АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2006, том 52, № 1, с. 23–29

УДК 534.231.1

ПРИЧИННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ОКЕАНЕ

© 2006 г. О. Э. Гулин

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева
690041 Владивосток, ул. Балтийская 43
E-mail: gulinoe@rambler.ru

Поступила в редакцию 30.09.04 г.

Работа посвящена разработке математической модели для описания акустических полей в горизонтально-неоднородной океанской среде, причем неоднородности могут быть существенными. На основе системы уравнений линейной акустики и идеологии метода поперечных сечений получены причинные уравнения первого порядка для точного описания горизонтальных частей акустических мод, позволяющие моделировать ситуации, когда плавность горизонтальных неоднородностей нарушается, и известные приближенные методы становятся малопригодными. Полученные уравнения обладают рядом важных преимуществ, среди которых – сравнительная простота, физическая прозрачность для анализа и хорошая пригодность для численного моделирования существующими алгоритмами, разработанными при решении волновых задач в слоистых средах.

Несмотря на то, что закономерности формирования акустических полей в слоистых средах являются общими и для более сложных двух-трехмерно-неоднородных сред [1], в последнем случае конкретная реализация этих закономерностей имеет свои отличительные черты. В результате характеристики звукового поля, измеренные в океане с горизонтальными неоднородностями, зачастую заметно отличаются от модельных решений для слоистых ситуаций. Естественно, что отличие тем сильнее, чем существеннее выражены неоднородности в горизонтальной плоскости. Если они достаточно плавные, то качественной разницы в законах формирования полей по сравнению со слоистыми средами может не наблюдаться, а для количественного уточнения уровней полей и характера потерь при распространении можно ограничиться поправками в рамках известных методов, таких как адиабатическое приближение, метод ВКБ, или приближение параболического уравнения (ПУ) [1, 2]. Значительно сложнее обстоит дело в случаях нарушения плавного характера неоднородностей. Тогда в горизонтальной плоскости задачу следует рассматривать как краевую, а перечисленные приближенные методы не дают адекватного описания. Работ, в которых такая проблема рассматривается в точной постановке, в акустической литературе единицы, но и в них на разных этапах решения авторы обращаются к тем или иным приближениям [3–5], значительно снижающим ценность исходной точной формулировки. Для трехмерных неоднородностей подобные работы и вовсе отсутствуют [3]. В настоящей статье получены уравнения первого порядка с начальными условиями, которые точно решают указанную краевую задачу и без приближений описывают акустическую ситуацию, в том числе и в тех случаях, когда характер горизонтальных изменений среды нельзя считать плавным.

Одним из подходов к исследованию волновых задач распространения звука в неслоистом океане является метод поперечных сечений, обобщающий результаты модовой теории и переносящий их на описание акустических полей в горизонтально-неоднородных средах [1, 2]. В своей общей формулировке метод поперечных сечений является точным, однако его уравнения слишком сложны для моделирования. Поэтому для вычислений в конкретных ситуациях, как правило, используются упрощенные формы метода – адиабатическое приближение и приближение ВКБ [2, 3]. Однако, если не ограничиваться рассмотрением только уравнений второго порядка для мод акустического давления, к решению которых традиционно сводится исследование в рамках метода поперечных сечений, то интереса заслуживают более простые уравнения первого порядка. Они описывают "горизонтальные" части акустических полей давления и колебательной скорости, и вытекают непосредственно из системы уравнений акустики.

Рассмотрим исходные акустические уравнения для полей тонального точечного источника в горизонтально-неоднородном океане. Записанные в цилиндрических координатах (r, z) (z – верти-

кальное направление от дна к поверхности), они имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial z}p(\omega, r, z) - i\omega\rho(z, r)w(\omega, r, z) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}p(\omega, r, z) - i\omega\rho(z, r)v(\omega, r, z) = 0,$$

$$\rho(z, r)\left\{\frac{\partial}{\partial z}w(\omega, r, z) + \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right]v(\omega, r, z)\right\} - \tag{1}$$

$$-\frac{i\omega p(\omega, r, z)}{c^2(z, r)} = \frac{i}{2\pi\omega r}\delta(r)\delta(z - z_0).$$

