin{cases} \exp(i\omega\kappa_- y), & y < 0 \\ (2\kappa_+)^{-1}((\kappa_+ - \kappa_-)\exp(-i\omega\kappa_+ y) + \\ + (\kappa_+ + \kappa_-)\exp(i\omega\kappa_+ y)), & y > 0, \end{cases}$$

$$v_+ = \begin{cases} (2\kappa_-)^{-1}((\kappa_- - \kappa_+)\exp(-i\omega\kappa_- y) + \\ + (\kappa_+ + \kappa_-)\exp(i\omega\kappa_- y)), & y < 0, \\ \exp(-i\omega\kappa_+ y), & y > 0 \end{cases}$$

$$\Delta = -i\omega(\kappa_+ + \kappa_-).$$

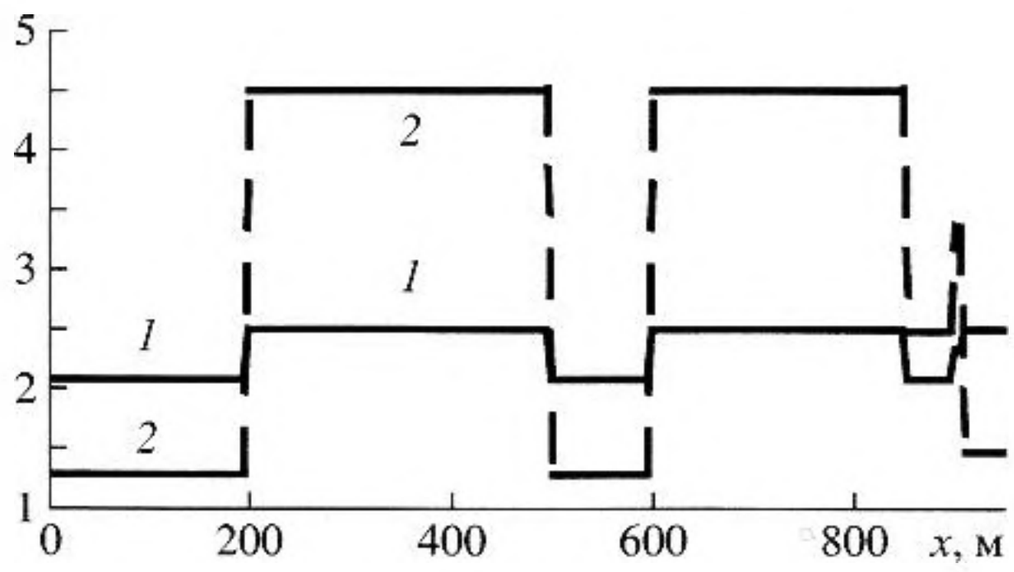

Рис. 1. Задача 1, распределение плотности и фазовой скорости по глубине; *1* – плотность, т/м^3; *2* – фазовая скорость, км/с.

