АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2006, том 52, № 3, с. 293–296

УДК 534.121.2

ДИАГНОСТИКА ЗАКРЕПЛЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕЕ КОЛЕБАНИЙ

© 2006 г. А. М. Ахтямов

Институт механики Уфимского научного центра РАН

450000 г. Уфа, ул. К. Маркса 12, корп. 6

E-mail: AkhtyamovAM@mail.ru

Поступила в редакцию 3.02.05 г.

Рассматривается однородная прямоугольная мембрана, которая по-разному закреплена на каждой из своих сторон и недоступна для визуального осмотра. Предложены два метода акустической диагностики. Первый метод позволяет правильно диагностировать упругое закрепление на каждой из сторон прямоугольной мембраны с помощью четырех собственных частот. Второй метод позволяет диагностировать неизвестное закрепление квадратной мембраны по одному собственному значению в случае, когда каждая из ее сторон является либо закрепленной, либо свободной.

PACS: 43.20.+g

Рассмотрим малые колебания однородной прямоугольной мембраны, которая по-разному закреплена по каждой из своих сторон Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ_4 (см. рис.). В настоящей статье дается ответ на вопрос о том, можно ли по собственным частотам колебаний определить вид закрепления на всех сторонах мембраны. Этот вопрос напоминает классическую задачу М. Каца [1]: можно ли, зная все собственные значения λ_n задачи

$$\Delta U + \lambda_n U = 0, \quad x \in G; \quad U|_{\partial G} = 0,$$

определить форму области G (можно ли определить форму барабана по его звучанию?).

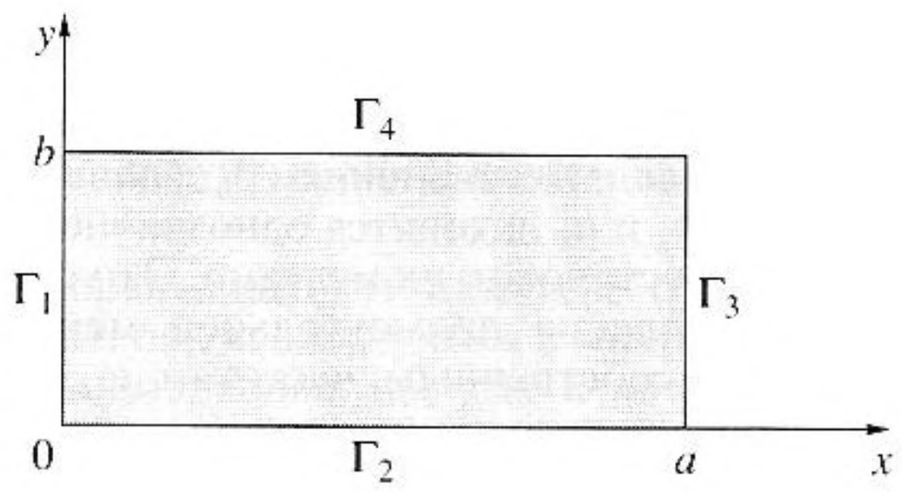
Близкие вопросы поднимались и в других работах. В [2] по сдвигам собственных частот определялись размеры объекта и его положение в камере. В работах [3, 4] исследовались условия на входе и выходе выхлопных труб и трубопроводных систем, в [5, 6] – задачи идентификации объектов по их акустическому отклику, а в [7] – задачи акустического диагностирования наличия дефектов.

В отличие от этих и им подобных работ, в настоящей работе отыскиваются не форма области, размеры объекта, его местоположение или состояние, а вид его закрепления.

Отличается рассматриваемая задача и от классических обратных спектральных задач. В обратных спектральных задачах (см., например, [8, 9, 10] и библиографию к ним) требуется восстановить коэффициенты дифференциального уравнения и краевых условий. Однако в этих работах в качестве исходных данных для восстановления краевых условий используется не один спектр (как в настоящей работе), а несколько спектров или же другие дополнительные спектральные данные (например, спектральная функция, функция Вейля, или так называемые весовые числа). К тому же основной целью этих работ является восстановление коэффициентов в уравнении, а не в краевых условиях.

