АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2006, том 52, № 4, с. 470–479

УДК 539.3:534.14

ВОЗБУЖДЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В СЛОЕ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИМИ НАКЛАДКАМИ

© 2006 г. Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, В. Зееманн*, О. В. Кваша

Кубанский госуниверситет,
350080 Краснодар, а/я 1581
E-mail: evg@math.kubsu.ru
**Karlsruhe University, Karlsruhe, Germany*
E-mail: seemann@itm.uni-karlsruhe.de

Поступила в редакцию 11.03.05 г.

На основе решения динамической контактной задачи для системы гибких полосков, взаимодействующих со свободным упругим слоем, разрабатывается математическая модель электромеханической системы с набором пьезокерамических активаторов. В отличие от традиционных моделей, в которых механическая часть описывается уравнениями колебаний балок, пластин или оболочек, в ней учитываются не только первые, но и высшие нормальные моды упругого волновода. Сопоставление с результатами, получаемыми из упрощенных моделей, показывает хорошее согласование в низкочастотном диапазоне. Приводятся численные результаты, показывающие наличие резонансных режимов, связанных с высшими модами двуслойной структуры полосок–слой, а также демонстрирующие возможность управления направленностью излучения.

PACS: 43.38.Fx, 43.38.Hz, 46.40.Cd, 46.40.Ff, 43.20.Mv

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время все более широкое применение получают электромеханические системы с пьезокерамическими возбудителями упругих волн, выполненными в виде гибких поверхностных накладок или внутренних прослоек волноводных структур. Примером здесь могут служить оболочечные конструкции аэрокосмических изделий, снабженные системой сенсоров, системы активного виброгашения в салоне автомобиля или в помещении, системы прецизионного механического перемещения, работающие на упругих поверхностных волнах, и др. К преимуществам использования пьезокерамических пластинок относятся их легкость, гибкость и относительная дешевизна, поэтому конструкции, снабженные системой распределенных пьезокерамических датчиков или вибровозбудителей, относят к смарт-структурам (smart structures).

При разработке смарт-материалов и проектировании соответствующих электромеханических систем большое значение имеет создание математических моделей, адекватно описывающих протекающие в них волновые процессы. Под действием электрического поля пьезокерамические накладки совершают продольные колебания, вызывающие изгибные деформации в тонкостенных элементах конструкции, к которым они приклеены. Поэтому в первую очередь были изучены низкочастотные изгибные и продольные колебания в балках, пластинах и оболочках (см., например, обзор [1]). Однако такие модели не работают, когда длина волны соизмерима или меньше толщины волновода, например, в пьезокерамических двигателях и системах прецизионного привода движителем являются поверхностные волны релеевского типа [2].

Другой проблемой является учет взаимного влияния в системе полосковых возбудителей. Как правило, инженерные расчеты проводятся путем простой суперпозиции полей, возбуждаемых каждым элементом в отдельности, без учета их взаимного влияния и распределения контактных напряжений (сосредоточенные источники). Такой подход также применим только на низких частотах, когда работают традиционные упрощенные модели волноводов.

В настоящей статье предлагается математическая модель устройства с поверхностными пьезокерамическими накладками, в которой учитываются эффекты, остающиеся за рамками традиционных подходов. Во-первых, вместо балки или пластины в качестве волновода рассматривается упругий слой (или пакет слоев), в котором возбуждаются не только первые фундаментальные, но и высшие нормальные моды различных типов. Во-вторых, механизм взаимодействия накладок с волноводом и их взаимное влияние строго описываются с помощью решения соответствующих контактных задач. Наиболее близкими к разрабатываемой модели являются результаты недавних работ [3, 4], в которых взаимодействие полоска с

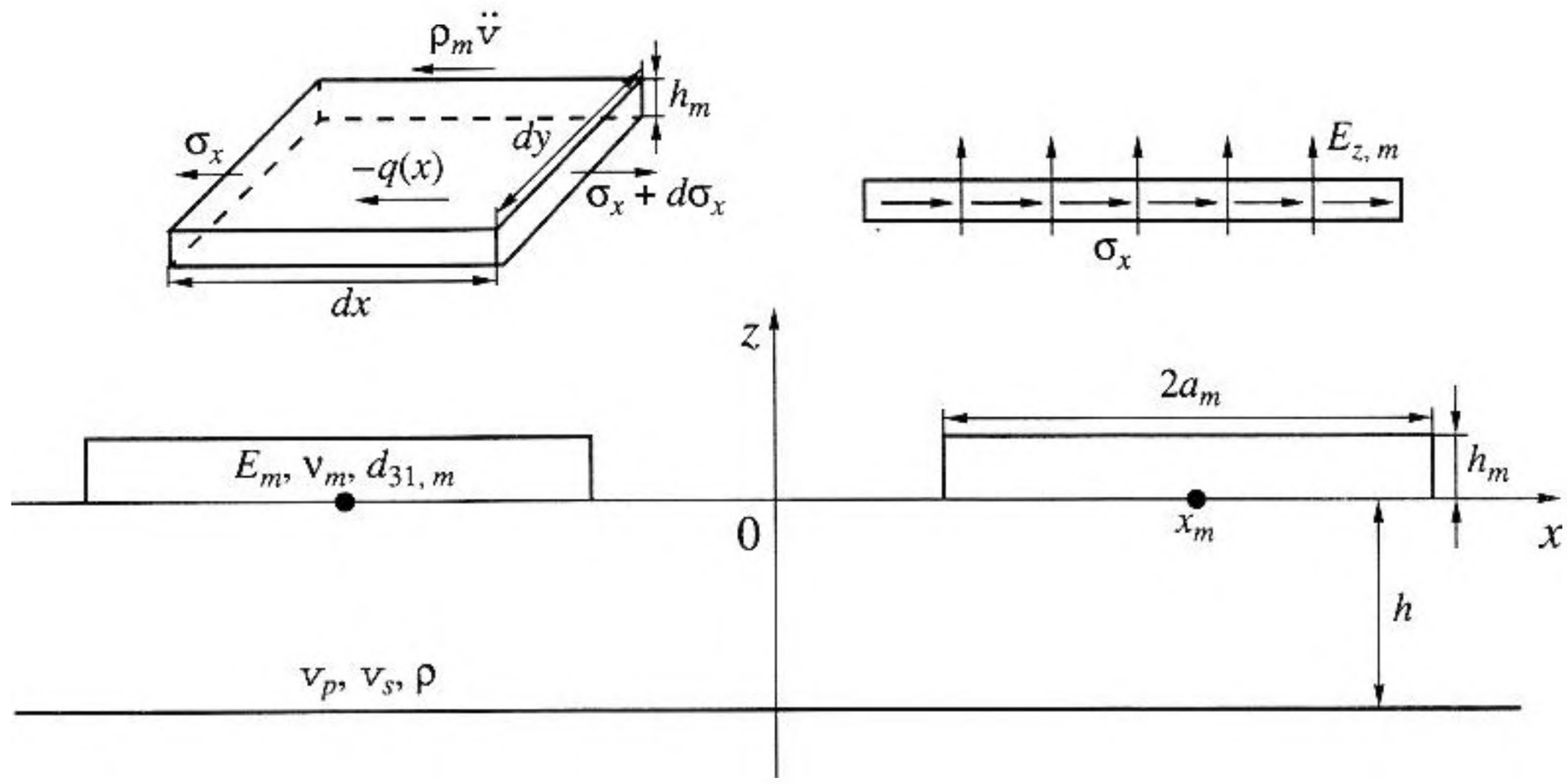

Рис. 1. Волновод с пьезокерамическими накладками.

упругой средой также описывается через решение интегрального уравнения, но в качестве волновода рассматривается не слой, а полупространство.

