АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2006, том 52, № 1, с. 43–50

УДК 534.26

ОСОБЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И НЕПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

© 2006 г. Артур Дуда

Институт теоретической физики
Польша, Вроцлав, пл. Макса Борна 9
E-mail: ardud@poczta.onet.pl

Поступила в редакцию 22.01.04 г.

Заново анализируется задача о существовании продольных нормалей в плоскостях симметрии пьезоэлектрических кристаллов класса *mm2*. Для сред этого класса симметрии рассматриваются уравнения для компонент продольных нормалей, лежащих вне плоскостей симметрии. Показано, что непьезоэлектрические среды с ромбической симметрией могут иметь 4 или 8 выраженных акустических осей. Приведены примеры непьезоэлектрических упругих сред с моноклинной симметрией без акустических осей. Предложен метод определения компонент акустических осей для пьезоэлектрических сред произвольной симметрии. Метод использован для рассмотрения задачи об акустических осях в пьезоэлектрических средах класса *mm2*.

ВВЕДЕНИЕ

Нормали, вдоль которых может распространяться акустическая волна с векторами поляризации, перпендикулярными направлению распространения, называются особыми направлениями распространения. Они разделяются на продольные нормали, для которых вектор поляризации по крайней мере одной моды параллелен направлению распространения, и акустические оси, для которых фазовые скорости как минимум двух мод совпадают. Акустические оси также иногда называются вырожденными направлениями или особенностями. Изучение числа и ориентации особых направлений распространения важно для правильного описания основных акустических свойств среды. По этой причине они были предметом теоретических исследований в течение многих лет [1–27].

Борнис исследовал число и ориентацию продольных нормалей в кристаллах с тригональной, гексагональной, тетрагональной и кубической симметрией [2]. Хаткевич исследовал особые направления распространения в непьезоэлектрических средах, относящихся ко всем классам симметрии кроме триклинной, и вывел необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять нормаль для того, чтобы являться акустической осью. Возможные числа акустических осей и продольных нормалей, определенные Хаткевичем [3] для различных типов акустической симметрии, показаны в табл. 1.

Бруггер составил таблицу векторов поляризации и скоростей волн для сред с ромбической, тетрагональной, гексагональной и кубической симметрией [4]. Задача о минимальном числе продольных нормалей для непьезоэлектрических сред с произвольной симметрией была исследована Колоднером, Трусделлом и Федоровым [5–7]. Совани и др. [8] проанализировали задачу о продольных нормалях, лежащих в плоскостях симметрии упругой среды или в плоскостях, перпендикулярных осям симметрии. Сотская тщательно проанализировала число и ориентацию продольных нормалей и акустических осей для непьезоэлектрических сред с ромбической симметрией. Она пришла к выводу, что среды, принадлежащие к этому классу акустической симметрии, могут иметь 2, 6, 10 или 14 выраженных акустических осей [10]. Условия Хаткевича для существования акустической оси были переформулированы и развиты Альшицем [12, 13]. Масгрейв показал,

Таблица 1. Данные Хаткевича для числа продольных нормалей и акустических осей в непьезоэлектрических средах с различными типами акустической симметрии

Тип симметрии в среде	Возможное число продольных нормалей	Возможное число акустических осей
Моноклинная	17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3	16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2
Ромбическая	13, 9, 7, 5, 3	14, 10, 6, 2
Тригональная	13, 7	10, 4
Тетрагональная	13, 9, 5	9, 5, 1
Кубическая	13	7

что максимально возможное число акустических осей для непьезоэлектрической среды с ромбической симметрей равно 16 и что возможно существование ромбических сред с 12 выраженными акустическими осями [14]. Исследование поведения векторов поляризации акустических волн, распространяющихся в окрестности продольных нормалей, было проведено Гельбигом [16]. То обстоятельство, что в непьезоэлектрической среде с триклинной симметрией число продольных нормалей может быть равно любому нечетному числу не менее 3 и не более 13, было установлено Борисовичем и др. [17]. Бестужева и Даринский показали, что топологические индексы продольных нормалей могут дать основу для исследования условий их возникновения и исчезновения [18]. Дитри показал, что каждая продольная нормаль является направлением, для которого вектор потока энергии коллинеарен направлению распространения. Он также обсудил возможное применение этих результатов для определения упругих модулей анизотропных сред [19]. Богданов исследовал продольные нормали, лежащие в плоскостях системы координат для пьезоэлектрических кристаллов, принадлежащих к классу симметрии *mm2* [20]. Шенберг и Гельбиг пересмотрели задачу об акустических осях для сред с ромбической симметрией, которые удовлетворяют условиям так называемой "мягкой анизотропии" [21]. Можаев и др. [23] уточнили результаты Хаткевича, касающиеся акустических осей для сред с тригональной симметрией. Шувалов [24] показал, что свойства набора особых направлений распространения определяют конфигурацию поля поляризации акустических волн, распространяющихся в данной среде. Геймона и Гилормини [25] предложили простое доказательство утверждения Колоднера о том, что каждая непьезоэлектрическая среда должна иметь по крайней мере 3 продольных нормали.