Настоящая статья продолжает исследования автора по диагностированию краевых условий [11]–[14]. Однако методы статей [11]–[14] не могут быть применены для прямоугольной мембраны. Дело в том, что в [11]–[14] рассматривались пластины или мембраны, которые были закреплены по всему контуру одинаково, а в настоящей статье рассмотрена мембрана, которая на каждой из сторон закреплена по-разному. Это приводит к необходимости восстановления не одной, а двух связанных между собой спектральных задач, что осложняет решение поставленной задачи.

Перед изложением основных результатов напомним, что задача о колебаниях однородной



Однородная прямоугольная мембрана.

прямоугольной мембраны, которая упруго закреплена по каждой из своих сторон Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ_4, сводится [15] к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h_j u\right)\Big|_{\Gamma_j} = 0, \quad 0 \le h_j < \infty, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (2)$$

и начальных условиях:

$$u|_{t=0} = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x, y). \quad (3)$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к границе области от функции u.

Собственные частоты колебаний мембраны находятся по формуле [16]

$$\omega_{mn} = c\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2}, \quad (4)$$

где α_m и β_n являются собственными значениями задач Штурма–Лиувилля

$$\begin{gathered} X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0, \\ X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(a) + h_3 X(a) = 0, \end{gathered} \quad (5)$$

и

$$\begin{gathered} Y''(y) + \beta^2 Y(y) = 0, \\ Y'(0) - h_2 Y(0) = 0, \quad Y'(b) + h_4 Y(b) = 0 \end{gathered} \quad (6)$$

соответственно.

В терминах задачи (1)–(3) поставленный в настоящей статье вопрос о диагностике вида закрепления на всех сторонах мембраны сводится к задаче идентификации краевых условий (2) по значениям ω_{mn}.

В случае, когда известны не только сами собственные частоты, но и их порядковые пары (m, n), поставленная задача сводится к поиску краевых условий задач Штурма–Лиувилля (5) и (6) по собственным значениям α_m и β_n. В работе автора [18] показано, что коэффициенты h_1 и h_3 из краевых условий задачи Штурма–Лиувилля (5) находятся по ее собственным значениям α_m однозначно с точностью до перестановок их местами. Аналогично по собственным значениям β_n задачи (6) коэффициенты h_2 и h_4 находятся однозначно с точностью до перестановок их местами. Это означает, что закрепление прямоугольной мембраны находится по собственным частотам ω_{mn} однозначно с точностью до перестановки закреплений на противоположных сторонах.

Нетрудно показать, однако, что для правильного диагностирования краевых условий (2) достаточно знания только четырех собственных частот ω_{11}, ω_{21}, ω_{31}, ω_{12}. Действительно, собственные значения α_m и β_n являются корнями уравнений

$$\begin{gathered} A_1\alpha_m + A_2\operatorname{tg}(\alpha_m a) = \alpha_m^2\operatorname{tg}(\alpha_m a), \\ A_1 = h_1 + h_3, \quad A_2 = h_1 h_3, \end{gathered} \quad (7)$$

$$\begin{gathered} B_1\beta_n + B_2\operatorname{tg}(\beta_n b) = \beta_n^2\operatorname{tg}(\beta_n b), \\ B_1 = h_2 + h_4, \quad B_2 = h_2 h_4. \end{gathered} \quad (8)$$

Зная собственные частоты ω_{11}, ω_{21}, ω_{31}, можно выразить значения α_m, $m = 1, 2, 3$ через β_1:

$$\begin{gathered} \alpha_1 = \sqrt{\omega_{11}^2/c^2 - \beta_1^2}, \\ \alpha_2 = \sqrt{\omega_{21}^2/c^2 - \beta_1^2}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\omega_{31}^2/c^2 - \beta_1^2}. \end{gathered} \quad (9)$$