В двумерной постановке возникающая краевая задача сводится к интегро-дифференциальным уравнениям относительно неизвестного распределения сдвиговых контактных напряжений $q(x)$ и смещения накладок $v(x)$. Их решение строится путем сведения к бесконечной алгебраической системе, для регуляризации которой используется информация о характере сингулярности напряжений на границе области контакта. Сопоставление численных результатов с полученными в рамках упрощенных моделей (пластина с сосредоточенными изгибающими моментами) позволяет оценить диапазон применимости последних. Приводятся численные примеры, объясняющие механизм резонансных эффектов, которые не описывались упрощенными моделями, а также примеры формирования направленного излучения фазированием управляющего электрического поля.

2. ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

2.1. Упругий волновод

Рассматривается однородный изотропный упругий слой толщины h: $-\infty \le x, y \le \infty$, $-h \le z \le 0$, к поверхности которого $z = 0$ приклеены M гибких пьезокерамических накладок толщины h_m, $m = 1, 2, \ldots, M$ (рис. 1). Вне области контакта поверхность $z = 0$, как и нижняя поверхность $z = -h$, свободна от напряжений. Установившиеся гармонические колебания в слое $\mathbf{u}e^{-i\omega t}$ ($\mathbf{u}$ – комплексная амплитуда вектора смещений) возбуждаются касательными контактными напряжениями $\tau_{xz} = q$, возникающими в области контакта Ω при продольной деформации накладок вдоль оси x под действием поперечного электромагнитного поля с заданным вектором электрического напряжения $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$ (здесь и далее гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ опущен, изложение, как правило, ведется в терминах комплексных амплитуд соответствующих величин).

Волноводные свойства рассматриваемого слоя хорошо изучены [5]. Смещения $\mathbf{u}$, вызванные в нем поверхностной нагрузкой $\mathbf{q}$, представимы в виде свертки матрицы Грина слоя $k(\mathbf{x})$ и $\mathbf{q}$. В двумерном случае (плоское деформированное состояние):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} k(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}, \qquad (2.1)$$
$$\mathbf{x} = (x, z), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi, 0),$$

где $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$, k – матрица 2×2, $\Omega = \cup_{m=1}^{M} \Omega_m$, $\Omega_m = [x_m - a_m, x_m + a_m]$ – интервал контакта m-того полоска ширины $2a_m$ с поверхностью; x_m – центр Ω_m. В рассматриваемой модели контактные напряжения чисто сдвиговые: $\mathbf{q} = (q, 0)$, поэтому в (2.1) работает только первый столбец матрицы k. Представление (2.1) с $\mathbf{q} = (q, 0)$ может быть записано в альтернативной форме

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \mathbf{K}_1(\alpha, z)Q(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha \qquad (2.2)$$

в которой $\mathbf{K}_1 = (-iM_1, \alpha S_1)/\Delta$ – первый столбец Фурье-символа матрицы Грина

$$K(\alpha, z) = \mathcal{F}[k] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} k(x, z)e^{i\alpha x}dx,$$

$\mathcal{F}$ – оператор преобразования Фурье по x, $Q = \mathcal{F}[q]$. Контур интегрирования Г идет вдоль вещественной оси $\operatorname{Im}\alpha = 0$, отклоняясь от нее в комплексную плоскость α при обходе вещественных полюсов ζ_k элементов матрицы K. Направление обхода выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения [6, 7].

Для $x \notin \Omega$ замыкание контура Г и замена интеграла (2.2) суммой вычетов приводит к представлению $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в виде разложения по нормальным модам

$$\mathbf{u}(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k^{\pm}\mathbf{a}_k^{\pm}(z)e^{\pm i\zeta_k x}, \quad |x| > d. \tag{2.3}$$

Здесь $t_k^{\pm} = \mp i \operatorname{res} K(\alpha)|_{\alpha = \mp\zeta_k} Q(\mp\zeta_k)$, $\mathbf{a}_k^{\pm}(z) = \mathbf{K}_1(\alpha, z)/K(\alpha)|_{\alpha = \mp\zeta_k}$, $K(\alpha) = K_{1,1}(\alpha, 0) = -iM_1(\alpha, 0)/\Delta(\alpha)$, верхний знак для $x > d$, нижний для $x < -d$, где d: $\Omega \subset [-d, d]$.

Следует отметить, что представления (2.1)–(2.3) справедливы для упругого волновода с произвольной стратификацией (градиентная или кусочно-однородная зависимость от z), различие заключается только в конкретном виде элементов матрицы K. Поэтому после их построения и нахождения требуемых полюсов и вычетов, излагаемая ниже методика вполне применима для анализа произвольных слоистых структур (см., например, [8]).

В рассматриваемом случае свободного однородного слоя

$$\begin{gathered} M_1(\alpha, z) = -i\sigma_2\{\alpha^2(\sigma_{12}\gamma^2 s_2 + \gamma^4 s_1) - \alpha^2\gamma^4 cs_{21} + \\ + \alpha^4\sigma_{12}sc_{21} - \alpha^2\sigma_{12}\gamma^2 cs_{12} + \gamma^6 sc_{12}\} \\ S_1(\alpha, z) = -i\{\sigma_{12}(\alpha^2\gamma^2 c_2 + \gamma^4 c_1) - \sigma_{12}\gamma^4 cc_{21} + \\ + \alpha^2\sigma_{12}^2 ss_{21} - \alpha^2\sigma_{12}\gamma^2 cc_{12} + \gamma^6 ss_{12}\} \\ \Delta(\alpha) = 2\mu[-2\alpha^2\sigma_{12}\gamma^4 - (\gamma^8 + \alpha^4\sigma_{12}^2)\operatorname{sh}\sigma_1 h \operatorname{sh}\sigma_2 h + \\ + 2\alpha^2\sigma_{12}\gamma^4 \operatorname{ch}\sigma_1 h \operatorname{ch}\sigma_2 h]. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь

$$\begin{gathered} s_n = \operatorname{sh}\sigma_n z, \quad c_n = \operatorname{ch}\sigma_n z, \quad n = 1, 2; \\ ss_{nm} = \operatorname{sh}\sigma_n h \operatorname{sh}\sigma_m(z + h), \\ sc_{nm} = \operatorname{sh}\sigma_n h \operatorname{ch}\sigma_m(z + h); \quad n = 1, 2, \quad m = 1, 2; \end{gathered}$$

cc_{nm}, cs_{nm} получаются из ss_{nm}, sc_{nm} заменой sh на ch и наоборот; $\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2$, $\sigma_n = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_n^2}$, κ_n – волновые числа объемных P и S волн ($\kappa_1 = \omega/v_p$ и $\kappa_2 = \omega/v_s$ соответственно), $\gamma^2 = \alpha^2 - \kappa_2^2/2$.

Первым N вещественным полюсам ζ_k в разложении (2.3) соответствуют бегущие волны, уходящие на бесконечность без затухания с фазовой скоростью $v_k = \omega/\zeta_k$ и групповой $c_k = d\omega/d\zeta_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$; а комплексным ζ_k, $k = N + 1, N + 2, \ldots$ – экспоненциально затухающие моды $\mathbf{u}_k$: $|\mathbf{u}_k| \sim O(e^{-|\operatorname{Im}\zeta_k x|})$, $|x| \longrightarrow \infty$. Зависимости $\zeta_k(\omega)$ (вещественные и комплексные ветви дисперсионных кривых) строятся численно путем решения трансцендентного уравнения $\Delta(\zeta_k, \omega) = 0$. Их вид хорошо известен, но для удобства анализа несколько первых вещественных ветвей приведены ниже на рис. 4. Первые две моды $\mathbf{a}_m^{\pm}e^{\pm i\zeta_m x}$, $m = 1, 2$ (антисимметричная a_0 и симметричная s_0) на низких частотах переходят в изгибную и продольную моды тонкой пластинки с соответствующими упругими свойствами.