Пьезоэлектричество в принципе может увеличить возможное количество особых направлений распространения. Недавно задача о продольных нормалях для пьезоэлектрической среды класса *mm2*, лежащих в координатных плоскостях, была проанализирована в интересной статье Богданова [20].

В данной работе впервые приведены примеры ромбических непьезоэлектрических сред, имеющих от 4 до 8 выраженных акустических осей, а также пример моноклинной непьезоэлектрической среды, не имеющей акустических осей. Уточнены некоторые результаты Богданова, касающиеся продольных нормалей для пьезоэлектрических сред класса *mm2*. Обсуждается общий метод определения акустических осей для пьезоэлектрических сред произвольной симметрии и рассматривается его применение для кристаллов класса *mm2*.

ПРОДОЛЬНЫЕ НОРМАЛИ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ КЛАССА *mm2*, ЛЕЖАЩИЕ В ПЛОСКОСТЯХ СИММЕТРИИ

Задача о продольных нормалях для пьезоэлектрических сред класса *mm2* была впервые исследована Богдановым [20]. Согласно его результатам продольные нормали в среде этого класса симметрии, лежащие в плоскости (010), определяются уравнением

$$a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0, \tag{1}$$

где

$$x = \cos^2\varphi,$$

$$a_1 = \frac{p^2 + \Delta\varepsilon(c_1 + c_2)}{\varepsilon_{33}},$$

$$a_2 = -\left(c_1 + c_2 + \frac{p^2 - p(e_{15} + e_{33}) + \Delta\varepsilon c_2}{\varepsilon_{33}}\right), \tag{2}$$

$$a_3 = c_2 - \frac{e_{33}(p - e_{15})}{\varepsilon_{33}}.$$

Здесь φ угол между осью OX и направлением распространения

$$\Delta\varepsilon = (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}), \tag{3}$$

$$p = 2e_{15} + e_{31} - e_{33}, \tag{4}$$

$$c_1 = C_{11} - C_{13} - 2C_{55}, \tag{5}$$

$$c_2 = C_{22} - C_{13} - 2C_{55}. \tag{6}$$

Компоненты продольных нормалей, лежащих в плоскости (100), могут быть получены соответствующей циклической перестановкой индексов материальных констант.

Прверка уравнения (6), полученного Богдановым, показала, что оно содержит небольшую ошибку: в правильной форме оно имеет вид

$$c_2 = C_{33} - C_{13} - 2C_{55}. \tag{7}$$

Как следствие, продольные нормали, лежащие в плоскостях (010) и (100), которые были определены Богдановым для набора материальных констант (в единицах СИ)

$$C_{11} = 15.0 \times 10^{10}, \quad C_{22} = 13.4 \times 10^{10},$$

$$C_{33} = 14.4 \times 10^{10},$$

$$C_{12} = 2.1 \times 10^{10}, \quad C_{13} = 2.6 \times 10^{10},$$

$$C_{23} = 3.2 \times 10^{10},$$

$$C_{44} = 4.9 \times 10^{10}, \quad C_{55} = 5.2 \times 10^{10}, \tag{8}$$

$$C_{66} = 5.0 \times 10^{10},$$

$$e_{15} = 0.82, \quad e_{24} = 0.73, \quad e_{31} = 0.26,$$

$$e_{32} = 0.17, \quad e_{33} = 0.47,$$

$$\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_0} = 6, \quad \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_0} = 7, \quad \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_0} = 8, \quad \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{12},$$

также неверны. Богданов нашел, что плоскость (010) в квадранте, где $n_1 > 0$ и $n_2 > 0$, содержит две продольные нормали, образующие углы 33.6° и 51.6° с осью OX, в то время как мы нашли, что эта плоскость содержит только одну продольную нормаль, образующую с осью OX угол 36.8°. Для плоскости (100) в квадранте, где $n_3 > 0$ и $n_2 > 0$, мы обнаружили одну продольную нормаль с декартовыми координатами [0, 0.882, 0.471], в то время как, согласно Богданову, эта плоскость не должна содержать продольных нормалей.