Здесь p и $\mathbf{V} = \{v, w\}$ – поля акустического давления и компонент горизонтальной и вертикальной колебательных скоростей, $c(z, r)$ и $\rho(z, r)$ – скорость звука и плотность среды соответственно, ω – циклическая частота монохроматического излучения. Поскольку дно в большинстве случаев можно считать слоисто-стратифицированным, в дальнейшем полагаем $\rho(z, r) = \rho(z)$, а в воде нормированное значение $\rho = 1$. В тех случаях, когда отклонение от слоистой стратификации в дне может быть существенным, это обстоятельство в рамках нашего подхода учитывается краевым условием общего вида:

$$p(\omega, r, H) = 0, \quad p(\omega, r, h) - \Omega(r, h)w(\omega, r, h) = 0, \tag{2}$$

где согласно определению введена функция $\Omega(\omega, r, z) = p(\omega, r, z)/w(\omega, r, z)$, характеризующая величину акустического импеданса на горизонте z, а значения $z = \{h, H\}$ отвечают положению дна и поверхности океана. Граничное условие при $z = h$ вида (2) подразумевает рассмотрение дна как многослойной жидкой структуры осадков, а также возможен учет их упругих свойств при соответствующем задании функции импеданса на границе с упругой частью осадков [2, 6]. Если морская среда слоисто-стратифицирована, то при наличии дна в виде жидкого полупространства (или его части) полное решение проблемы (1)–(2) может быть представлено суммой распространяющихся и вытекающих мод с небольшой оговоркой, касающейся той части непрерывного спектра, которая связана с возможным вкладом в поле вблизи источника от точки ветвления [6]. Данный вклад не учитывается. В ряде работ [7–9] применительно к описанию распространения звука в слоисто-неоднородном мелком море была развита концепция аналитико-численного моделирования. В рамках нее собственные значения и собственные функции однородной задачи (1)–(2) (при $c(z, r) = c(z)$) выражаются через решение обыкновенного дифференциального уравнения для импеданса $\Omega(\omega, z)$, и при произвольной стратификации представляются посредством аналитических рекуррентных соотношений, записанных на сетке, которая вводится подходящим образом для аппроксимации глубинных зависимостей параметров среды $c(z)$ и $\rho(z)$. Эти соотношения на языке математики представляют собой цепные дроби, свойства которых, прежде всего хорошая сходимость, известны. Для функций, входящих в исходные уравнения (1), запишем в слоистом случае модовое представление следующим образом:

$$p(r, z, z_0) = \sum_l \bar{\varphi}_{1l}(z)B_l H_0^{(1)}(\kappa_l r),$$

$$w(r, z, z_0) = \sum_l \bar{\varphi}_{2l}(z)B_l H_0^{(1)}(\kappa_l r), \tag{3}$$

$$v(r, z, z_0) = -(\rho\omega)^{-1}\sum_l \bar{\varphi}_{1l}(z)B_l\kappa_l H_1^{(1)}(\kappa_l r).$$

Здесь $B_l = (i/4)\bar{\varphi}_{1l}(z_0)$; $\bar{\varphi}_{1l}(z)$, $\bar{\varphi}_{2l}(z)$ – нормированные собственные функции, а κ_l – горизонтальные собственные числа, – суть решения задачи на собственные значения следующего вида:

$$\hat{\mathbf{L}}(z)\varphi_l(z) = 0, \quad \varphi_{1l}(H) = 0,$$

$$\varphi_{2l}(H) = 1, \quad \varphi_{1l}(h) - \Omega_l(h)\varphi_{2l}(h) = 0, \tag{4}$$

$$\hat{\mathbf{L}}(z) \equiv \begin{pmatrix} d/dz & -i\omega\rho(z) \\ -iq_l^2(z)(\omega\rho(z))^{-1} & d/dz \end{pmatrix}.$$

Для сокращения записи здесь использована матричная форма: $\hat{\mathbf{L}}(z)$ – оператор-матрица, $q_l^2(z) = \omega^2 c^{-2}(z) - \kappa_l^2$, $\varphi_l(z) = \{\varphi_{1l}, \varphi_{2l}\}$ – вектор-функция, составленная из ненормированных собственных функций, выражающихся через импеданс $\Omega(z)$:

$$\varphi_l(z) = \begin{bmatrix}\Omega_l(z) \\ 1\end{bmatrix}\exp\left\{-i\int_z^H d\zeta\frac{q_l^2(\zeta)}{\omega\rho(\zeta)}\Omega_l(\zeta)\right\}, \tag{5}$$

$$\frac{d\Omega_l(z)}{dz} = -\frac{i}{\omega\rho(z)}q_l^2(z)\Omega_l^2(z) + i\omega\rho(z),$$