2.2. Пьезокерамическая накладка

Анализ волновых полей, возбуждаемых системой полосовых пьезокерамических накладок, сводится к определению неизвестных контактных напряжений $q(x)$ (или констант $Q(\mp\zeta_k)$ для (2.3)). В рамках низкочастотных одномерных моделей (балка, пластина) действие нагрузки $q(x)$ обычно аппроксимируется парами сосредоточенных на краях каждого полоска изгибающих моментов или продольных сил, характеристики которых зависят от напряженности электрического поля E_z, константы электромеханической связи d_{31} и геометрических и упругих параметров системы полосок-балка [9, 10]. Для двумерной модели такая аппроксимация, однако, оказывается слишком грубой, поэтому распределение $q(x)$ необходимо находить, учитывая как упругую реакцию волновода, так и деформацию накладок $\varepsilon_x = \partial v/\partial x$, v – продольные смещения накладок.

В предлагаемой модели уравнения продольных колебаний накладок выводятся исходя из следующих предположений. Как и в слое, перемещения не зависят от y, а в силу малости толщины ($h_m \ll l$, где l – характерная длина объемных волн в пьезокерамике) и от z. Кроме того, для тонкой и гибкой накладки сдвиговые деформации γ_{xz} и поверхностные напряжения σ_z считаются пренебрежимо малыми. В рамках этих допущений обобщенный закон Гука [12], связывающий линейным матричным соотношением компоненты тензоров напряжения и деформации, а также векторы напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, сводится к скалярному соотношению [11]

$$\sigma_x = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2}[\varepsilon_x - d_{31,m}(1 + \nu_m)E_{z,m}]. \tag{2.5}$$

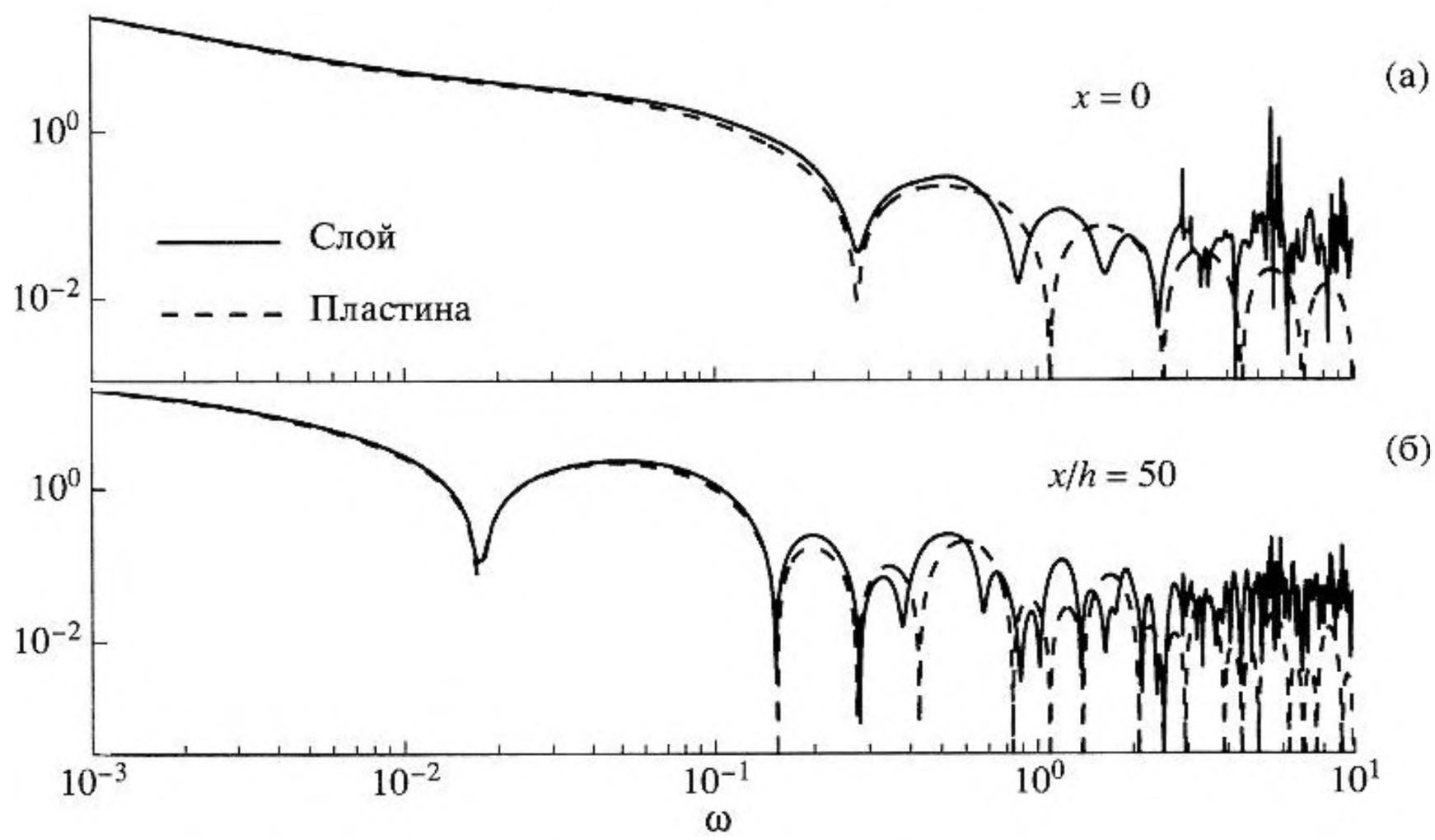

Рис. 2. Сопоставление частотных зависимостей амплитуд смещений слоя и пластины в ближней (а) и дальней зоне (б).