ПРОДОЛЬНЫЕ НОРМАЛИ В СРЕДАХ КЛАССА *mm2*, ЛЕЖАЩИЕ ВНЕ ПЛОСКОСТЕЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Предположим, что **n** есть продольная нормаль, лежащая вне плоскости OXY, а Γ_{ij} – элементы матрицы распространения. Тогда удовлетворяется следующее уравнение:

$$\sum_{j=1}^{3} \Gamma_{ij} n_j = \lambda n_i, \tag{9}$$

где λ действительное положительное число. Это уравнение может быть записано в виде

$$[n_1, n_2, n_3] = \left[\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{3}\Gamma_{1j}n_j, \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{3}\Gamma_{2j}n_j, \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{3}\Gamma_{3j}n_j\right]. \tag{10}$$

Векторы, входящие в обе части вышеприведенных уравнений, являются единичными векторами. Если $[a_1, a_2, a_3]$ и $[b_1, b_2, b_3]$ единичные векторы с ненулевыми третьими компонентами, то они равны тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$\frac{b_1}{b_3} = \frac{a_1}{a_3}, \quad \frac{b_2}{b_3} = \frac{a_2}{a_3}. \tag{11}$$

Таким образом, уравнение (10) эквивалентно выражению

$$\frac{\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{3}\Gamma_{1j}n_j,}{\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{3}\Gamma_{3j}n_j,} = \frac{n_1}{n_3}, \quad \frac{\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{3}\Gamma_{2j}n_j,}{\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{3}\Gamma_{3j}n_j,} = \frac{n_2}{n_3}. \tag{12}$$

Для упругих сред рассматриваемой симметрии система уравнений, приведенных выше, эквивалентна уравнениям

$$\begin{aligned} A_4 n_1^4 + A_2 n_1^2 + A_0 &= 0, \\ B_4 n_1^4 + B_2 n_1^2 + B_0 &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
A_4 &= -2C_{55}\varepsilon_{11} - e_{31}^2 + C_{11}\varepsilon_{11} - 2e_{15}e_{31} - C_{13}\varepsilon_{11}, \\
A_2 &= (-2C_{55}\varepsilon_{22} - C_{13}\varepsilon_{22} - 2C_{44}\varepsilon_{11} - 2e_{24}e_{31} - \\
&- 2e_{31}e_{32} - C_{23}\varepsilon_{11} + 2C_{66}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} + C_{12}\varepsilon_{11} - \\
&- 2e_{15}e_{32})n_2^2 + (C_{11}\varepsilon_{33} - C_{33}\varepsilon_{11} + 2e_{15}e_{31} - \\
&- 2e_{15}e_{33} - C_{13}\varepsilon_{33} - 2e_{31}e_{33} - 2C_{55}\varepsilon_{33} + \\
&+ 4e_{15}^2 + 2C_{55}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{11})n_3^2, \\
A_0 &= (-2C_{44}\varepsilon_{22} - C_{23}\varepsilon_{22} - 2e_{24}e_{32} + 2C_{66}\varepsilon_{22} - \\
&- e_{32}^2 + C_{12}\varepsilon_{22})n_2^4 + (-2C_{44}\varepsilon_{33} + 2C_{66}\varepsilon_{33} + \\
&+ 4e_{24}e_{15} - C_{23}\varepsilon_{33} + C_{12}\varepsilon_{33} - 2e_{24}e_{33} - 2e_{32}e_{33} + \\
&+ 2C_{55}\varepsilon_{22} - C_{33}\varepsilon_{22} + 2e_{15}e_{32} + C_{13}\varepsilon_{22})n_2^2 n_3^2 + \\
&+ (2e_{15}e_{33} + 2C_{55}\varepsilon_{33} - C_{33}\varepsilon_{33} - e_{33}^2 + C_{13}\varepsilon_{33})n_3^4,
\end{aligned} \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned}
B_4 &= -e_{32}^2 - 2e_{24}e_{32} + C_{22}\varepsilon_{22} - C_{23}\varepsilon_{22} - 2C_{44}\varepsilon_{22}, \\
B_2 &= (-2e_{24}e_{31} - C_{13}\varepsilon_{22} - C_{23}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{22}\varepsilon_{11} - \\
&- 2C_{55}\varepsilon_{22} - 2e_{31}e_{32} + 2C_{66}\varepsilon_{22} - 2C_{44}\varepsilon_{11} - 2e_{15}e_{32})n_1^2 + \\
&+ (-C_{23}\varepsilon_{33} + C_{22}\varepsilon_{33} - 2e_{24}e_{33} + C_{23}\varepsilon_{22} - C_{33}\varepsilon_{22} + \\
&+ 4e_{24}^2 - 2e_{32}e_{33} + 2e_{24}e_{32} + 2C_{44}\varepsilon_{22} - 2C_{44}\varepsilon_{33})n_3^2, \\
B_0 &= (-2e_{15}e_{31} + 2C_{66}\varepsilon_{11} - 2C_{55}\varepsilon_{11} - e_{31}^2 - C_{13}\varepsilon_{11} + \\
&+ C_{12}\varepsilon_{11})n_1^4 + (C_{12}\varepsilon_{33} + 2C_{44}\varepsilon_{11} - 2e_{31}e_{33} + C_{23}\varepsilon_{11} - \\
&- 2C_{55}\varepsilon_{33} - C_{33}\varepsilon_{11} + 4e_{15}e_{24} + 2C_{66}\varepsilon_{33} - \\
&- C_{13}\varepsilon_{33} - 2e_{15}e_{33} + 2e_{24}e_{31})n_3^2 n_1^2 + \\
&+ (-e_{33}^2 + C_{23}\varepsilon_{33} - C_{33}\varepsilon_{33} + 2C_{44}\varepsilon_{33} + 2e_{24}e_{33})n_3^4.
\end{aligned} \tag{15}$$