Подставим эти выражения в первые три уравнения (7) (при $m = 1, 2, 3$). Получим систему трех уравнений от трех неизвестных A_1, A_2, β_1. Выразив A_1, A_2 через β_1 из первых двух уравнений этой системы и подставив в третье, получим трансцендентное уравнение относительно β_1. Это уравнение имеет бесконечно много решений. Найдем тот корень, который лежит в полуинтервале $(0, \pi]$. Именно он и будет равен β_1 (это следует из анализа графиков функций $\operatorname{tg}(\beta_n b)$ и $B_1\beta_n/(B_2 - \beta_n^2)$). Числа A_1, A_2 можно теперь однозначно найти как решения линейной системы двух алгебраических уравнений (7). По найденным числам A_1, A_2 значения h_1 и h_3 находятся из системы уравнений

$$A_1 = h_1 + h_3, \quad A_2 = h_1 h_3.$$

Числа же h_2 и h_4 находятся из системы двух уравнений (8) ($n = 1, 2$) по значениям β_1 и $\beta_2 = \sqrt{\omega_{12}^2/c^2 - \alpha_1^2}$.

Найденные таким образом решения для h_1, h_2, h_3, h_4 непрерывно зависят от ω_{11}, ω_{21}, ω_{31}, ω_{12} (непрерывная зависимость вытекает из непрерывности линейно независимых решений соответствующих задач Штурма–Лиувилля). Это доказывает корректность поставленной задачи восстановления краевых условий (2) и дает хорошие возможности диагностирования закрепления прямоугольной мембраны по собственным частотам, найденным с некоторой погрешностью.

Приведем результаты численных экспериментов в обезразмеренных величинах, подтверждающие этот вывод.

Стороны прямоугольной мембраны a и b, а также число c были выбраны равными единице. Собственные частоты $\omega_{11} = 2.299046335$, $\omega_{12} = 4.341392468$, $\omega_{21} = 4.341392468$, $\omega_{31} = 7.032060297$ были взяты с абсолютной погрешностью 10^{-9} по сравнению с истинными собственными значениями задачи о колебаниях прямоугольной мембра-

ны при $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $h_3 = 3$, $h_4 = 4$. Вычисления, выполненные по предложенной схеме на компьютере также с абсолютной погрешностью 10^{-9}, дали следующие результаты:

$$h_1 = 1.000000031, \quad h_3 = 2.999999966 \text{ или}$$

$$h_1 = 2.999999966, \quad h_3 = 1.000000031;$$

$$h_2 = 1.999999953, \quad h_4 = 4.000000049 \text{ или}$$

$$h_2 = 4.000000049, \quad h_4 = 1.999999953.$$

Как видим, абсолютная погрешность при вычислении коэффициентов h_1, h_2, h_3, h_4 достаточно низкая (10^{-7}). Тем не менее она может увеличиваться по сравнению с погрешностью для ω_{ik} на четыре порядка.

Если же собственные частоты ω_{11}, ω_{12}, ω_{21}, ω_{31} получены без погрешностей и вычисления также проводятся точно, то и коэффициенты найдутся предложенным методом также точно.

Действительно, если $a = b = c = 1$, $\omega_{11} = \sqrt{2}\,\pi$, $\omega_{12} = \sqrt{5}\,\pi$, $\omega_{21} = \sqrt{5}\,\pi$, $\omega_{31} = \sqrt{10}\,\pi$, то вычисления дают $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, откуда ввиду неравенств $0 \le h_j < \infty$ ($j = 1, 2, 3, 4$), получаем числа

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = 0, \quad h_4 = 0,$$

которые в точности совпадают с коэффициентами h_1, h_2, h_3, h_4, по которым и находились собственные частоты $\omega_{11} = \sqrt{2}\,\pi$, $\omega_{12} = \sqrt{5}\,\pi$, $\omega_{21} = \sqrt{5}\,\pi$, $\omega_{31} = \sqrt{10}\,\pi$.