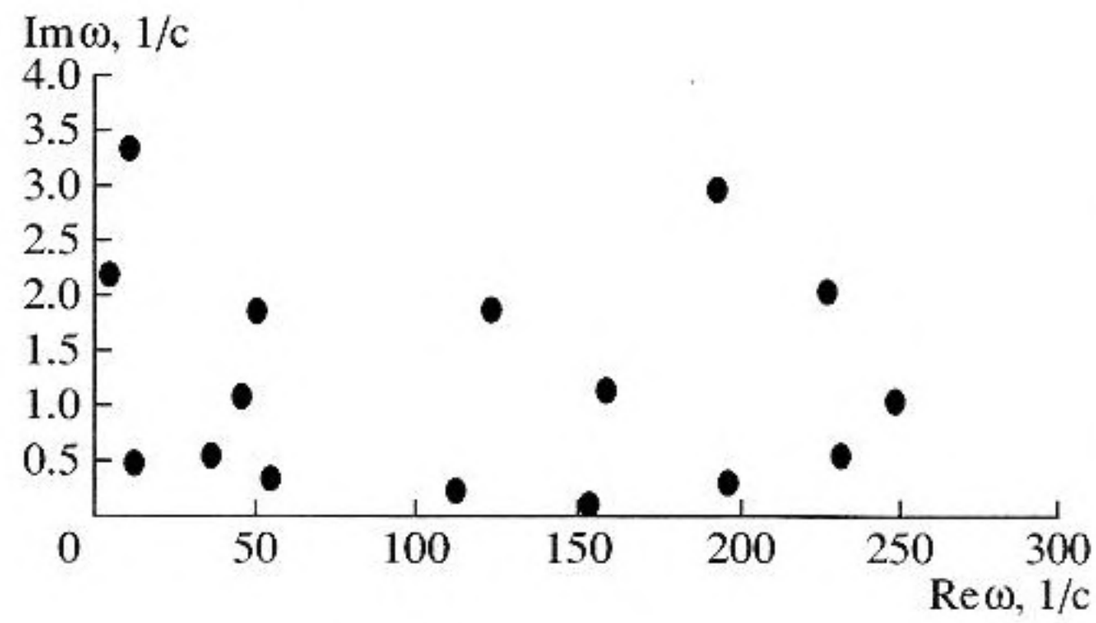

Рис. 2. Задача 1, распределение резонансных частот в комплексной плоскости.

Будем искать решение задачи 1 или задачи 2 в виде

$$v(\omega, y) = \int G_*(y, y_0, \omega) V(\omega, y_0) dy_0 \qquad (20)$$

и определим функцию

$$\nu(y) = \begin{cases} \kappa(y)^2 - \kappa_-^2, & y < 0 \\ \kappa(y)^2 - \kappa_+^2, & y > 0. \end{cases}$$

Подставляя выражение (20) в уравнение (2), получаем интегральное уравнение

$$V(\omega, y) + \omega^2 \nu(y) \times \\ \times \int G_*(y, y_0, \omega) V(\omega, y_0) dy_0 = F(\omega, y). \qquad (21)$$

Поскольку внешняя сила $F(\omega, y)$ и функция $\nu(y)$ обращается в нуль вне интервала $0 \le y \le L$, то функция $V(\omega, y)$ также обращается в нуль вне этого интервала. Поэтому уравнение (21) можно интерпретировать, как интегральное уравнение для функций на интервале $0 \le y \le L$. Уравнение (21) с нулевой правой частью служит для одновременного определения резонансных мод и резонансных частот. В последнем случае задача для резонансов может быть переписана в операторном виде

$$(1 + K)V = 0, \qquad (22)$$

где K – линейный интегральный оператор в левой части уравнения (21), действующий в пространстве функций на отрезке $[0, L]$. Если ввести в этом пространстве подходящую норму, в которой оператор K является непрерывным, то из (22) следует оценка на норму оператора

$$\|K\| \ge 1. \qquad (23)$$

Выбор нормы и функционального пространства неоднозначен. Поэтому неравенство (23) представляет целое семейство априорных оценок на распределение резонансных частот в комплексной плоскости. Например, если выбрать пространство непрерывных функций с нормой $\max\limits_{0 \le y \le L} |V|$, то получается оценка

$$|\omega| \kappa_*^{-2} \max_{0 \le y \le L} |v(y)| (\mathrm{Im}\,\omega)^{-1} \times \\ \times (\exp(L\kappa_+ \mathrm{Im}\,\omega) - 1) \ge 1, \qquad (24)$$
$$\kappa_* = \min(\kappa_-, \kappa_+).$$

Другой пример: если выбрать пространство интегрируемых функций с нормой $\int |V| dy$, то получается оценка

$$|\omega| \kappa_*^{-1} \int |v(y)| \exp(y\kappa_+ \mathrm{Im}\,\omega) dy \ge 1. \qquad (25)$$

Оценки (24), (25) показывают, что малые значения функции $v(y)$, характеризующей неоднородность слоистой системы, исключают возможность существования резонансов с большим относительным временем жизни ξ, хотя не исключают резонансов с большим абсолютным временем жизни и большим периодом. Резонансы с большим относительным временем жизни возможны только при значительной неоднородности.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ РЕЗОНАНСОВ

Для исследования распределения резонансных частот в комплексной плоскости были произведены численные расчеты для различных слоистых сред. Так как имелись в виду геофизические приложения, параметры сред (плотность ρ, фазовая скорость волн $c = (E/\rho)^{1/2}$, толщина) выбирались соответствующими реальным осадочным отложениям. Ниже приведены результаты численного моделирования задачи 1 и задачи 2, где удалось получить долгоживущие резонансы.