Система уравнений (10) удовлетворяется только для тех нормалей **n**, для которых справедливо уравнение

$$\begin{aligned}
&A_0^2 B_4^2 - 2A_0A_4B_0B_4 + A_4^2B_0^2 - A_0A_2B_2B_4 - \\
&- A_2A_4B_0B_2 + A_0A_4B_2^2 + A_2^2B_0B_4 = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Используя написанные уравнения, можно определить все свободные продольные нормали для рассматриваемой среды. Для примера определим

Таблица 2. Число продольных нормалей и акустических осей в непьезоэлектрических средах с различными типами акустической симметрии

Тип симметрии в среде	Возможное число продольных нормалей	Возможное число акустических осей
Моноклинная	13, 11, 9, 7, 5, 3	16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0
Ромбическая	13, 9, 7, 5, 3	16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0
Тригональная	13, 7	16, 10, 4
Тетрагональная	13, 9, 5	9, 5, 1
Кубическая	13	7

продольные нормали в $LiGaO_2$. Этот материал характеризуется следующим набором материальных констант [28]:

$$C_{11} = 140, \quad C_{22} = 120, \quad C_{33} = 140,$$
$$C_{44} = 57.1, \quad C_{44} = 47.4,$$
$$C_{66} = 69.0, \quad C_{12} = 14, \quad C_{13} = 28, \quad C_{23} = 31,$$
$$\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_0} = 7.0, \quad \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_0} = 6.5, \quad \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_0} = 8.3, \tag{17}$$
$$e_{15} = -0.32, \quad e_{24} = -0.34, \quad e_{31} = -0.17,$$
$$e_{32} = -0.31, \quad e_{33} = 0.96, \quad \rho = 4187.$$

Решая полученную выше систему уравнений, мы получаем компоненты продольных нормалей, лежащих вне координатных плоскостей в рассматриваемом соединении: [0.458, 0.610, 0.647], [–0.458, 0.610, 0.647], [0.458, –0.610, 0.647], и [–0.458, –0.610, 0.647].

ПРИМЕР НЕПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С МОНОКЛИННОЙ СИММЕТРИЕЙ БЕЗ АКУСТИЧЕСКИХ ОСЕЙ

Альшиц и Лоте [12] показали, что среды с ромбической симметрией, в которых упругие постоянные удовлетворяют условиям

$$C_{33} \gg C_{55} > C_{44} > C_{11} > C_{66} > C_{22} > 0 \tag{18}$$

не имеют акустических осей. Буланже и Хейес [22] привели пример ромбической среды, в которой диагональные элементы матрицы упругих постоянных удовлетворяют уравнениям (18), а недиагональные элементы малы, но не равны нулю. Следуя их методу рассмотрения, мы удостоверились, что моноклинная среда, характеризуемая набором упругих постоянных

$$C_{11} = 86.66, \quad C_{22} = 75.45, \quad C_{33} = 4000,$$
$$C_{44} = 90.45, \quad C_{55} = 95.23$$
$$C_{66} = 81.12, \quad C_{12} = -25, \quad C_{13} = -10, \tag{19}$$
$$C_{23} = -24, \quad C_{16} = 0.9, \quad C_{26} = 0.69,$$
$$C_{36} = -1.69, \quad C_{45} = 2.0$$

не имеет акустических осей.

АКУСТИЧЕСКИЕ ОСИ В НЕПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ С РОМБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Как уже упоминалось, согласно Хаткевичу и Сотской [10, 11] в среде с ромбической симметрией число возможных акустических осей равно 14, 10, 6, или 2. Альшиц показал, что можно найти пример ромбической среды, в которой акустические оси полностью отсутствуют [13]. Примеры ромбических сред с 12 и 16 выраженными акустическими осями были приведены в [14, 22]. Ниже рассмотрены примеры ромбических сред с 4 или 8 выраженными осями.

Рассмотрим среду со следующим набором упругих постоянных:

$$C_{11} = 86.66, \quad C_{22} = 75.45, \quad C_{33} = 4000,$$
$$C_{44} = 90.45,$$
$$C_{55} = 95.23, \quad C_{66} = 81.12, \quad C_{12} = -25, \tag{20}$$
$$C_{13} = -10, \quad C_{23} = -24.0.$$

Эта среда имеет только 4 акустические оси с компонентами: [0.2152, 0.9765, 0], [0.2152, –0.9765, 0], [–0.9797, 0.2006, 0], и [–0.9797, –0.2006, 0].

