

УДК 534.26

ПОГЛОЩЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН МОНОПОЛЬНО-ДИПОЛЬНЫМИ РЕЗОНАТОРАМИ В ПЛАСТИНЕ

© 2006 г. А. Д. Лапин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН

117036 Москва, ул. Шверника 4

E-mail: mironov@akin.ru

Поступила в редакцию 15.04.05 г.

PACS: 43.20.Nq

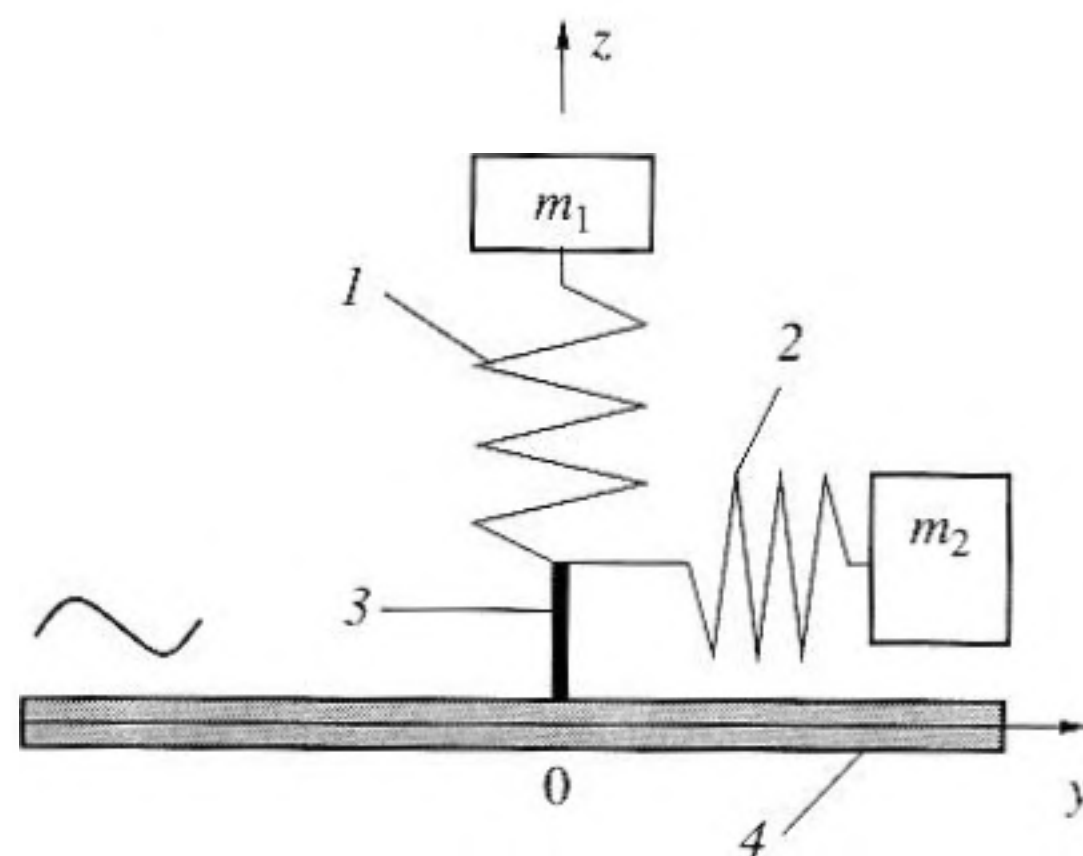
В работе [1] был исследован простейший резонатор для изгибных волн в стержне, реагирующий не только на смещение, но и на наклон (производную смещения) оси этого стержня. Он представляет собой конструкцию из двух пружин с грузами, присоединенных общим жестким (неизгибающимся) стерженьком к упругому стержню, по которому бежит изгибная волна. Одна из этих пружин расположена перпендикулярно стержню, другая пружина расположена параллельно стержню. Показано, что при определенном трении этот одиночный резонатор монополюльно-дипольного типа полностью поглощает падающую изгибную волну резонансной частоты в упругом стержне. Можно ожидать, что цепочкой одинаковых монополюльно-дипольных резонаторов удастся полностью поглотить плоскую изгибную волну в пластине. Ниже выполнены необходимые расчеты и определены параметры резонаторов, обеспечивающих полное поглощение этой волны.