В задаче 1 рассматривалась неоднородная область с общим размером $L = 950$ м. Распределение плотности и скорости в этом диапазоне приведено на рис. 1. Ниже глубины 950 м плотность и скорость полагались постоянными: $\rho = 2.35$ т/куб. м,

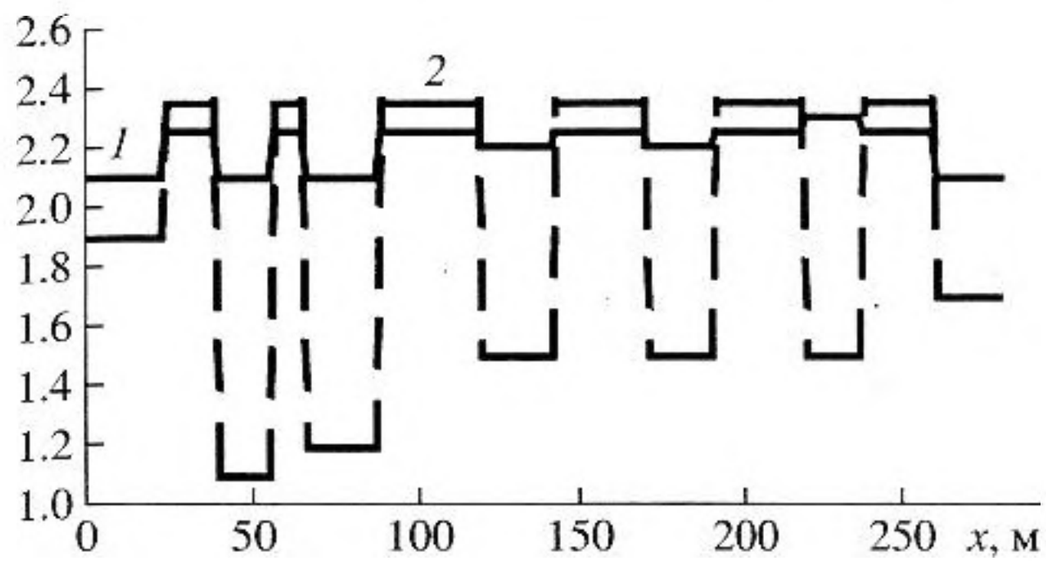

Рис. 3. Задача 2, распределение плотности и фазовой скорости по глубине; *1* – плотность, т/м^3; *2* – фазовая скорость, км/с.