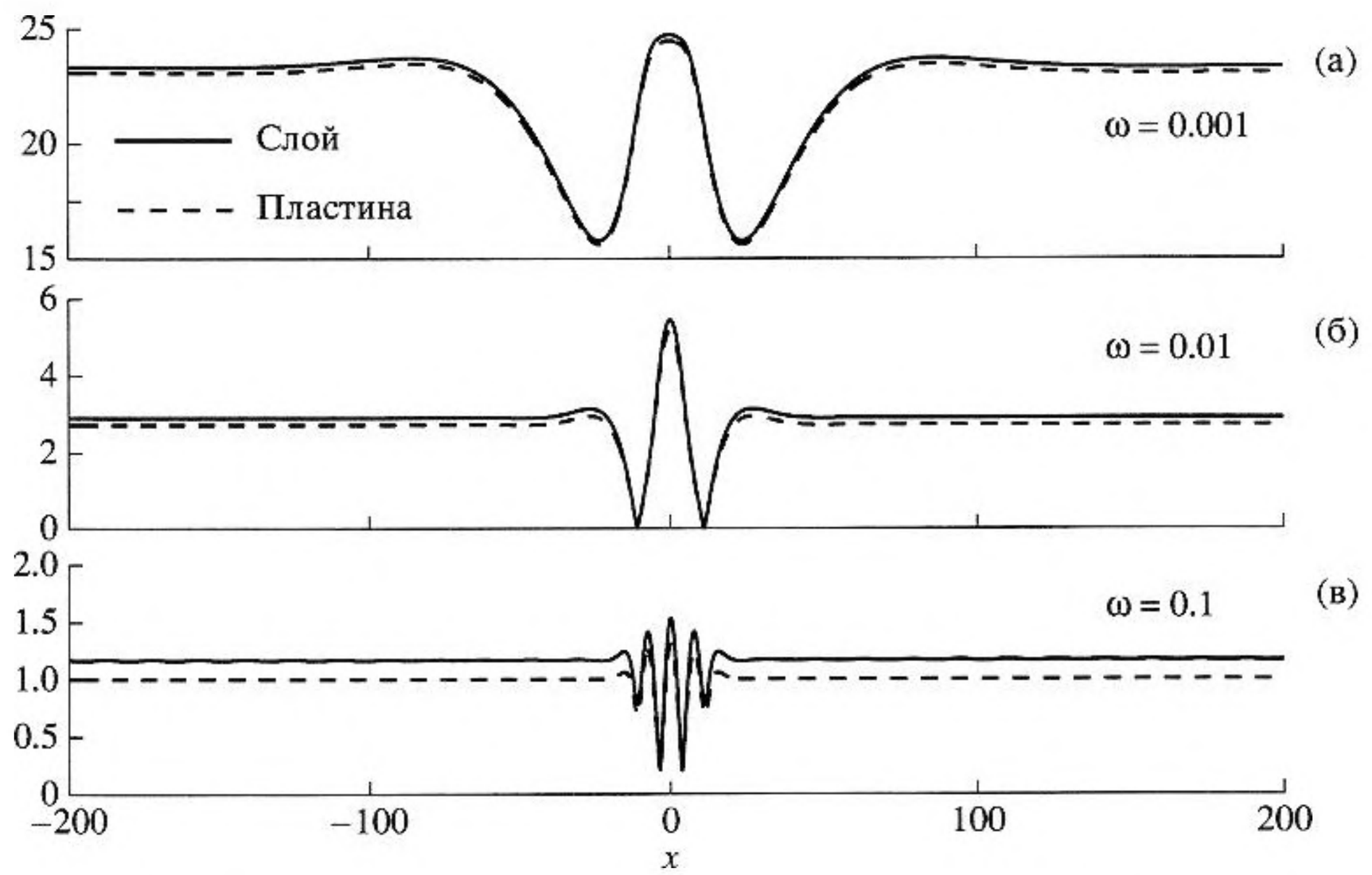

Рис. 3. Пространственное распределение амплитуды смещений для слоя и пластины.

В результате смещения $v(x) = \sum_{m=1}^{M} v_m(x)$ удовлетворяют уравнениям движения

$$\frac{d^2 v_m}{dx^2} + \kappa_m^2 v_m = b_m q_m, \qquad (2.6)$$
$$x \in \Omega_m, \quad m = 1, 2, \ldots, M,$$

в которых $\kappa_m^2 = \omega^2 \rho_m h_m b_m$, $b_m = (1 - \nu_m^2)/(h_m E_m)$, E_m, ν_m, ρ_m, h_m – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность материала и толщина m-той накладки; v_m, q_m совпадают с v, q при $x \in \Omega_m$, а вне Ω_m равны нулю.

Уравнения (2.6) следуют из условия равенства нулю проекции на ось x суммы всех сил, действующих на элемент накладки длины dx, высоты h_m и ширины dy (рис. 1):

$$df_x = h_m dy d\sigma_x - q_m dy dx - \ddot{v} \rho_m h_m dy dx \equiv 0. \qquad (2.7)$$

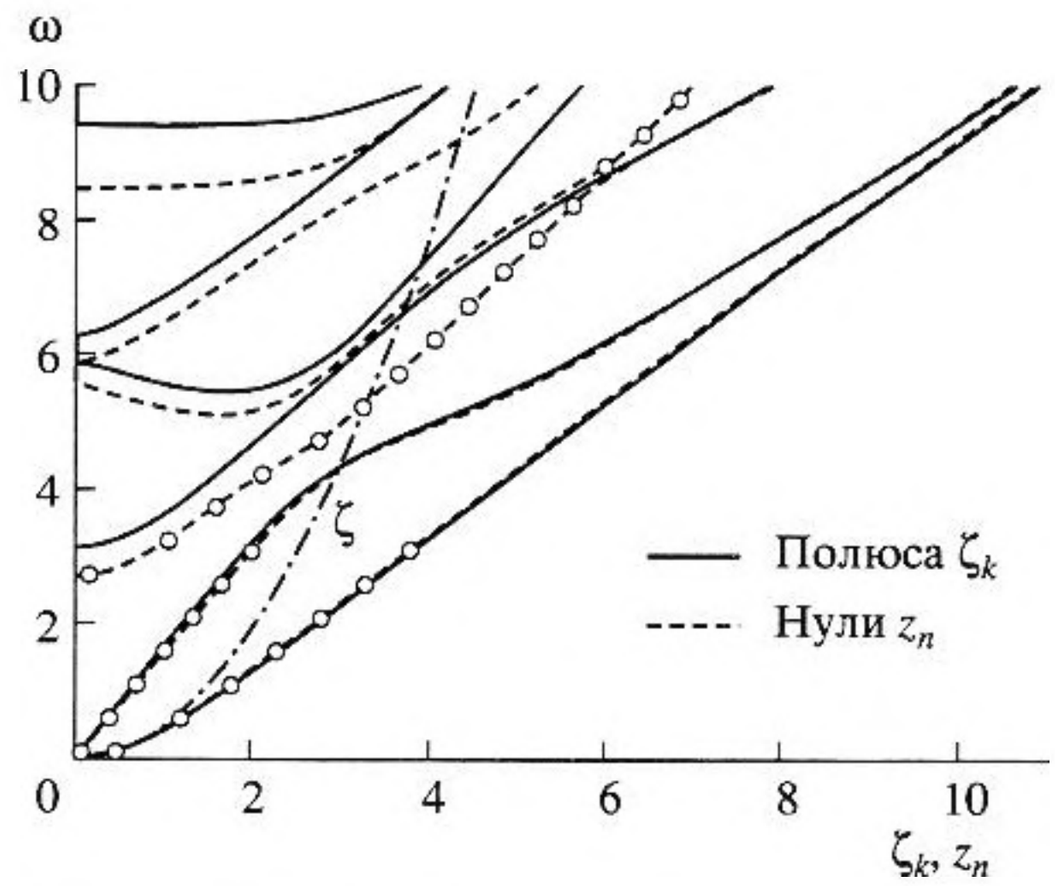

Рис. 4. Кривые вещественных нулей z_n и полюсов ζ_k свободного слоя в плоскости волновое число–частота.

Первое слагаемое в (2.7) – сумма сил $-\sigma_x h_m$ и $(\sigma_x + d\sigma_x)h_m$, действующих на торцы элемента $dxdyh_m$, второе – действие контактных напряжений q_m, третье – сила инерции.

Предполагается, что электрическое поле E_z однородно в пределах каждой накладки, т.е. $dE_z/dx \equiv 0$ для $x \in \Omega$. На торцах накладок $\sigma_x = 0$, тем самым в силу (2.5) в этих точках выполняются граничные условия

$$dv/dx|_{x = x_m \mp a_m} = e_m, \quad e_m = d_{31,m}(1 + \nu_m)E_{z,m}, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \tag{2.8}$$

$E_{z,m} = |E_{z,m}|e^{i\varphi_m}$ – поле E_z в пределах m-того полоска; сдвигом фаз φ_m контролируются характеристики излучения системы полосков.

В зоне контакта справедливо условие равенства смещений

$$u_x(x, 0) = v(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.9}$$

которое в свою очередь с учетом (2.2) приводит к интегральному соотношению

$$\mathcal{K}q \equiv \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma K(\alpha)Q(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha = v(x), \quad x \in \Omega \tag{2.10}$$

с мероморфным символом ядра $K(\alpha) = -iM_1(\alpha, 0)/\Delta(\alpha)$ (см. формулы (2.2) и (2.4)).

3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Для численного решения интегро-дифференциальной задачи (2.6), (2.10) с граничными условиями (2.8) было опробовано несколько подходов – вариантов метода Галеркина, отличавшихся выбором вида координатных функций для разложения неизвестных q_m и v_m и систем проекторов, используемых при дискретизации (сплайны, ортогональные полиномы). Метод Галеркина дает возможность проводить численный анализ, однако его эффективность падает с ростом частоты (с увеличением числа нормальных мод) или размера области контакта, когда для обеспечения требуемой точности приходится значительно увеличивать число базисных функций. Наряду с ростом вычислительных затрат это приводит и к численной неустойчивости при решении возникающих алгебраических систем.