Пусть пластина лежит в плоскости xy и к ней вдоль координатной оси x в точках $x = x_s \equiv sL$, где $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, присоединены одинаковые резонаторы монополюльно-дипольного типа, горизонтальные пружины этих резонаторов расположим параллельно оси y . На рисунке изображен такой резонатор, где 1 – вертикальная пружина с коэффициентом упругости $\kappa_1(1 - i\varepsilon_1)$, 2 – горизонтальная пружина с коэффициентом упругости $\kappa_2(1 - i\varepsilon_2)$, 3 – жесткий соединительный стерженец длины H , 4 – пластина, по которой бежит изгибная волна. Пружина 1 с грузом m_1 является монополюльным резонатором, реагирующим на смещение пластины; пружина 2 с грузом m_2 является дипольным резонатором, реагирующим на производную смещения по координате y ; ε_1 и ε_2 – соответственно коэффициенты диссипации монополюльного и дипольного резонаторов. Из полупространства $y < 0$ на

резонаторы падает гармоническая изгибная волна со смещением

$$w_0(x, y) = \exp[i(k_x^0 x + k_y^0 y)], \quad (1)$$

где k_x^0 и k_y^0 – соответственно проекции волнового вектора падающей волны на оси x и y , временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем. Под действием этой волны резонаторы колеблются и создают на пластине точечные нормальные силы и точечные изгибающие моменты. Цепочка нормальных сил создает монополюльное рассеянное поле $w_1(x, y)$, цепочка изгибающих моментов создает дипольное рассеянное поле $w_2(x, y)$. Полное поле w в пластине равно $w_0 + w_1 + w_2$. Структура рассеянного поля определяется периодом рассеивающей решетки (цепочки резонаторов), величина $w(x, y)\exp(-ik_x^0 x)$ является периодической функцией x с периодом L . Обозначим через F и M – соответственно амплитуду силы и амплитуду момента резонатора, находящегося в начале координат ($x = y = 0$). Амплитуда силы и амплитуда момента резонатора, находя-



Резонатор монополюльно-дипольного типа.

щегося в точке с координатами $(x = x_s, y = 0)$, будут $F \exp(ik_x^0 x_s)$ и $M \exp(ik_x^0 x)$.

Уравнение пластины, соединенной с резонаторами, можно записать в виде

$$(-i\omega)^2 \rho w + D \Delta^2 w = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \{F \delta(y) - M \delta'(y)\} \delta(x - x_s) \exp(ik_x^0 x), \quad (2)$$

где ρ и D – соответственно поверхностная плотность и изгибная жесткость пластины, $\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласа, $\delta(y)$ и $\delta'(y)$ – дельта-функция и ее производная. Поскольку падающая волна $w_0(x, y)$ является свободной волной, то в левой части уравнения (2) можно заменить w на $(w_1 + w_2)$. Уравнение (2) преобразуем к двум независимым уравнениям для смещений w_1 и w_2 :

$$\Delta^2 w_1 - k^4 w_1 = \frac{F}{D} \exp(ik_x^0 x) \delta(y) \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_s),$$

$$\Delta^2 w_2 - k^4 w_2 = -\frac{M}{D} \exp(ik_x^0 x) \delta'(y) \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_s),$$

где $k = (\omega^2 \rho / D)^{1/4}$ – волновое число изгибной волны. Их решения получим методом Фурье, они имеют вид

$$w_1(x, y) = \sum_n \frac{iF}{4k^2 LD} \left\{ \frac{1}{k_y^n} \exp[i(k_x^n x + k_y^n |y|)] + \frac{i}{\alpha^n} \exp[ik_x^n x - \alpha^n |y|] \right\}, \quad (3)$$

$$w_2(x, y) = \text{sign } y \sum_n \frac{M}{4k^2 LD} \times \{ \exp[i(k_x^n x + k_y^n |y|)] - \exp[ik_x^n x - \alpha^n |y|] \}, \quad (4)$$