$$\Omega_l(z = h) = \Omega_l(h). \tag{6}$$

Если морская среда имеет неоднородности в горизонтальном направлении, $c(z, r)$, $h(r)$, то согласно идее метода поперечных сечений решение проблемы можно представить в виде разложения по локальным модам в каждом отдельно взятом вертикальном сечении $r = \text{const}$ волновода [1–3]:

$$p(r, z, z_0) = \sum_l \bar{\varphi}_{1l}(z, r)G_l(r),$$

$$w(r, z, z_0) = \sum_l \bar{\varphi}_{2l}(z, r)G_l(r), \tag{7а,б}$$

$$v(r, z, z_0) = [i\omega\rho(z)]^{-1}\sum_l \bar{\varphi}_{1l}(z, r)g_l(r). \tag{7в}$$

При этом собственные функции $\bar{\varphi}_{1l}(z, r)$, $\bar{\varphi}_{2l}(z, r)$, как и $\kappa_l(r)$, параметрически зависят от r и в каждом r-сечении удовлетворяют задаче на собственные значения, которая имеет аналогичную (4)–(6) форму записи, но с функциями, зависящими от горизонтальной координаты:

$$\hat{\mathbf{L}}(z, r)\varphi_l(z, r) = 0, \quad \varphi_{1l}(H, r) = 0,$$

$$\varphi_{2l}(H, r) = 1, \quad \varphi_{1l}(h, r) - \Omega_h(r)\varphi_{2l}(h, r) = 0,$$

$$\hat{\mathbf{L}}(z, r) \equiv \begin{pmatrix} d/dz & -i\omega\rho(z) \\ -iq_l^2(z, r)(\omega\rho(z))^{-1} & d/dz \end{pmatrix},$$

$$\varphi_l(z, r) = \begin{bmatrix} \Omega_{zl}(r) \\ 1 \end{bmatrix} \exp\left\{-i\int_z^H d\zeta \frac{q_l^2(\zeta, r)}{\omega\rho(\zeta)}\Omega_{\zeta l}(r)\right\},$$

$$\frac{d\Omega_{zl}(r)}{dz} = -\frac{i}{\omega\rho(z)}q_l^2(z, r)\Omega_{zl}^2(r) + i\omega\rho(z),$$

$$\Omega_{z=hl}(r) = \Omega_{hl}(r),$$

$q_l^2(z, r) = \omega^2 c^{-2}(z, r) - \kappa_l^2(r)$. Принимая во внимание эту форму записи, подстановка модовых представлений (7) в исходные уравнения (1) приводит к уравнениям для "горизонтальных" амплитуд разложения мод $G_l(r)$, $g_l(r)$:

$$\sum_l \left\{\frac{\partial}{\partial r}[G_l(r)\bar{\varphi}_{1l}(z, r)] - g_l(r)\bar{\varphi}_{1l}(z, r)\right\} = 0,$$

$$\sum_l \left\{\frac{\partial}{\partial r}[g_l(r)\bar{\varphi}_{1l}(z, r)] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}g_l(r)\bar{\varphi}_{1l}(z, r) + \kappa_l^2 G_l(r)\bar{\varphi}_{1l}(z, r)\right\} =$$

$$= -\frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta(z - z_0).$$

Окончательный вид эти уравнения принимают с учетом свойства ортонормированности собственных функций, $\pounds_m(z, r)\bar{\varphi}_{1l}(z, r) = \int_{-\infty}^{H} \frac{\bar{\varphi}_{1m}(z, r)\bar{\varphi}_{1l}(z, r)}{\rho(z)} dz =$ $= \{0$, при $m \neq l$; 1, при $m = l\}$:

$$\frac{\partial}{\partial r}G_m(r) = -\sum_l G_l(r)V_{ml}(r) + g_m(r), \tag{8а}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}g_m(r) = -\sum_l g_l(r)V_{ml}(r) - \tag{8б}$$

$$-\kappa_m^2(r)G_m(r) - \frac{1}{r}g_m(r) - \frac{\delta(r)}{2\pi r}\bar{\varphi}_{1m}(z_0).$$

$V_{ml}(r) = \int_{-\infty}^{H} \frac{\bar{\varphi}_{1m}(z, r)}{\rho(z)}\frac{\partial\bar{\varphi}_{1l}(z, r)}{\partial r} dz$, а значение плотности в точке источника $\rho(z_0) = 1$.