Данных недостатков лишен метод решения интегральных уравнений Винера–Хопфа с мероморфным символом ядра, предложенный в [13] для задачи о контакте кругового штампа с упругим слоем. Позже метод был обобщен на случай матричных интегральных уравнений (контакт со сцеплением), а также для плоских задач с интегральным оператором вида (2.10), но с заданной правой частью $f(x)$ вместо неизвестной $v(x)$ и одним отрезком $\Omega = [-a, a]$ вместо рассматриваемой системы полосков $\Omega = \cup\Omega_m$ [14]. Данные отличия потребовали определенной модификации метода, общая схема которого при решении уравнения $\mathcal{K}q = f$, $|x| < a$ выглядела следующим образом.

В соответствии с разложением (2.3) неизвестная функция $\varphi(x) = \mathcal{K}q$, $x \notin \Omega$, продолжающая правую часть уравнения на всю ось, также представима в виде ряда

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k^{\pm} e^{\pm i\zeta_k x}, \quad t_k^{\pm} = \mp i \operatorname{res} KQ|_{\alpha = \mp\zeta_k}. \tag{3.1}$$

Исходя из функционального соотношения $KQ = F + \Phi$ ($F = \mathcal{F}[f]$, $\Phi = \mathcal{F}[\varphi]$), получающегося в результате преобразования Фурье по x интегрального уравнения, продолженного функцией φ на всю ось, искомая $Q = (F + \Phi)/K$ также выражается через неизвестные $t_k^{\pm}$, входящие в Φ. Так как $Q(\alpha)$ является целой функцией (как преобразование Фурье $q(x)$, заданной в ограниченной области Ω), полюса, вносимые нулями $K(\alpha)$ (z_l: $K(\pm z_l) = 0$) должны быть устранимыми:

$$\Phi(\pm z_l) + F(\pm z_l) = 0, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

Подстановка в (3.2) Φ в виде ряда, полученного из (3.1), приводит к бесконечной алгебраической системе относительно $t_k = (t_k^+, t_k^-)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{lk}\mathbf{t}_k = \mathbf{f}_l, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

$\mathbf{f}_l = -(F(z_l), F(-z_l))$, a_{lk} – матрицы 2×2.

Регуляризация системы, обеспечивающая численную устойчивость при редукции, достигается заменой $\mathbf{t}_k$ их асимптотикой для ®$k > N_1 > N$. По-

ведение же $\mathbf{t}_k$ при $k \longrightarrow \infty$ определяется показателем сингулярности $q(x)$ при $x \longrightarrow \pm a$ (см. [14]).

Эффективность данного подхода объясняется тем, что волновой характер зависимости неизвестных q, v и φ от x определяется экспоненциальными составляющими $e^{\pm iz_l x}$ и $e^{\pm i\zeta_k x}$ с вещественными z_l, ζ_k. С ростом частоты вид q и v сильно усложняется, что требует все большего числа базисных функций для их аппроксимации сплайнами или полиномами. В предлагаемой схеме эти экспоненты выделены в явном виде, и погрешность вносится только при урезании или замене членов ряда при $k > N_1$. Это эквивалентно аппроксимации только неосциллирующих составляющих, соответствующих вкладу комплексных z_l, ζ_k при l, $k > N_1$, в то время как вклад первых N_1 вещественных и комплексных нулей и полюсов с ростом частоты учитывается автоматически. При использовании асимптотики $\mathbf{t}_k$ построенное решение не только правильно описывает осцилляцию по x внутри Ω, но и поведение решения при $x \longrightarrow \pm a$. Кроме того, увеличение области контакта $[-a, a]$ приводит к уменьшению вклада комплексных полюсов, который пропорционален $e^{-|\mathrm{Im}\zeta_k a|}$, то есть в отличие от схемы Галеркина к снижению вычислительных затрат.

В случае M полосков для сведения задачи к функциональному уравнению в области преобразования Фурье, смещение каждого из полосков v_m доопределяется на всю ось нулем: $v_m \equiv 0$, $x \notin \Omega_m$, $m = 1, 2, \ldots, M$, а интегральные операторы $\mathcal{K}q_m$ рядами $\varphi_m = \sum_{k=1}^{\infty} t_{m,k}^{\pm} e^{\pm i\zeta_k x}$:

$$\mathcal{K}q_m = \begin{cases} v_m - \sum\limits_{j \neq m}^{M} \psi_{m,j}, & x \in \Omega_m \\ \varphi_m, \quad x \notin \Omega_m, & m = 1, 2, \ldots, M, \end{cases} \tag{3.4}$$

здесь $\psi_{m,j} = \mathcal{K}q_j \equiv \varphi_j$ при $x \in \Omega_m$, $j \neq m$ (при выводе (3.4) из (2.10) учтено, что $q = \sum_j^M q_j$).

После преобразования Фурье уравнения (3.4) принимают вид

$$KQ_m = V_m + \Phi_m - \sum_{j \neq m}^{M} \Psi_{m,j}, \quad m = 1, 2, \ldots, M \tag{3.5}$$

$Q_m = \mathcal{F}[q_m]$, $V_m = \mathcal{F}[v_m]$ и т.д. Функции $\Phi_m(\alpha)$, $\Psi_{m,j}(\alpha)$ выражаются в виде рядов с неизвестными коэффициентами $t_{m,k}^{\pm}$.

Связь между V_m и Q_m, необходимую для разрешения уравнений (3.5) относительно Q_m, дают уравнения (2.6). В преобразованиях Фурье они принимают вид

$$V_m = G_m[b_m Q_m + \Phi_m^0 - F_m], \quad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{3.6}$$

Здесь $G_m(\alpha) = 1/(-\alpha^2 + \kappa_m^2)$ – Фурье-символ фундаментального решения уравнения (2.6). Слагаемые Φ_m^0 и F_m появляются при интегрировании $\mathcal{F}[v_m'']$ по частям как вклад скачков v_m и v_m' в точках разрыва $x = x_m \mp a_m$. В силу граничных условий (2.8) F_m выражаются через заданные константы e_m, а Φ_m^0 через неизвестные $t_{m,0}^{\pm} = v(x_m \pm a_m)$:

$$F_m(\alpha) = 2ie_m e^{i\alpha x_m} \sin a_m \alpha$$

$$\Phi_m^0(\alpha) = i\alpha e^{i\alpha x_m}(t_{m,0}^{+} e^{i\alpha a_m} - t_{m,0}^{-} e^{-i\alpha a_m})$$

Из (3.5), (3.6) следует

$$Q_m(\alpha) = \\ = \left[G_m \Phi_m^0 + \Phi_m - \sum_{j \neq m}^{M} \Psi_{m,j} - G_m F_m\right] / (K - b_m G_m) \tag{3.7}$$

и бесконечная алгебраическая система относительно неизвестных констант $\mathbf{t}_{m,k} = (t_{m,k}^{+}, t_{m,k}^{-})$, $m = 1, 2, \ldots, M$; $k = 0, 1, 2, \ldots$, как и выше, возникает из условия устранения особенностей $Q_m(\alpha)$, наводимых нулями знаменателя $z_{m,l}$: $(K - b_m G_m)|_{\alpha = \pm z_{m,l}} = 0$:

$$\left(G_m \Phi_m^0 + \Phi_m - \sum_{j \neq m}^{M} \Psi_{m,j}\right)(\pm z_{m,l}) = G_m F_m(\pm z_{m,l}) \tag{3.8}$$

$$l = 1, 2, 3, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots, M.$$

Дальнейшие шаги (вывод окончательного вида элементов матрицы системы, замены для избавления от экспоненциально растущих составляющих и регуляризация путем учета асимптотики неизвестных $\mathbf{t}_{m,k}$ при $k \longrightarrow \infty$) хотя и более громоздки, но принципиально не отличаются от описанных ранее в [13, 14]. Детальное описание всей схемы дано в задепонированной рукописи [15], там же приводятся результаты численного анализа волновых и энергетических характеристик рассматриваемой системы. Ниже мы ограничимся несколькими характерными примерами, иллюстрирующими сопоставление с упрощенными моделями и природу выявленных резонансов.

4. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ: СОПОСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ, ИЗЛУЧЕНИЕ ЭНЕРГИИ, РЕЗОНАНСЫ

На низких частотах изгибные колебания свободного слоя с пьезоэлементами вырождаются в

изгибные колебания пластины Кирхгофа, удовлетворяющие уравнению

$$d^4w/dx^4 - \zeta^4 w = 0 \qquad (4.1)$$

и условиям совместности в точках приложения дискретных моментов $\pm M_m = \pm 6e_m D/h(4 + \psi_m)$, $m = 1, 2, \ldots, M$, которые моделируют действие накладок (модель точечных сил [9]). Здесь $w(x)$ – вертикальные смещения пластины толщины h, $\zeta^4 = \omega^2\rho h/D$, ρ – ее плотность, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ – изгибная жесткость, $\psi_m = Eh(1 - \nu_m^2)/E_m h_m(1 - \nu^2)$ – безразмерный коэффициент, описывающий соотношение материальных и геометрических свойств накладки и пластины; e_m, E_m, $E_{z,m}$, $d_{31,m}$ – те же, что и в (2.6)–(2.8). Моменты $+M_m$ и $-M_m$ прикладываются на краях интервала Ω_m, то есть в точках $x_m - a_m$ и $x_m + a_m$ соответственно. Условия совместности приводят к требованию наличия скачка второй производной w в этих точках:

$$w''(x_m \mp a_m - 0) - w''(x_m \mp a_m + 0) = \pm M_m/D \qquad (4.2)$$

при непрерывных w, w', w'''.

Решение гранично-точечной задачи (4.1)–(4.2), дополненное условиями излучения при $x \longrightarrow \pm\infty$, сводится к определению $8M$ констант общего решения уравнения (4.1) на $2M + 1$ интервалах, на которые ось x разбивается точками $x_m \pm a_m$, $m = 1, 2, \ldots, M$, из $8M$ граничных условий (4.2) (две пары констант полагаются равными нулю в соответствии с условиями излучения).

Для сопоставления моделей на рис. 2 в логарифмическом масштабе приводятся графики зависимости от частоты амплитуды вертикальных смещений поверхности слоя $|u_z|/he_1$ (сплошная линия) и пластины $|w|/he_1$ (пунктир), возбуждаемых двумя накладками в точках $x = 0$ (между накладками) и в дальней зоне при $x/h = 50$. Здесь и далее все результаты приводятся в безразмерном виде, в единицах, выраженных через три базовые величины: толщину h (для линейных размеров), скорость S-волн v_s и плотность ρ волновода. При этом безразмерная круговая частота $\omega = 2\pi fh/v_s$, где f – размерная частота в герцах.

Параметры источника E_z, d_{31} берутся такими, что в (2.8) $e_1 = 1$ (другими словами, для $e_1 \neq 1$ приводятся w/he_1). Полоски взяты одинаковых размеров и свойств, в безразмерном виде $2a_m = 8.333$, $h_m = 1/6$, $E_m = 0.866$, $\nu_m = 0.3$, $\rho_m = 0.997$, $e_m = 1$, $m = 1, 2$; центры полосков в точках $x_{1,2} = \mp 2a_m = \mp 8.333$. Упругие свойства слоя и пластины при $v_s = 1$ определяются коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$.

Результаты, полученные для слоя и пластины, как и следовало ожидать, хорошо согласуются на низких частотах $\omega < 0.1$ и качественно различаются при $\omega > 1$. Расхождение результатов, проявляющееся при $\omega > 0.1$, связано с использованием квазистатической аппроксимации для сосредоточенных моментов M_j, не учитывающей изменений, вносимых пьезоэлементами в инерционные свойства композита, а качественное различие на более высоких частотах связано с отклонением дисперсионной кривой изгибной моды пластины $\zeta(\omega)$ (штрих-пунктир) от кривой $\zeta_1(\omega)$ первой антисимметричной моды слоя a_0, а также с появлением высших мод (рис. 4).

На рис. 3 приводятся графики $|w(x)|$ и $|u_z(x)|$ при $\omega = 0.001$ и 0.1, показывающие, что для $\omega \leq 0.1$ имеет место хорошее согласование результатов и с точки зрения пространственного распределения амплитуды колебаний поверхности волновода.

Наряду с перемещениями w или $\mathbf{u}$ важной характеристикой является осредненный за период колебаний $2\pi/\omega$ поток энергии E_0, поступающей от источника (системы полосков) в волновод [7]. В рассматриваемом случае

$$E_0 = \frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\int_\Omega v(x)q^*(x)dx = \frac{\omega}{4\pi}\mathrm{Im}\int_\Gamma K(\alpha)Q(\alpha)Q^*(\alpha^*)d\alpha, \qquad (4.3)$$

а для потока энергии, уходящей на бесконечность через поперечные сечения слоя $x = \pm x_0$, имеем

$$E^\pm(x_0) = \mp\frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\int_{-h}^{0}(\mathbf{u}(\pm x_0, z), \boldsymbol{\tau}(\pm x_0, z))dz. \qquad (4.4)$$

Здесь $\boldsymbol{\tau} = T_x\mathbf{u} \equiv (\sigma_x, \tau_{xz})$ – вектор напряжений на площадке с нормалью $\mathbf{n} = (1, 0)$; T_x – оператор напряжений для этой площадки; $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = u_x\sigma_x^* + u_z\tau_{xz}^*$; звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения. В дальней зоне $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\tau}$ вычисляются, исходя из представления (2.3), в котором достаточно удерживать только N первых слагаемых, соответствующих вещественным ζ_k, дающим бегущие волны. Выполнение энергетического баланса $E_0 = E^+ + E^-$, наряду с численной проверкой граничных условий (2.9), использовалось для контроля правильности численных результатов. Количество энергии, поступающей в слой, можно представить в виде суммы, получающейся из (4.3) при замене контурного интеграла вычетами [7]:

$$E_0 = \sum_{k=1}^{N} E_k,$$

$$E_k = \frac{\omega}{4}\mathrm{res}K(\alpha)|_{\alpha=\zeta_k}(|Q(\zeta_k)|^2 + |Q(-\zeta_k)|^2).$$

При этом E_k – энергия, уносимая вправо и влево на бесконечность каждой из бегущих мод в отдельности.