где $k_x^n = k_x^0 + n2\pi/L$, $k_y^n = \sqrt{k^2 - (k_x^n)^2}$, $\alpha^n = \sqrt{k^2 + (k_x^n)^2}$, $\text{sign } y = +1$ при $y > 0$, $\text{sign } y = -1$ при $y < 0$, суммирование производится по всем целым n . В фигурных скобках первое слагаемое есть однородная плоская волна при $|k_x^n| < k$ и неоднородная плоская волна при $|k_x^n| > k$, второе слагаемое всегда является неоднородной волной.

Для улучшения сходимости рядов, дающих рассеянные поля, точечные силу и момент, создаваемые каждым резонатором, распределим по

площади контакта пластины и этого резонатора. Тогда для смещений w_1 и w_2 получим выражения

$$w_1(x, y) = \sum_n \frac{iF}{4k^2 LD} \psi^{(n)}(x, y),$$

$$w_2(x, y) = -\sum_n \frac{iM}{4k^2 LD} \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial y},$$

где

$$\psi^{(n)}(x, y) = \frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} \left\{ \frac{1}{k_y^n} \exp[ik_x^n (x - x') + ik_y^n |y - y'|] + \frac{i}{\alpha^n} \exp[ik_x^n (x - x') - \alpha^n |y - y'|] \right\} dx' dy', \quad (6)$$

σ – площадь контакта пластины и “нулевого” резонатора.

Величины F и M получим из уравнений движения резонатора, находящегося в начале координат. Обозначим через $\xi_1(t) \equiv \xi_{10} \exp(-i\omega t)$ и $\xi_2(t) \equiv \xi_{20} \exp(-i\omega t)$ – смещения грузов m_1 и m_2 в этом резонаторе от их положений равновесия, груз m_1 смещается по оси z , груз m_2 смещается по оси y . Уравнения движения этих грузов имеют вид

$$m_1 \ddot{\xi}_1(t) = -F \exp(-i\omega t), \quad m_2 \ddot{\xi}_2(t) = -f \exp(i\omega t), \quad (7)$$

где

$$F = \kappa_1 (1 - i\varepsilon_1) [\xi_{10} - w(0, 0)],$$

$$f = \kappa_2 (1 - i\varepsilon_2) \left[\xi_{20} + H \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=y=0} \right] = -M/H. \quad (8)$$

В формуле (8) под смещением пластины и производной смещения по координате y в точке присоединения резонатора следует понимать усредненные значения этих величин по площади контакта пластины и резонатора. Из уравнений (7) получим амплитуды смещений грузов

$$\xi_{10} = \frac{F}{m_1 \omega^2}, \quad \xi_{20} = -\frac{M}{H m_2 \omega^2}. \quad (9)$$

Подставляя (1), (5), (6) и (9) в соотношения (8), получим искомые амплитуды силы и момента $F = i\omega / (Y_1 + Y_{10})$, $M = -\omega k_y^0 H^2 / (Y_2 + Y_{20})$, где

$$Y_1 = -i\omega w_1(0, 0) / F = \frac{\omega}{4k^2 LD} \sum_n \frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} \psi^{(n)}(x, y) dx dy,$$

$$Y_{10} = i \left[\frac{1}{\omega m_1} - \frac{\omega}{\kappa_1 (1 - i\varepsilon_1)} \right],$$

$$\begin{aligned}
 Y_2 &= -i\omega \frac{H^2}{M} \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} \right)_{x=y=0} = \\
 &= -\frac{\omega H^2}{4k^2 LD} \sum_n \frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} \frac{\partial^2 \psi^{(n)}}{\partial y^2} dx dy, \\
 Y_{20} &= i \left[\frac{1}{\omega m_2} - \frac{\omega}{\kappa_2 (1 - i\epsilon_2)} \right].
 \end{aligned}$$