Теперь приведем пример набора упругих постоянных, при которых имеется 8 акустических осей:

$$C_{11} = 107, \quad C_{22} = 105, \quad C_{33} = 500,$$
$$C_{44} = 108,$$
$$C_{55} = 109.1, \quad C_{66} = 106, \quad C_{12} = 6, \tag{21}$$
$$C_{13} = 7, \quad C_{23} = 5.$$

Такая среда имеет 4 акустические оси, лежащие в плоскости OXY, и 4 акустические оси в плоскости OXZ. Они имеют следующие компоненты: [0.02187, 0.99976, 0], [–0.99976, –0.02279, 0], [–0.02187, 0.99976, 0], [0.99974, –0.02279, 0], [–0.1786, 0, –0.9839], [0.1786, 0, –0.9839], [–0.99988, 0, –0.01539], и [0.99988, 0, –0.01539]. Плоскость OYZ не содержит акустических осей. Среда также не

содержит акустических осей, лежащих вне координатных плоскостей.

В табл. 2 представлен исправленный вариант таблицы Хаткевича из работы [3] и собраны возможные числа продольных нормалей и акустических осей для непьезоэлектрических сред. Между данными табл. 2 и данными из таблицы Хаткевича имеются следующие различия:

1. Для сред с тригональной симметрией можно получить 16 акустических осей как следствие соображений, приведенных в статье Можаева и др. [23].

2. Максимальное число продольных нормалей в моноклинной среде равно 13, а не 17 [27].

3. Альшиц и Лоте показали, что среды с ромбической симметрией, в которых упругие постоянные удовлетворяют условиям

$$C_{33} \gg C_{55} > C_{44} > C_{11} > C_{66} > C_{22} > 0, \qquad (22)$$

вообще не имеют акустических осей, т.е. минимально возможное число акустических осей в среде с ромбической симметрией равно 0 [13].

4. В статьях [14, 22] даны примеры ромбических сред с 12 или 16 выраженными акустическими осями.

5. В этой главе приводились примеры ромбических сред с 4 и 8 выраженными акустическими осями.

6. Выше приводился пример моноклинной среды без акустических осей.

АКУСТИЧЕСКИЕ ОСИ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Влияние пьезоэлектричества на распространение акустических волн в упругих средах было предметом исследования многих авторов. В частности, Любимов [9] исследовал влияние пьезоэлектричества на фазовую скорость акустической волны и сформулировал условие, которому должна удовлетворять нормаль **n**, если она является акустической осью. Согласно Любимову, направление **n** является акустической осью в том и только в том случае, если оно удовлетворяет уравнению

$$4F_1^3(n) - F_2^2(n) = 0, \qquad (23)$$

где $F_1(n)$ и $F_2(n)$ – сложные алгебраические функции, зависящие от компонент направления распространения **n** и элементов тензоров упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных. Эти функции не приводятся здесь в явной форме ввиду их сложности. Для заданного набора материальных констант функция $F_1(n)$ представляет собой однородную алгебраическую функцию восьмой степени от компонент направления распространения, тогда как степень функции $F_2(n)$ равна 12, так что степень уравнения равна 24.

Хотя Любимов непосредственно не обсуждал в своей статье задачу определения компонент вырожденных направлений, а также максимально возможного числа этих направлений, полученное им уравнение (23) в принципе может быть применено для решения этих задач. Каждая упругая среда с симметрией, отличной от изотропной или гексагональной, в общем случае имеет конечное число акустических осей. Так как, согласно Любимову, направление **n** является акустической осью тогда и только тогда, когда удовлетворяется уравнение (23) для этой нормали, то для среды, имеющей конечное число акустических осей, число решений данного уравнения тоже будет конечным. Тогда и число корней функции, стоящей в левой части этого уравнения, тоже конечно. В [27] было показано, что если для непрерывной функции $F(x, y)$, определенной на R^2, среди множества значений этой функции можно найти хотя бы одну пару чисел с разными знаками, то эта функция имеет бесконечное множество корней как следствие теоремы Ролла. Тем же способом можно доказать, что тот факт, что число корней функции

$$G(n) \equiv 4F_1^3(n) - F_2^2(n) \qquad (24)$$

конечно, означает, что все значения этой функции неположительны или все неотрицательны, и таким образом, все корни уравнения (23) имеют кратность выше единицы. С другой стороны, степень рассматриваемого уравнения высока. По этой причине можно ожидать, что решение этого уравнения связано с большими трудностями в вычислениях, особенно для сред с триклинной или моноклинной симметрией. В любом случае, в известной нам литературе не имеется примеров практического применения данного метода для определения вырожденных направлений в таких средах, и статья Любимова не имела целью рассматривать эту задачу. Поэтому здесь мы предлагаем другой подход, основанный на методах, использованных ранее для определения компонент продольных нормалей в непьезоэлектрических средах [27].