Заметим, что в случае двумерной формулировки проблемы в декартовых координатах (x, z), в 3-м уравнении исходной системы (1) следует заменить $(\partial/\partial r + 1/r)$ на $\partial/\partial x$ и функцию источника $(2\pi r)^{-1}\delta(r)$ на $\delta(x)$. Тогда в уравнении (8б) отсутствует $g_m(r)/r$, и соответствующим образом изменится вид функции источника, при переходе через точку которого поля станут непрерывными. Суммы в правых частях уравнений (8), очевидно, описывают то новое, что привносят горизонтальные изменения среды в процесс распространения волн. Это – взаимодействие мод вследствие рассеяния на горизонтальных неоднородностях среды, входящее через $V_{ml}(r)$. Видно, что для функций $G_l(r)$ и $g_l(r)$ возникает система одномерных связанных уравнений первого порядка, вопрос об условиях к которым обсудим ниже. Здесь важно отметить, что эти уравнения линейные относительно функций $G_l(r)$ и $g_l(r)$. Для сравнения, уравнения 2-го порядка, к которым обычно сводится анализ в рамках метода поперечных сечений для акустического давления, имеют вид [2, 3]:

$$\{\Delta_r + \kappa_m^2(r)\}G_m(r) =$$

$$= -\sum_l \left[2V_{ml}(r)\frac{\partial}{\partial r}G_l(r) + G_l(r)W_{ml}(r)\right] - \tag{9}$$

$$-\frac{\delta(r)}{2\pi r}\bar{\varphi}_{1m}(z_0),$$

и помимо $V_{ml}(r)$ в правой части содержат функцию $W_{ml}(r) = \int_{-\infty}^{H} \frac{\bar{\varphi}_{1m}(z, r)}{\rho(z)}\Delta_r\bar{\varphi}_{1l}(z, r)dz$, где $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r}$, а также производную $\partial G_l(r)/\partial r$. Уравнения (8), полученные из (1), не являются следствием (9), поскольку операторы $\pounds_m(z, r)$ и $\partial/\partial r$ неперестановочны.

Если горизонтальных неоднородностей нет, то суммы в правых частях (8а), (8б) (и (9)) отсутствуют, и решением таких уравнений служат функции Ханкеля 1-го рода, описывающие уходящие от источника волны

$$G_m(r) = B_m H_0^{(1)}(\kappa_m r),$$

$$g_m(r) = B_m(\partial/\partial r)H_0^{(1)}(\kappa_m r) = -\kappa_m B_m H_1^{(1)}(\kappa_m r).$$

Их вид совпадает с коэффициентами модового разложения для слоистой среды (3). В присутствии горизонтальных неоднородностей в общем случае коэффициенты B_m становятся функциями расстояния $B_m = B_m(r)$, и, кроме того, если неоднородности существенные, следует учитывать поле обратных волн, возникающих из-за рассеяния назад на неоднородностях. При этом проблема (8) становится одномерной краевой задачей с обычными трудностями решения, возникающими из-за ее непричинного характера. Конкретизируем задачу, считая, что область пространства $L < r < L_0$ с существенными горизонтальными неоднородностями находится справа от источника ($L > r_0$), расположенного в слоистой среде в точке $r = r_0$. При $r > L_0$ среда также слоистая (полагаем ($\kappa_m L_0 \gg \gg 1$). Тогда вид решения в областях $r < L$ и $r > L_0$ известен:

$$G_m(r) = B_m[H_0^{(1)}(\kappa_m^0(r - r_0)) + R_m H_0^{(2)}(\kappa_m^0(r - r_0))],$$

$$G_m(r) = B_m T_m \exp(i\kappa_m^1(r - L_0));$$

$g_m(r) = \partial G_m(r)/\partial r$, ($R_m$, T_m – коэффициенты отражения и прохождения мод), откуда можно стандартным образом сформулировать условия к системе (8) [2, 10], рассматривая непрерывность функций $G_m(r)$ и $g_m(r)$ для каждой моды на границах горизонтально-неоднородной области среды $r = (L, L_0)$ и условия затухания при $r \longrightarrow \pm\infty$:

$$\begin{gathered}\{\kappa_m^0 G_m(r) + g_m(r) b_m(r) = \kappa_m^0 D_m(r)\}\big|_{r=L},\\ \{g_m(r) = i\kappa_m^1 G_m(r)\}\big|_{r=L_0}.\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь $b_m(L) = H_0^{(2)}(\kappa_m^0(L - r_0))/H_1^{(2)}(\kappa_m^0(L - r_0))$; $D_m(L) = B_m H_0^{(1)}(\kappa_m^0(L - r_0))[1 - d_m b_m]$, $d_m(L) = H_1^{(1)}(\kappa_m^0(L - r_0))/H_0^{(1)}(\kappa_m^0(L - r_0))$, и в общем случае считаем границы L, L_0 несогласованными, то есть $\kappa_m^0 \neq \kappa_m(L + 0)$, и $\kappa_m^1 \neq \kappa_m(L_0)$. Очевидно, что в данной точной постановке проблемы (8), (10) функции $G_m(r)$, $g_m(r)$ определяются всей областью неоднородностей, и потому уравнения и условия незамкнуты относительно каждой из этих функций. Все существующие приближения (ВКБ, ПУ, однонаправленное распространение) по сути преследуют цель упростить задачу (9) или исходную (1)–(2), переведя ее в динамически причинную. Как правило, это достигается игнорированием обратно рассеянного поля. Однако к причинной задаче можно перейти без всяких приближений, если переформулировать краевую проблему (8), (10) в эквивалентную для уравнений погружения. Для этого, поскольку решение краевой задачи (8), (10) зависит от положения границы области неоднородностей L, к которой приходят нормальные волны от источника, действуя стандартным образом [10], следует рассмотреть параметрическую зависимость функций $G_m(r)$, $g_m(r)$ от L, то есть $G_m(r) = u_m(r; L)$, $g_m(r) = v_m(r; L)$. Тогда после дифференцирования уравнений (8) и условий (10) по L и сопоставления их с исходной краевой задачей (8), (10), в силу отмеченной линейности, получается система уравнений с начальными условиями, которую для наглядности анализа запишем подробно для m-й моды (конечно, легко представить ее в обобщенной матричной форме):

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial L}u_m(r; L) = \Big\{V_{mm}(L) - K_m(L)u_m(L; L) + \\ + D_m^{-1}(L)\sum_{l \neq m} V_{ml}(L)u_l(L; L)(1 - k_{lm}^0) + \\ + k_{lm}^0 D_l(L)]\Big\}u_m(r; L), \quad u_m(r; L)\big|_{L=r} = u_m(r; r);\end{gathered} \tag{11а}$$

$$K_m(L) = b_m(L)[(\kappa_m^0)^2 - \kappa_m^2(L)]/[\kappa_m^0 D_m(L)],$$

$$k_{lm}^0 = \kappa_l^0 b_m(L)/(\kappa_m^0 b_l(L));$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dL}u_m(L; L) = P_m(L) - K_m(L)u_m^2(L; L) + \\ + D_m^{-1}(L)\sum_{l \neq m} V_{ml}(L)[u_m(L; L)u_l(L; L)(1 - k_{lm}^0) + \\ + u_m(L; L)k_{lm}^0 D_l(L) - u_l(L; L)D_m(L)],\end{gathered} \tag{11б}$$

$$u_m(L; L)\big|_{L=L_0} = \kappa_m^0 D_m(L_0)/(\kappa_m^0 + \kappa_m^1);$$

$$P_m(L) = \kappa_m^0(D_m(L) - u_m(L; L))/b_m(L).$$

Аналогичные уравнения справедливы и для $v_m(r; L)$, откуда следует простая связь между v_m и u_m: $v_m(r; L) = u_m(r; L)u_m^{-1}(r; r)\{P_m(r) + \sum_l V_{ml}(r)[u_l(r; L)u_m(r; r) - u_m(r; L)u_l(r; r)]\}$. Функции $u_m(r; r)$, описываемые уравнениями Риккати (11б), представляют поле, возникающее в каждом r-сечении волновода при проходе m-й моды через это сечение. Уравнения погружения (11), как видно, уже являются замкнутыми для каждой из функций $u_m(r; L)$ и $v_m(r; L)$, причем v_m связана алгебраическим соотношением с u_m. Они удовлетворяют принципу динамической причинности и отличаются от уравнений, которые получаются для слоистых задач, тем, что в правых частях вместо неоднородностей среды фигурирует $\kappa_m(L)$ и входят суммы, учитывающие взаимодействие между модами. Для различных слоистых волновых задач уравнения погружения хорошо изучены и неоднократно решались как аналитически, так и численно (на-