По собственным значениям важно уметь различать не только различные упругие закрепления, но и краевые условия Дирихле и Неймана [19]. Часто возникает такая ситуация, когда мембрана недоступна для визуального осмотра, но требуется определить, на сколько заклепок она закреплена. В этом случае закрепление мембраны также может быть диагностировано по собственным частотам ее колебаний. В отличие от диагностирования упругих закреплений сторон, здесь возникает конечное число комбинаций закрепления. Поэтому эта обратная задача на собственные значения легко решается с помощью перебора решений всех возможных прямых задач. Например, для определения того, на сколько сторон N закреплена квадратная мембрана, достаточно знания самого левого собственного значения ω_1 из интервала $[0, \infty)$. В таблице приведены результаты соответствующих вычислений для квадратной мембраны со стороной a.

В таблице при $N = 2$ приведены две собственные частоты $\sqrt{2}\,\pi/(2a)$; π/a. Собственная частота $\sqrt{2}\,\pi/(2a)$ соответствует случаю, когда две закрепленных стороны мембраны являются смежными,

Зависимость первого собственного значения ω_1 от количества закрепленных сторон N квадратной мембраны

N	0	1	2	3	4
ω_1	0	$\frac{\pi}{2a}$	$\frac{\sqrt{2}\pi}{2a}$; $\frac{\pi}{a}$	$\frac{\sqrt{5}\pi}{2a}$	$\frac{\sqrt{2}\pi}{2a}$

а собственная частота π/a соответствует случаю, когда две закрепленных стороны мембраны являются противоположными.

Как видно из таблицы, при увеличении N растет также и собственное значение ω_1: при увеличении закрепленности мембраны растут и ее собственные значения. Здесь наблюдается аналогия с теоремами сравнения для дифференциальных уравнений Штурма–Лиувилля [17]. Верно и обратное: при увеличении собственного значения ω_1 растет также и N. Этот вывод позволяет распознавать, сколько сторон мембраны свободны, а сколько жестко закреплены. Например, если первая собственная частота ω_1 квадратной мембраны близка к $\frac{\sqrt{5}\pi}{2a}$, то она жестко закреплена по трем сторонам, а четвертая сторона свободна.

Таким образом, опознать то, какое же из закреплений Дирихле или Неймана реализуется на каждой из сторон Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ_4, можно по собственным частотам только с точностью до перестановок закреплений на противоположных сторонах. Однозначности определения на контурах, как в случае кольцевой мембраны [11], здесь не будет ввиду изоспектральных свойств соответствующих контуров [19].

Подытоживая, можно сделать следующий вывод: упругое закрепление прямоугольной мембраны с точностью до перестановок закреплений на противоположных сторонах может быть однозначно диагностировано по четырем собственным частотам ω_{11}, ω_{12}, ω_{21}, ω_{31} ее колебаний; а количество жестко закрепленных и свободных сторон квадратной мембраны легко распознается по первому собственному значению ω_1.

Из анализа рассмотренных результатов следует, что понижение собственной частоты мембраны говорит о неблагополучии закрепления, поскольку при остальных неизменных условиях свидетельствует о понижении закрепленности мембраны.

Мембраны находят широкое применение на практике: они используются в микрофонах, телефонах, мембранных насосах и других устройствах. От надежности работы мембран зависит правильная работа многих технических систем. Поэтому важно вовремя выявлять неисправности их закрепления. Поскольку мембраны порой недо-

ступны для визуального осмотра, то предложенные методы акустической диагностики позволяют правильно диагностировать состояние закрепления мембраны. Они могут также помочь при создании устройств с нужным диапазоном частот.

Работа поддержана грантами РФФИ (05-01-97914-р_агидель_а, 06-01-00354-а), АН РБ (по теме: "Методы неразрушающего контроля механических систем") и Нефтекамского филиала БашГУ.