Направление **n** является акустической осью тогда и только тогда, когда элементы матрицы распространения в этом направлении удовлетворяют одному из нижеприведенных условий [3]:

Условие А

Удовлетворяется система уравнений

$$\begin{cases} (\Gamma_{11} - \Gamma_{22})\Gamma_{23}\Gamma_{13} + \Gamma_{12}(\Gamma_{23}^2 - \Gamma_{13}^2) = 0, \\ (\Gamma_{11} - \Gamma_{33})\Gamma_{23}\Gamma_{12} + \Gamma_{13}(\Gamma_{23}^2 - \Gamma_{12}^2) = 0. \end{cases} \qquad (25)$$

и все недиагональные элементы матрицы распространения не равны нулю.

Условие B

Удовлетворяется хотя бы одна из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases}\Gamma_{23} = 0,\\ \Gamma_{13} = 0,\\ (\Gamma_{11}-\Gamma_{33})(\Gamma_{22}-\Gamma_{33})-\Gamma_{12}^2 = 0,\end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases}\Gamma_{12} = 0,\\ \Gamma_{23} = 0,\\ (\Gamma_{33}-\Gamma_{22})(\Gamma_{11}-\Gamma_{22})-\Gamma_{13}^2 = 0,\end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases}\Gamma_{13} = 0,\\ \Gamma_{12} = 0,\\ (\Gamma_{33}-\Gamma_{11})(\Gamma_{22}-\Gamma_{11})-\Gamma_{23}^2 = 0.\end{cases} \tag{28}$$

Для пьезоэлектрической среды компоненты матрицы распространения имеют вид

$$\Gamma_{il} = \rho^{-1}\sum_{j,m=1}^{3}\left(C_{ijlm}^{E} + \frac{\sum_{r,s=1}^{3} e_{ijr}n_r e_{lms}n_s}{\sum_{p,q=1}^{3}\varepsilon_{pq}n_p n_q}\right)n_j n_m, \tag{29}$$

где ρ – плотность среды, C_{ijlm}^{E} – тензор упругих постоянных, e_{ijr} – тензор пьезоэлектрических постоянных и ε_{pq} – тензор диэлектрических постоянных.

Предположим, что $P_r(\Gamma_{ij})$ однородная полиномиальная функция от элементов матрицы распространения для пьезоэлектрической среды и что степень этой функции r. Тогда для заданного набора материальных констант уравнение

$$P_r(\Gamma_{ij}) = 0 \tag{30}$$

может быть преобразовано в однородное алгебраическое уравнение степени $4r$ относительно переменных n_1, n_2, и n_3 путем умножения обеих частей уравнения (30) на $(\sum_{p,q=1}^{3}\varepsilon_{pq}n_p n_q)^r$. Это уравнение легко решается посредством перехода к переменным $x \equiv \frac{n_1}{n_3}$, $y \equiv \frac{n_2}{n_3}$ и решения полученной системы алгебраических уравнений с помощью метода, ранее примененного для определения компонент продольных нормалей в непьезоэлектрических средах [27].

Так как левые части всех систем (25)–(28) являются однородными алгебраическими функциями компонент матрицы распространения для пьезоэлектрических сред, можно применить этот метод для определения компонент акустических осей. Метод может использоваться для сред с любой симметрией. В следующих подразделах мы используем его для анализа акустических осей в средах класса *mm2*.

Чтобы продемонстрировать применимость вышеописанного метода для расчета акустических осей, мы определим акустические оси в $Li_2SO_4{*}H_2O$, где

$$C_{11} = 54.9,\quad C_{22} = 70.5,\quad C_{33} = 61.8,$$
$$C_{44} = 14.0,\quad C_{55} = 24.2,$$
$$C_{66} = 27.0,\quad C_{12} = 26.3,\quad C_{13} = 11.4,$$
$$C_{23} = 17.1,\quad C_{15} = 6.5,\quad C_{25} = 15.7,$$
$$C_{35} = -5.2,\quad C_{46} = -26.5 \tag{31}$$
$$\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_0} = 5.6,\quad \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_0} = 10.3,\quad \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_0} = 6.5,$$
$$e_{14} = -0.052,\quad e_{16} = -0.083,\quad e_{21} = 0.238,$$
$$e_{22} = 0.81,\quad e_{23} = 0.171,\quad e_{25} = -0.015,$$
$$e_{34} = -0.015,\quad e_{36} = 0.031.$$

Следуя процедуре, описанной выше, мы получаем, что акустическими осями являются следующие нормали: [0.191, –0.276, 0.942], [0.191, 0.276, 0.942], [0.744, 0.617, 0.258], [0.744, –0.617, 0.258], и [–0.127, 0, 0.992].

Акустические оси в ромбических средах класса mm2, лежащие в координатных плоскостях

Можно легко удостовериться, что для сред класса *mm2* условие A невыполнимо.

В плоскости OXZ величины Γ_{12} и Γ_{23} обращаются в 0, и направление **n** является акустической осью тогда и только тогда, когда удовлетворяется следующая система уравнений для этого направления:

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^{XZ} n_1^{2(4-i)} n_2^{2i} = 0, \tag{32}$$

где A_0^{XZ}, A_1^{XZ}, A_2^{XZ}, A_3^{XZ}, и A_4^{XZ} – функции материальных констант, характеризующих среду. Явный вид функций здесь не приводится ввиду его сложности.