пример, [7–10]). Обратим внимание на то, что полученные уравнения погружения (11), вообще говоря, описывают поля при произвольном расположении границы области неоднородностей L относительно источника. Исключение, при формулировке проблемы в цилиндрических координатах, составляет непосредственная окрестность точки источника ($\kappa_m^0 \varepsilon \ll 1$, $\varepsilon = L - r_0$), где горизонтальные части полей мод $G_m(r)$ и $g_m(r)$ имеют расходимости соответственно логарифмического и сферического типа. Этот факт, однако, не имеет физической значимости, поскольку вопрос отыскания полей в непосредственной близости к источнику выходит за рамки развиваемого подхода, а в двумерной постановке задачи подобной трудности вообще не возникает в силу отмеченной выше непрерывности полей в точке источника. Для всех же известных приближенных методов вычислений одним из ограничений является то, что рассмотрение справедливо только в дальней (волновой) зоне источника. Если граница L горизонтально-неоднородной области находится в этой зоне, то есть $\kappa_m^0 \varepsilon \gg 1$, то переходя к асимптотикам функций Ханкеля, легко получить $b_m(L) = -i$, $D_m(L) = 2B_m[2/\pi\kappa_m^0(L - r_0)]^{1/2}\exp[i\kappa_m^0(L - r_0) - i\pi/4]$, и упрощение уравнений (11):

$$K_m(L) = -i[(\kappa_m^0)^2 - \kappa_m^2(L)]/[\kappa_m^0 D_m(L)],$$
$$k_{lm}^0 = \kappa_l^0/\kappa_m^0; \quad P_m(L) = i\kappa_m^0(D_m(L) - u_m(L; L)). \tag{12}$$

Уравнения погружения (11)–(12) содержат богатую информацию о процессах рассеяния, и из них можно получить все известные приближения, упомянутые выше. В частности, проследим переход к очень популярному в акустике океана приближению ПУ. Для этого заметим, что нелинейные уравнения Риккати (11б) полностью описывают процессы прямого и обратного рассеяния волн в неоднородной среде. Чтобы пренебречь обратным рассеянием, следует опустить нелинейные члены в правых частях (11б) (с учетом (12)), в результате чего определение функции $u_m(r; r)$ упрощается. Тем самым осуществляется переход к рассмотрению однонаправленного распространения, описываемого уравнением (11а) с соответствующим начальным условием $u_m(r; r)$. Это эквивалентно описанию в приближении обобщенного ПУ, учитывающему рассеяние мод неоднородностями на любые углы, но не превышающие $\pi/2$. Примечательно, что в рамках развитого подхода в уравнениях погружения присутствует явное выражение для взаимодействия мод посредством сумм, а не псевдодифференциальный оператор $[\omega^2/c^2(z, r) + \partial^2/\partial z^2]^{1/2}$, с вычислением действия которого на функции сталкивается традиционное описание [3, 10–12]. Для работы с подобными операторами в настоящее время математическая теория развита недостаточно, их явные выражения для расчетов можно получить на основе фундаментальных решений волновых уравнений только в случае однородных сред [10], когда уравнения точно факторизуются. Акустиками широко используются различные дробно-рациональные аппроксимации данного оператора, которые формально имеют под собой лишь общие физические соображения и аналогии с рассеянием волн на те или иные углы [3, 11, 12]. Поэтому область применимости этих аппроксимаций, строго говоря, не определена, но совершенно очевидно, что она сильно зависит от класса функций, используемых в уравнениях, и сложности рассматриваемых акустических ситуаций, то есть в каждом случае требует специального исследования. Что касается возможных трудностей при моделировании уравнений (11)–(12), то они иного свойства и заключаются в числе мод, которые вносят реальный вклад в поле и при расчетах подлежат учету в суммах правых частей этих уравнений. Число мод зависит от конкретной акустической ситуации, но в действительности всегда ограничено. Оценки показывают, что по крайней мере $V_{ml}(r) \sim (\kappa_l - \kappa_m)^{-1}$ [2, 13]. Ясно, что в практическом плане предлагаемый подход наиболее привлекателен в ситуациях, когда мод не слишком много. В первую очередь это широкий круг задач для акустики мелкого моря и диапазона низких и средних частот, когда доминирующее влияние на звуковые поля оказывают неоднородности рельефа дна и структуры его параметров [13]. Как раз последние могут быть существенными в отличие от неоднородностей водной толщи, на практике имеющих достаточно плавный характер, вследствие чего распространение звука в глубоком океане зачастую хорошо описывается приближенными методами, например такими, как ПУ.