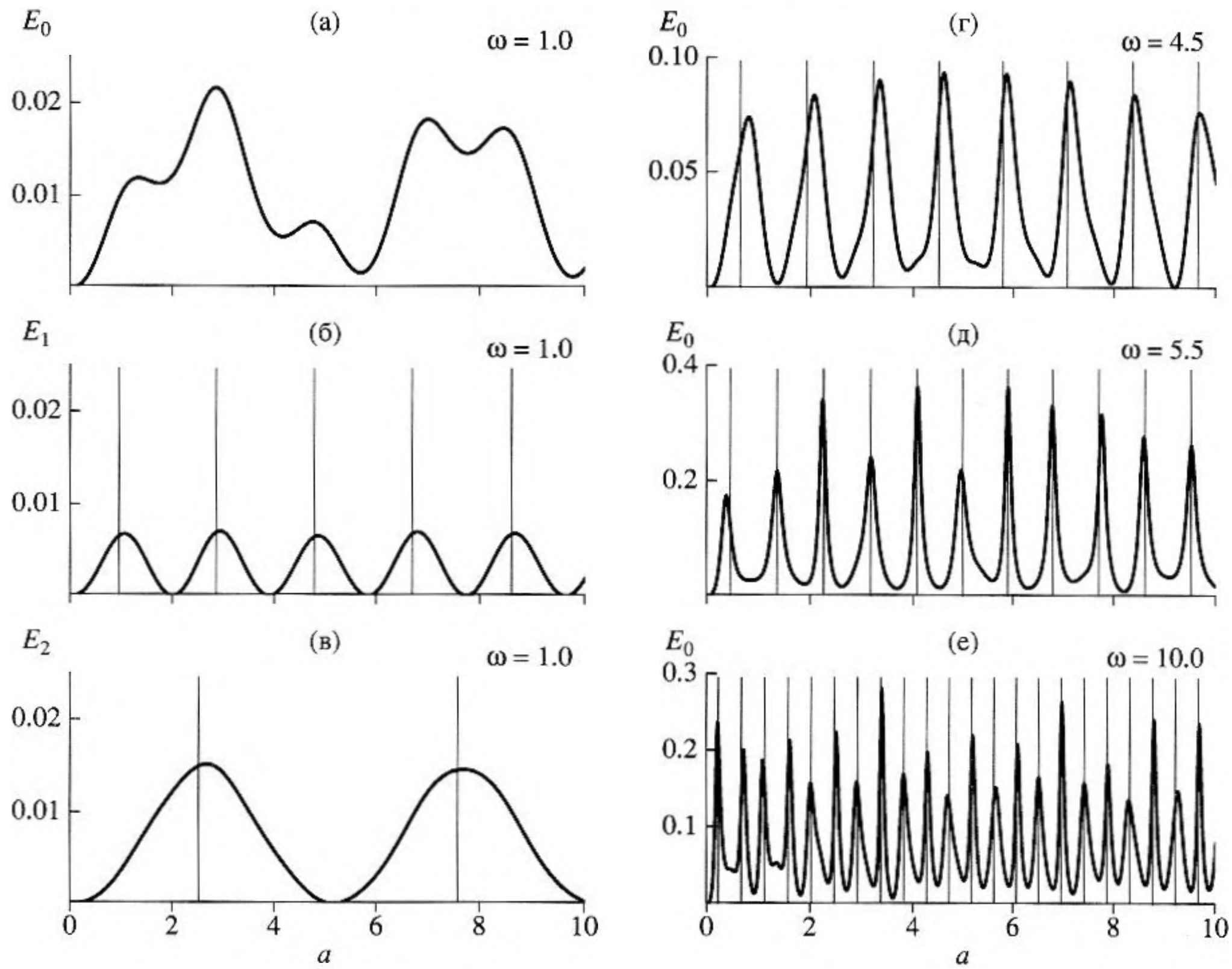

Рис. 5. Энергия, поступающая в волновод, в зависимости от ширины накладки.

При фиксированной амплитуде электрического поля количество энергии E_0, поступающей в волновод от одного полоска, зависит только от его размера a и частоты ω. Для одного полоска примеры зависимости $E_0(a)$ на различных частотах даны на рис. 5. Для низкой частоты ω = 1 наряду с $E_0(a)$ на рис. 5б, в показаны и зависимости ее составляющих $E_1(a)$ и $E_2(a)$, соответствующие вкладу фундаментальных изгибной и продольной мод. Других бегущих волн в слое на данной частоте нет, в то время как при ω = 10 (рис. 5е) $N = 6$ (см. рис. 4).

Наряду с кривыми полюсов $\zeta_k(\omega)$ на рис. 4 пунктирными линиями нанесены кривые нулей $z_n(\omega)$, которые совпадают с полюсами символа матрицы Грина двуслойной структуры слой–полосок, то есть являются волновыми числами нормальных мод, возбуждаемых в зоне $|x| < a$ (под полоском). Тем самым волновая картина в зоне контакта полоска описывается линейной комбинацией экспонент $e^{\pm iz_n x}$, а вне полосков экспонентами $e^{\pm i\zeta_k x}$ (см. (3.1)). Для первых двух мод кривые нулей и полюсов практически совпадают, в то время как для высших мод имеется заметное расхождение (рис. 4). Другими словами, наличие тонкой гибкой накладки почти не сказывается на характеристиках фундаментальных мод a_0, s_0, и при расчетах их можно брать как для свободного слоя. Однако при $\omega > 2.7$ не они, а именно высшие моды определяют основные волновые эффекты, например, резонансные максимумы зависимостей $E_0(a)$ на рис. 5.

Наиболее наглядно механизм появления этих максимумов виден на упрощенной модели пластины, в рамках которой действие полоска заменяется двумя точечными источниками, разнесенными на расстояние $2a$. Так как они работают в противофазе, сложение возбуждаемых ими волн происходит, когда расстояние $2a$ равно полуцелому числу длины волны λ:

$$2a = \lambda(k + 1/2), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.5}$$

Для изгибных колебаний пластины (4.1) $\lambda = \lambda_b = 2\pi/\zeta$.

Численный анализ показал, что соотношение (4.5) дает значения резонансных размеров полоска и в случае слоя, если в качестве λ берется