Аналогичным условиям должны удовлетворять акустические оси, лежащие в плоскостях OXY и OYZ.

Акустические оси в ромбических средах класса mm2, лежащие вне координатных плоскостей

Вне координатных плоскостей система (30) для сред класса *mm2* может быть записана в виде

$$\sum_{i,j=1}^{9} A_{ij} n_1^i n_2^j n_3^{9-j} = 0, \tag{33}$$

$$\sum_{i,j=1}^{9} B_{ij} n_1^i n_2^j n_3^{9-j} = 0, \tag{34}$$

где A_{ij} и B_{ij} – сложные функции, зависящие только от материальных констант, характеризующих среду.

Можно легко удостовериться, что в пьезоэлектрической среде класса *mm2* нормаль **n**, лежащая вне плоскостей симметрии, является акустической осью тогда и только тогда, когда удовлетворяется система уравнений (33), (34) для этой среды и, в то же время, для этой нормали нельзя найти пару равных нулю недиагональных элементов матрицы распространения. Таким образом, нормаль **n**, лежащая вне координатных плоскостей, является акустической осью тогда и только тогда, когда удовлетворяется система уравнений (33), (34) и не удовлетворяется ни одна из следующих систем:

$$\begin{cases} (C_{44}\varepsilon_{33} + C_{23}\varepsilon_{33} + 2e_{24}e_{33})n_3^2 + \\ + (C_{44}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{22} + 2e_{24}e_{32})n_2^2 + \\ + (C_{44}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{11} + 2e_{24}e_{31})n_1^2 = 0, \\ (C_{55}\varepsilon_{33} + C_{13}\varepsilon_{33} + 2e_{15}e_{33})n_3^2 + \\ + (C_{55}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{11} + 2e_{15}e_{32})n_2^2 + \\ + (C_{55}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{22} + 2e_{15}e_{31})n_1^2 = 0, \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} (C_{44}\varepsilon_{33} + C_{23}\varepsilon_{33} + 2e_{24}e_{33})n_3^2 + \\ + (C_{44}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{22} + 2e_{24}e_{32})n_2^2 + \\ + (C_{44}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{11} + 2e_{24}e_{31})n_1^2 = 0, \\ (C_{66}\varepsilon_{33} + C_{12}\varepsilon_{33} + 2e_{15}e_{24})n_3^2 + \\ + (C_{66}\varepsilon_{22} + C_{12}\varepsilon_{22})n_2^2 + (C_{66}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{11})n_1^2 = 0, \end{cases} \tag{36}$$

$$\begin{cases} (C_{66}\varepsilon_{33} + C_{12}\varepsilon_{33} + 2e_{15}e_{24})n_3^2 + \\ + (C_{66}\varepsilon_{22} + C_{12}\varepsilon_{22})n_2^2 + (C_{66}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{11})n_1^2 = 0, \\ (C_{55}\varepsilon_{33} + C_{13}\varepsilon_{33} + 2e_{15}e_{33})n_3^2 + \\ + (C_{55}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{11} + 2e_{15}e_{32})n_2^2 + \\ + (C_{55}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{22} + 2e_{15}e_{31})n_1^2 = 0, \end{cases} \tag{37}$$

Левые части данных систем уравнений являются соответствующими недиагональными элементами матрицы распространения для пьезоэлектрической среды класса *mm2*, умноженной на $\sum_{p,q=1}^{3} \varepsilon_{pq} n_p n_q$.