Рассеянные поля монопольного и дипольного типов получим соответственно по формулам (3) и (4) при подстановке амплитуд F и M в них. Полное поле равно $w = w_0 + w_1 + w_2$. Резонанс монопольного рассеяния происходит при частоте ω_1 , являющейся решением уравнения $\text{Im}(Y_1 + Y_{10}) = 0$. Резонанс дипольного рассеяния наступает при частоте ω_2 , удовлетворяющей уравнению $\text{Im}(Y_2 + Y_{20}) = 0$.

Пусть пространственный период цепочки не превышает половину длины изгибной волны. Тогда рассеянные поля w_1 и w_2 состоят из одной однородной плоской волны и бесконечного числа неоднородных плоских волн. Для этих полей получим соотношения

$$\text{Re}Y_1 = \omega / (4k^2 LD k_y^0), \quad \text{Re}Y_2 = \omega H^2 k_y^0 / (4k^2 LD).$$

Суммарное поле однородных плоских волн равно

$$\begin{aligned}
 W(x, y) &= \exp[i(k_x^0 x + k_y^0 y)] - \\
 &- \left\{ \frac{\text{Re}Y_1}{(Y_1 + Y_{10})} + \frac{\text{Re}Y_2}{(Y_2 + Y_{20})} \text{sign} y \right\} \exp[i(k_x^0 x + k_y^0 |y|)].
 \end{aligned}$$

Согласно этой формуле амплитуды отраженной и прошедшей однородных плоских волн соответственно равны

$$\begin{aligned}
 A^- &= -\frac{\text{Re}Y_1}{(Y_1 + Y_{10})} + \frac{\text{Re}Y_2}{(Y_2 + Y_{20})}, \\
 A^+ &= 1 - \frac{\text{Re}Y_1}{(Y_1 + Y_{10})} - \frac{\text{Re}Y_2}{(Y_2 + Y_{20})}.
 \end{aligned}$$

Пусть $\text{Re}Y_1 = \text{Re}Y_{10}$, $\text{Re}Y_2 = \text{Re}Y_{20}$, $\text{Im}(Y_1 + Y_{10}) = 0$, $\text{Im}(Y_2 + Y_{20}) = 0$. Это означает, что в монопольном и дипольном резонаторах диссипативные потери равны потерям вследствие излучения и собственные частоты ω_1 и ω_2 совпадают. Тогда на резонансной частоте ($\omega = \omega_1 = \omega_2$) получим соотношение $A^- = A^+ = 0$, и полное поле w не содержит отраженной однородной волны перед цепочкой и не содержит прошедшей однородной волны за цепочкой. Это означает, что падающая волна w_0 полностью поглощается цепочкой монопольно-дипольных резонаторов с трением. Полное поле перед цепочкой состоит из падающей однородной волны и бесконечного числа неоднородных волн, полное поле за цепочкой состоит из одних неоднородных волн. Исключением является скользкие плоские волны. При k_y^0 , стремящемся к нулю, величина $\text{Re}Y_1$ неограниченно растет, а величина $\text{Re}Y_2$ уменьшается до нуля. Это означает, что скользкие плоские изгибные волны поглотить невозможно.

Поглощение изгибных волн монопольными резонаторами с трением было исследовано в работах [2–4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лапин А.Д. Резонатор монопольно-дипольного типа для изгибных волн в стержне // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 1. С. 90–93.
2. Клюкин И.И. Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колебательных систем // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 2. С. 213–219.
3. Клюкин И.И., Сергеев Ю.Д. О рассеянии изгибных волн антивибраторами, установленными на пластине // Акуст. журн. 1964. Т. 10. № 1. С. 60–65.
4. Тютюкин В.В., Шкварников А.П. Синтез и исследование поглотителей изгибных волн в стержнях и пластинах // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 3. С. 441–447.