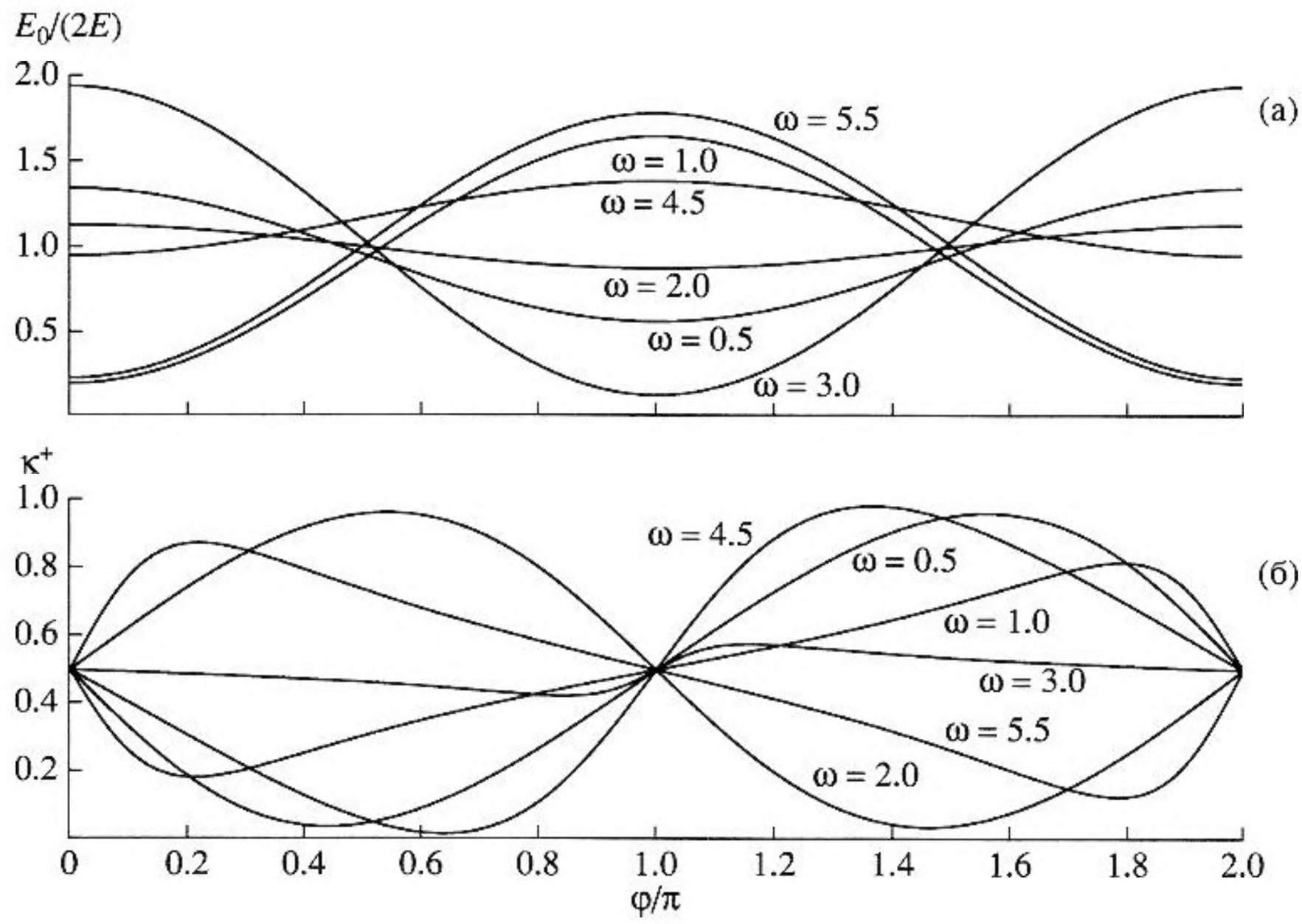

Рис. 6. Поступление (а) и распределение энергии (б) от двух полосков в зависимости от сдвига фаз φ.

длина волны $\lambda_n = 2\pi/z_n$ нормальной моды, возбуждаемой в области контакта полоска. Причем при $\omega > 2.7$ почти на всех частотах главный вклад в E_0 дает только одна из высших мод. Исключением являются узкие частотные диапазоны, в которых происходит перераспределение энергии от предыдущей главной моды к следующей. На рис. 4 главные (то есть использовавшиеся для вычисления резонансных размеров по (4.5)) участки дисперсионных кривых $z_n(\omega)$ помечены маркерами-кружками. Полученные при этом значения a показаны на рис. 5 вертикальными отрезками.

Для $\omega = 1$ (рис. 5а–в) главный вклад в E_0 дает E_2, поэтому общая периодичность $E_0(a)$ определяется длиной волны моды s_0: $\lambda_2 = 2\pi/z_2$, хотя вклад E_1 здесь пока также ощутим, выражаясь в появлении локальных экстремумов и некотором смещении глобальных максимумов. На более высоких частотах (рис. 5г–е) вклад неглавных мод незаметен, а главные участки кривых $z_n(\omega)$ (рис. 4: $n = 3$ для $2.7 < \omega < 8.5$, $n = 4$ для $8.5 < \omega < 14$, $n = 5$, $\omega > 15$ и т.д.) выстраиваются вдоль одной линии.

Для системы полосков гашение или усиление излучаемого сигнала при заданных размерах, расстановке и частоте зависит от амплитуды и сдвига фаз управляющих полей $E_{z,m}$ (см. (2.8)). Для пластины эти эффекты также легко анализируются, исходя из представления $w(x)$ в виде суперпозиции изгибных волн, приходящих в заданную точку x от краев полосков:

$$w(x) = i\sum_{m=1}^{M} A_m \sin\zeta a_m e^{i(\zeta(x-x_m)+\varphi_m)s_m}, \qquad (4.6)$$

A_m – вещественные амплитудные множители, пропорциональные $|E_{z,m}|$, $s_m = 1$ для x, лежащих правее Ω и $s_m = -1$ для x левее Ω.

Для слоя параметры, максимизирующие излучение или обеспечивающие его требуемую направленность, определяются численно. В качестве примера на рис. 6 приводятся зависимости $E_0(\varphi)/2E$ (E – энергия, поступающая от одного полоска) и $\kappa^+(\varphi) = E^+/E_0$ от сдвига фаз $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = 0$ для той же системы двух полосков, что и в примерах на рис. 2, 3. Для низкой частоты $\omega = 0.5$ значения φ, обеспечивающие максимальное или минимальное излучение энергии, согласуются со значениями, получаемыми при анализе формулы (4.6).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе строгого решения динамической контактной задачи о взаимодействии системы гибких накладок с упругим слоем разработана математическая модель работы полосковых пьезокерамических излучателей. Модель позволяет проводить быстрый параметрический анализ характеристик возбуждаемых волновых полей, в частности, определять параметры управления из-

лучением системы активаторов с помощью сдвига фаз исходного электрического поля, подаваемого на различные полоски. В низкочастотном диапазоне данная модель хорошо согласуется с упрощенной, учитывающей только главную изгибную моду упругого волновода.

В высокочастотном диапазоне выявлено наличие резонансных режимов излучения энергии для полосков, ширина которых совпадает с полуцелым числом волн одной из мод, возбуждаемых в двухслойной структуре слой–полосок. Показано, что номер моды, определяющей условие резонанса, монотонно увеличивается с ростом частоты.

Работа поддержана грантом РФФИ № 03-01-00520.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Banks H.T., Smith R.C., Wang Yun.* The Modelling of Piezoceramic Patch Interactions with Shells, Plates, and Beams // Quarterly of Applied Mathematics. 1995. V. LIII. № 2. P. 353-381.
2. *Sashida T., Kenjo T.* An Introduction in Ultrasonic Motors. Oxford: Clarendon, 1993.
3. *Wang X.D., Meguid S.A.* On the electroelastic behaviour of a thin piezoelectric actuator attached to an infinite host structure // International Journal of Solids and Structures. 2000. V. 37(23). P. 3231–3252.
4. *Zhang B., Boström A., Niklasson A.J.* Antiplane shear waves from a piezoelectric strip actuator: exact versus effective boundary condition solutions // Journal of Smart Materials and Structures. 2004. V. 13. P. 161–168.
5. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 294 с.
6. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
7. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
8. *Глушков Е.В., Кириллова Е.В.* Динамическая смешанная задача для пакета упругих слоев // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 455–461.
9. *Chaudhry Z., Rogers C.A.* The Pin-Force Model Revisited // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 1994. V. 5. P. 347–354.
10. *Seemann W.* A linear ultrasonic traveling wave motor of the ring type // Smart Materials and Structures. 1996. V. 5. P. 361–368.
11. *Seemann W.* Stresses in a thin piezoelectric element bonded to a half-space // Applied Mechanics Reviews. 1997. V. 50. P. 204–209.
12. *Партон В.З., Кудрявцев В.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
13. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* К определению динамической контактной жесткости упругого слоя // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54. № 3. С. 474–479.
14. *Glushkov E., Glushkova N.* Blocking property of energy vortices in elastic waveguides // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 102(3). P. 1356–1360.
15. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кваша О.В.* Решение динамической контактной задачи для упругого слоя с пьезокерамическими поверхностными накладками. Краснодар: Кубанск. гос. ун-т, 2005. Деп. в ВИНИТИ 13.07.05, № 1015–В2005.

Elastic Wave Excitation in a Layer by Piezoceramic Patch Actuators

E. V. Glushkov[a], N. V. Glushkova[a], W. Seemann[b], and O. V. Kvasha[a]

[a]*Kuban State University, a/ya 4102, Krasnodar, 350080 Russia*

e-mail: evg@math.kubsu.ru

[b]*Karlsruhe University, Karlsruhe, Germany*

e-mail: seemann@itm.uni-karlsruhe.de

Abstract—A mathematical model of an electromechanical system excited by piezoceramic patch actuators is developed. The model is based on the solution to the dynamic contact problem for a set of flexible strips interacting with a free elastic layer. Unlike the conventional models, which describe the mechanical part by the equations of beam, plate, or shell vibrations, the proposed model, in addition to the first fundamental modes, also takes into account the higher normal modes of an elastic waveguide. Results obtained with the proposed model and with the simplified models prove to be in good agreement in the low-frequency range. Numerical examples illustrate the resonance energy radiation associated with higher modes of the strip–layer system and the possibility to control its directivity.