Пример

В качестве примера определим акустические оси для $LiGaO_2$. При помощи вышеприведенных уравнений было найдено, что рассматриваемая среда не имеет акустических осей, лежащих вне координатных плоскостей. В плоскости *OYZ* она имеет акустические оси [0, 0.577, 0.817] и [0, 0.577, –0.817].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sakadi Z.* Elastic waves in crystals // Proc. Physico-Mathematical Soc. of Japan. 1941. V. 23. P. 539–547.
2. *Borgnis F.E.* Specific directions of longitudinal wave propagation in anisotropic media // Physical Review. 1955. V. 98. № 4. P. 1000–1005.
3. *Khatkevich A.G.* About specific directions for elastic waves in crystals // Kristallografiya. 1964. V. 9. № 5. P. 690–695.
4. *Brugger K.* Pure modes for elastic waves in crystals // J. Appl. Phys. 1965. V. 36. № 3. P. 759–768.
5. *Kolodner I.* Existence of longitudinal waves in anisotropic media // J. Acoust. Soc. Am. 1966. P. 729–730.
6. *Truesdell C.* Existence of longitudinal waves //J. Acoust. Soc. Am. 1966. V. 40. P. 730–730.
7. *Fedorov F.I.* Theory of elastic waves in crystals. New York, Plenum Press. 1968. P. 386.
8. *Sovani A.V., Subramanyan S.V., Gopal E.S.R.* Decoupled elastic wave propagation in crystals // Indian J. Pure and Appl. Phys. 1970. V. 8. № 6. P. 304–306.
9. *Lyubimov V.N.* Elastic waves in crystals when there is a piezoelectric effect // Fizika Tverdogo Tela. 1970. V. 12. № 3. P. 947–949.
10. *Sotskaya Kh.N.* Special directions for elastic waves in orthorhombic crystals // Vestsi Akademi Navuk Belaruskai SSR, Seryya Fizika-matematychnykh navuk 1975. № 5. P. 72–81.
11. *Khatkevich A.G.* About the classification of crystals according to acoustical properties // Kristallografiya. 1977. V. 22. P. 1232–1239.
12. *Alshitz V.I., Lothe E.* Elastic Waves in Triclinic Crystals I // Kristallografiya. 1979. V. 24. № 4. P. 672–682.
13. *Alshitz V.I., Lothe E.* Elastic Waves in Triclinic Crystals II // Kristallografiya. 1979. V. 24. № 4. P. 683–693.
14. *Musgrave M.J.P.* Acoustic axes in orthorhombic media // Proc. R. Soc. Lond. A. 1985. V. 401. № 1820. P. 131–143.
15. *Norris A.N.* On the acoustic determination of the elastic moduli of anisotropic solids and acoustic conditions for the existence of symmetry planes // QJMAM 1989. V. 42. P. 413–426.

16. *Helbig K.* Longitudinal normals in media of arbitrary anisotropy // Geophysics 1993. V. 58, № 5. P. 680–691.
17. *Borisovich Yu.G., Darinskii B.M., Kunakovskaya O.V.* Application oftopological methods to estimate the number of longitudinal elastic waves in crystals // Theor. Mat. Fiz. 1993. V. 94. № 1. P. 146–152.
18. *Bestuzheva N.P., Darinskii B.M.* Longitudinal normals of elastic waves in crystals // Kristallographiya. 1993. V. 38. № 5. P. 15–25.
19. *Ditri J.J.* On the propagation of pure plane waves in anisotropic media // Appl. Phys. Lett. 1994. V. 64. № 6. P. 701–703.
20. *Bogdanov S.V.* Longitudinal normals in orthorhombic crystals // Akusticheskii Zhurnal. 1995. V. 41. № 1. P. 27–33.
21. *Schoenberg M., Helbig K.* Orthorhombic media: Modelling elastic wave behavior in a vertically fractured earth // Geophysics. 1997. V. 62. № 6. P. 1954–1974.
22. *Boulanger Ph., Hayes M.* Acoustic axes for elastic waves in crystals: Theory and applications // Proc. R. Soc. Lond. A. 1998. V. 454. № 1977. P. 2323–2346.
23. *Mozhaev V.G., Bosia F., Weihnacht M.* Types of leaky SAW degeneracy in crystals, in: Proceedings of 1998 IEEE Ultasonics Symposium. IEEE. New York, 1998. P. 143–148.
24. *Shuvalov A.L.* Topological features of the polarization fields of plane acoustic waves in anisotropic media // Proc. Roy. Soc. London A. 1998. V. 454. № 1979. P. 2911–2947.
25. *Geymonat G., Gilormini P.* On the existence of longitudinal plane waves in general elastic anisotropic media // J. Elasticity. 1999. V. 54. № 3. P. 253–266.
26. *Mozhaev V.G., Bosia F., Weihnacht M.* Oblique acoustic axes in trigonal crystals // Journal of Computational Acoustics. 2001. V. 9. № 3. P. 1147–1161.
27. *Duda A., Paszkiewicz T.* Number of longitudinal normals and degenerate directions for triclinic and monoclinic media // Eur. Phys. J. B. 2003. V. 31. P. 327–331.
28. *Every A.G., McCurdy A.K.* Phonon focusing in piezoelectric crystals // Physical Review B. 1987. V. 36. P. 1432–1447.

Specific Propagation Directions of Acoustic Waves for Piezoelectric and Nonpiezoelectric Media

Artur Duda

Institute of Theoretical Physics, University of Wroclaw, pl. Maxa Borna 9
e-mail: ardud@poczta.onet.pl

Abstract—I reanalyze the problem of the existence of longitudinal normals inside the symmetry planes of piezoelectric crystals belonging to the symmetry class *mm2*. The equations determining components of longitudinal normals situated outside the symmetry planes for media of this symmetry are discussed. It is proven that nonpiezoelectric media of rhombic symmetry could have 4 or 8 distinct acoustic axes. Examples of nonpiezoelectric elastic media of monoclinic symmetry without acoustic axes are given. The method of determination of the components of acoustic axes for piezoelectric media of arbitrary symmetry is presented. With the help of this method, I discuss the problem of acoustic axes for piezoelectric media of the symmetry class *mm2*.