Если теперь в уравнениях (11)–(12) волновое число первой моды κ_1^0 заменить на $k_0 = \omega/c$ и считать, что для первых (скользящих) мод выполняется $(k_0 - \kappa_m^0)/\kappa_m^0 \ll 1$, то можно перейти к описанию в рамках традиционного ПУ, соответствующего малоугловому приближению. В действительности приведенное неравенство может быть справедливо для группы мод, когда значимых для распространения нормальных волн много, то есть на высоких частотах. Только в этом случае малоугловое ПУ будет учитывать взаимодействие таких мод. Для условий мелкого моря и диапазона низких частот вклад в поле, как правило, определяют одна-две первых моды. Поэтому сумму мод в правых частях (11б) следует опустить, тогда $u_m(L; L) = D_m(L)/2$, и уравнение (11а) с условием $u_m(r; r) = D_m(r)/2$ приводят к квадратурному представлению решения, которое можно получить непосредственно, если исходить из первоначальной

формулировки задачи для параболического уравнения.

Выше обращалось внимание на то, что с помощью уравнений погружения (11), вообще говоря, можно получить описание полей на любом расстоянии от источника. В этом смысле существует возможность в рамках уравнений погружения сформулировать задачу о поле источника, который сам находится в горизонтально-неоднородной области среды в точке $r = r_0$, $L < r_0 < L_0$. В некоторых случаях такая задача представляет интерес, и очевидно, что ее затруднительно рассмотреть известными приближенными методами, в том числе и на основе так называемого широкоугольного параболического уравнения, даже если среда плавно неоднородна. В то же время с точки зрения уравнений погружения в двумерной (x, z) постановке задачи никаких трудностей не возникает в силу непрерывности полей [10], и к полученным уравнениям (11)–(12) для каждой моды добавляется еще одно линейное уравнение [10], описывающее поле источника. В цилиндрических координатах неудобство записи аналогичных уравнений связано только с отмеченным выше обстоятельством расходимости полей в точке источника r_0, где каждая отдельная мода теряет смысл. Поэтому в данной ситуации из рассмотрения следует исключить некоторую ближайшую к источнику окрестность $\varepsilon = |r - r_0|$, например, в практическом плане $\varepsilon \sim 1$ м.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда горизонтальные неоднородности настолько плавные, что характерный масштаб изменения функций значительно превышает длину волны моды, так что $|\partial F_m(r)/\partial r| \ll |\kappa_m(r)F_m|$, где $F_m(r) = \{G_m, g_m\}$. Тогда в горизонтальной плоскости справедливо приближение ВКБ. При этом $g_m = i\kappa_m(r)G_m$ и вместо (8) остаются уравнения для определения одной из функций, например, G_m:

$$\frac{\partial}{\partial r}G_m(r) = i\kappa_m(r)G_m(r) - \sum_l G_l(r)V_{ml}(r), \qquad (13)$$

с очевидным начальным условием, соответствующим значению коэффициента моды в слоистой среде на дальних расстояниях от источника ($r_0 = 0$): $G_m(L) = B_m(2/\pi\kappa_m^0 L)^{1/2}\exp(i\kappa_m^0 L - i\pi/4)$. Обычной заменой $G_m(r) = B_m(r)\exp\{i\int_0^r dr\,\kappa_m(r)\}$, (13) преобразуются к уравнениям для медленно меняющихся амплитуд $B_m(r)$:

$$\frac{\partial}{\partial r}B_m(r) = -\sum_l B_l(r)V_{ml}(r)(\kappa_m/\kappa_l)^{1/2}\times \\ \times\exp\left\{i\int_0^r dr[\kappa_l(r) - \kappa_m(r)]\right\}. \qquad (14)$$

На первый взгляд непосредственных ограничений на число суммируемых членов (взаимодействующих мод) в правой части (14) нет, однако неявно это число ограничено требованиями ВКБ по медленности изменения амплитуд B_m на длине волны моды. Уравнения вида (14) при игнорировании обратного рассеяния и в приближении ВКБ были получены в работе [13] более сложным путем из уравнений (9) и использовались для качественной оценки условий применимости адиабатического приближения. Последнее непосредственно вытекает из (14), если пренебречь взаимодействием мод, положив в правой части $V_{ml}(r) = 0$. В этом случае $B_m(r) = B_m = \text{const}$, как в слоистой среде, а влияние горизонтальных неоднородностей учитывается только через зависимость собственных значений и функций от r в модовых разложениях (7). В связи с этим стоит заметить, что на низких частотах в мелком море, в тех случаях, когда реальный вклад в поле вносят одна-две скользящие моды, адиабатическое приближение может лучше описывать ситуацию, чем малоугловое ПУ, которое при этом также не учитывает взаимодействие мод, но имеет еще и искаженную (приближением малых углов) фазу мод в решении.