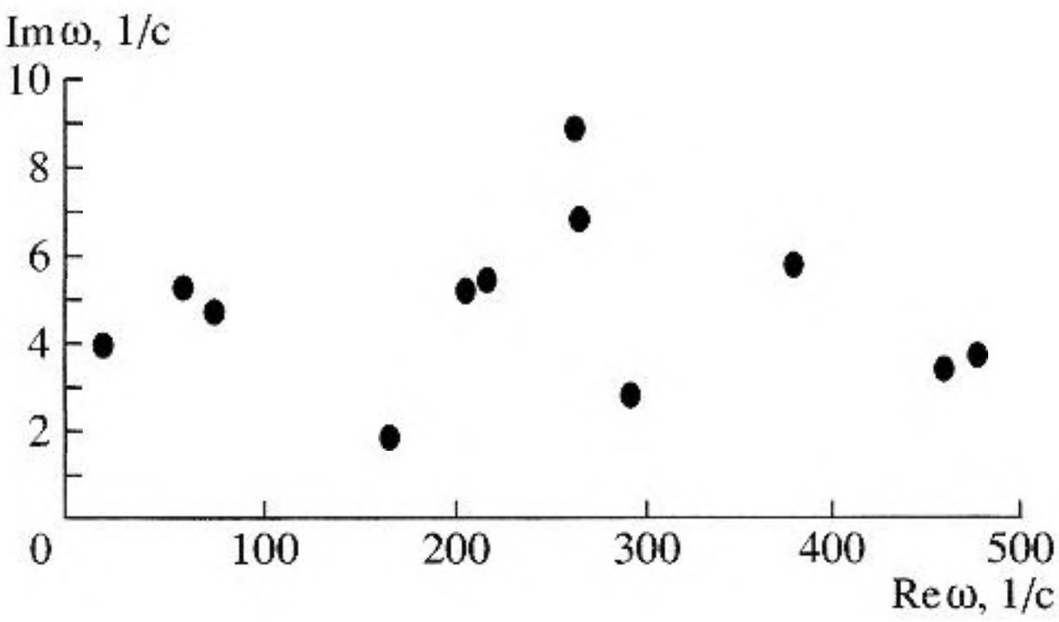

Рис. 4. Задача 2, распределение резонансных частот в комплексной плоскости.

$c = 3.35$ км/с. Распределение резонансов в комплексной плоскости представлено на рис. 2. Расчетные параметры наиболее долгоживущего резонанса: $\mathrm{Re}\,\omega = 153.72$ 1/с, $\mathrm{Im}\,\omega = 0.11$ 1/с, $\xi = 231.51$.

В задаче 2 рассматривалась неоднородная область с общим размером $L = 293$ м. Распределение плотности и скорости в этом диапазоне приведено на рис. 3. За пределами этой области плотность и скорость полагались постоянными: $\rho = 2.55$ т/куб. м, $c = 4.32$ км/с ($x < 0$); $\rho = 2.70$ т/куб. м, $c = 4.5$ км/с ($x > L$). Распределение резонансов в комплексной плоскости представлено на рис. 4. Расчетные параметры наиболее долгоживущего резонанса: $\mathrm{Re}\,\omega = 165.32$ 1/с, $\mathrm{Im}\,\omega = 1.88$ 1/с, $\xi = 14.03$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты численного моделирования демонстрируют возможность существования реальных геофизических сред с акустическими резонансами, характеризуемыми большими относительными временами жизни. Однако проведенный теоретический анализ показал, что такие резонансы могут иметь место только в средах со значительной неоднородностью по плотности и модулю упругости. В широком классе случаев слабонеоднородных сред такие резонансы невозможны, хотя может существовать широкий спектр резонансов с малыми временами жизни. Представленный в работе метод позволяет производить численный расчет резонансных частот и резонансных мод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векслер Н.Д.* Акустическая спектроскопия. Таллин: Валгус, 1989. 324 с.
2. *Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М.* Рассеяние, реакции и распады в квантовой механике. М.: Наука, 1966. 339 с.
3. Локальные резонансы в слоистых средах. М.: ОИФЗ РАН, 2000. 178 с.
4. *Мохов М.А., Сахаров В.А., Хабибуллин Х.Х.* Виброволновое и вибросейсмическое воздействие на нефтяные пласты // Нефтепромысловое дело. 2004. Вып. 4. С. 24–28.
5. *Динариев О.Ю., Николаевский В.Н.* Об акустических резонансах в слоистой среде // Известия РАН. МТТ. 2001. Вып. 3. С. 88–95.
6. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986. 462 с.
7. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 413 с.

High-*Q* Oscillations in a Layered Elastic Medium

O. Yu. Dinariev and V. N. Nikolaevskiĭ

Shmidt United Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, ul. Bol'shaya Gruzinskaya 10, Moscow, 123995 Russia

e-mail: dinariev@mail.ru

Abstract—Conditions of the existence of long-lived acoustic resonances that occur in a layered medium because of its oscillation with low damping factors are considered. *A priori* theoretical estimates relating the distribution of resonance frequencies in the complex plane to the parameters of inhomogeneity of the layered system are obtained. A scheme of resonance calculations in numerical modeling is described. Examples of geophysical media with long-lived resonances are presented.