Автор выражает благодарность М.А. Ильгамову, Я.Т. Султанаеву и С.Ф. Урманчееву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kac M.* Can one hear the shape of a drum? // Amer. Math. Monthly. 1966. V. 73. № 4. P. 1–23.
2. *Qunli W.U., Fricke F.* Determination of the size of an object and its location in a cavity by eigenfrequency shifts // Nat. Conf. Publ. / Inst. Eng. Austral. 1990. № 9. P. 329–333.
3. *Frikha S., Coffignal G., Trolle J.L.* Boundary condition identification using condensation and inversion // J. Sound and Vib. 2000. V. 233. № 3. P. 495–514.
4. *Frikha S., Gaudin M., Coffignal G.* Boundary condition error for parametric updeting of In-operation systems application to piping systems // J. Sound and Vib. 2001. V. 241. № 3. P. 373–399.
5. *Тукмаков А.Л., Аксенов И.Б.* О распознавании объектов на основе анализа акустического отклика при помощи функции числа состояний динамической системы // Изв. вузов. Авиационная техника. 2003. № 1. С. 62–67.
6. *Тукмаков А.Л., Аксенов И.Б.* Идентификация объектов на основе анализа функции числа состояний акустического отклика // Журн. технич. физики. 2003. Т. 73. Р. 1. С. 130–133.
7. *Ваньков Ю.В., Казаков Р.Б., Яковлева Э.Р.* Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов // Электронный журнал "Техническая акустика" http://webcenter.ru/eeaa/ejta/. 2003. № 5. С. 1–7.
8. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука. 1984. 240 с.
9. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Сарат. педагогич. ин-та, 2001. 499 с.
10. *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М.* Аналоги теоремы единственности Борга в случае нераспадающихся краевых условий // Доклады Академии наук. 1999. Т. 367. № 6. С. 739–741.
11. *Ахтямов А.М.* Распознавание закрепления кольцевой мембраны по собственным частотам ее колебаний // Известия РАЕН. МММИУ. 2001. Т. 5. № 3. С. 103–110.
12. *Ахтямов А.М.* Можно ли определить вид закрепления колеблющейся пластины по ее звучанию? // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 3. С. 325–331.
13. *Ахтямов А.М.* Диагностирование закрепления кольцевой пластины по собственным частотам ее колебаний // Известия РАН. МТТ. 2003. № 6. С. 137–147.
14. *Akhtyamov A.M., Mouftakhov A.V.* Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inverse Problems in Science and Engineering. 2004. V. 12. № 4. P. 393–408.
15. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Гостехиздат, 1953. 360 с.
16. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике: Учебное пособие, 3-е изд. М.: Наука, 1980. 688 с.
17. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 832 с. = *Korn G., Korn T.* Mathematical handbook for scientists and engineers. McGraw-Hill Book Company, 1968.
18. *Ахтямов А.М.* К единственности решения одной обратной спектральной задачи // Дифференциальные уравнения. 2003. № 8. С. 1011–1015.
19. *Jakobson D., Levitin M., Nadirashvili N., Polterovich I.* Spectral problems with mixed Dirichlet–Neuman boundary conditions: isospectrality and beyond // arXiv:math.SP/0409154 v1 9 Sep 2004.

Identification of the Boundary Conditions of a Rectangular Membrane from Its Natural Frequencies

A. M. Akhtyamov

Institute of Mechanics, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences, ul. K. Marksa 12, Ufa, 450000 Russia

e-mail: AkhtyamovAM@mail.ru

Abstract—A homogeneous rectangular membrane with different kinds of restraints on its different sides is considered under the assumption that it is inaccessible to visual observation. Two methods of acoustic testing are proposed. The first method allows one to identify the elastic constraint on each of the sides of the rectangular membrane from its four natural frequencies. The second method allows one from a single eigenvalue to identify the type of fastening for a square membrane whose different sides can be either fixed or free.