Подведем итог. Непосредственно из системы уравнений акустики вытекают уравнения первого порядка (8) для "горизонтальных частей" мод акустических полей давления и колебательной скорости, которые являются так же точными, как и обычно получаемые более сложные уравнения (9). Уравнения (8), для которых в общем случае возникает краевая задача (8), (10), эквивалентной переформулировкой приводятся к уравнениям погружения (11)–(12) с начальными условиями. С точки зрения дальнейших вычислений данные уравнения представляются гораздо более перспективными, чем уравнения (9). Если численное решение последних в настоящее время возможно, по-видимому, только конструированием конечно-разностных схем [3], со всеми нетривиальными проблемами, присущими этой процедуре, то к уравнениям (8), (10)–(12) может быть применено аналитико-численное моделирование [7, 8] на основе записи рекуррентных соотношений для пошагового интегрирования по горизонтальной координате. При этом в качестве решения получается не только поле давления, но и компоненты колебательной скорости, которые при традиционном рассмотрении можно определить только из уравнений (1) взятием производных. Дифференцирование же, как известно, является весьма нежелательной вычислительной процедурой. Следует также подчеркнуть, что для ряда важных в практическом плане приложений, например, двухслойной модели волновода Пекериса с переменной по трассе глубиной, функция $V_{ml}(r)$ имеет простое аналитическое выражение, в результате

чего решение полученных уравнений существенно упрощается. Наконец, важным обстоятельством является то, что в принципиальном плане развитый подход обобщается на описание трехмерно-неоднородных сред. Для этого последовательными модовыми разложениями исключаются из уравнений сначала вертикальная координата, как выполнено при переходе от (1) к (8), а затем, уже на основе получаемого двумерного уравнения типа (8), – одна из горизонтальных. Процедура решения при этом, естественно, усложняется за счет добавления дополнительного измерения, но в конкретных акустических ситуациях возможны оправданные упрощения, обусловленные характером неоднородностей в горизонтальной плоскости [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 264 с.
3. *Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H.* Computational ocean acoustics. AIP Press, 1994. 612 p.
4. *Evans R.B.* A coupled mode solution for acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variations of a penetrable bottom // Journ. Acoust. Soc. Am. 1983. V. 74. P. 188–195.
5. *Кудряшов В.М.* Звуковое поле в волноводе с наклонным дном // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 55–59.
6. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
7. *Гулин О.Э., Темченко В.В.* Аналитико-численный метод моделирования нестационарных волновых полей в слоистых средах // Журн. выч. матем. и мат. физ. 1997. Т. 37. № 4. С. 499–504.
8. *Gulin O.E., Yang D.* On the certain semi-analytical models of low-frequency acoustic fields in terms of scalar-vector description // Ch. Journ. Acoust. 2004. V. 23. № 1.
9. *Ярощук И.О., Гулин О.Э.* Метод статистического моделирования в задачах гидроакустики. Владивосток: Дальнаука, 2002. 320 с.
10. *Кляцкин В.И.* Метод погружения в теории распространения волн. М.: Наука, 1986. 256 с.
11. *Lee D., Pierce A.D., Shang E.-C.* Parabolic equation development in the twentieth century // Journ. Comp. Acoust. 2000. V. 8. № 4. P. 527–637.
12. *Авилов К.В.* Псевдодифференциальные параболические уравнения распространения звука в океане, плавно неоднородном по горизонтали, и их численное решение // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 1. С. 5–12.
13. *Кацнельсон Б.Г., Петников В.Г.* Акустика мелкого моря. М.: Наука, 1997. 191 с.

First-Order Equations for Wave Field Modeling in a Horizontally Inhomogeneous Ocean

O. E. Gulin

Il'ichev Pacific Oceanological Institute, ul. Baltiĭskaya 43, Vladivostok, 690041 Russia
e-mail: gulinoe@rambler.ru

Abstract—A mathematical model is developed for acoustic fields in a horizontally inhomogeneous oceanic medium with allowance for prominent inhomogeneities. On the basis of the system of equations of linear acoustics and the ideas of the method of transverse sections, causal equations of the first order that exactly describe the horizontal components of acoustic modes are derived. These equations offer a possibility to model the situations with nonsmooth inhomogeneities, when the known approximate methods are inappropriate. The equations are characterized by a number of important advantages, which include relative simplicity, physical clarity, and suitability for numerical simulations with the use of the existing algorithms designed for solving wave problems in layered media.