АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2007, том 53, № 6, с. 827–832

АКУСТИКА ОКЕАНА, ГИДРОАКУСТИКА

УДК 534.22

О СТАТИСТИКЕ КАУСТИК В ПОДВОДНОМ ЗВУКОВОМ КАНАЛЕ

© 2007 г. Е. З. Грибова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950 Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23
E-mail: gribova@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 24.10.06 г.

Численно-аналитическим методом фазовых экранов анализируется статистика плотности каустик в подводном звуковом канале с крупномасштабными, случайными неоднородностями. Рассматриваются различные случаи направления распространения волны относительно оси канала, а также исследуется влияние радиуса корреляции неоднородностей.

PACS: 43.28.Lv, 07.05.Tp

При исследовании свойств океана с помощью акустических волн и при решении прикладных задач (подводная связь, дистанционное зондирование, поиск косяков рыб и т.д.) приходится учитывать существенную неоднородность океанической среды [1, 2]. Акустические неоднородности океана условно разделяются на регулярные, соответствующие некоторым усредненным характеристикам среды, и случайные, которые можно рассматривать как флуктуации вокруг средних (регулярных) значений.

Случайные неоднородности порождают флуктуации распространяющихся в океане волн с образованием каустик, и для применения акустических сигналов важна связь изменений сигнала с характеристиками неоднородностей. Существенную для анализа распространения волн в случайно-неоднородной среде информацию дает, например, среднее число каустик. Так, в [3] показано, что на больших расстояниях от источника акустическое поле водных лучей сосредоточено главным образом в каустиках, в которых локализуется большая часть излученной энергии. Целью данной работы является анализ средней плотности каустик в поперечном сечении случайно-неоднородной среды при различных направлениях распространения волны относительно оси подводного звукового канала (ПЗК), а также при различных радиусах корреляции неоднородностей.

Будем считать случайные неоднородности среды крупномасштабными и воспользуемся лучевым представлением (приближением геометрической оптики), которому часто отдается предпочтение при описании акустического поля (см., например, [3] и приведенную там библиографию, а также [4]). Исследуем статистику каустик в наиболее простом случае двумерной задачи (z – координата вдоль первоначального направления распространения волны, единственная поперечная координата – x). Двумерная модель позволит избежать громоздких выкладок, связанных с трехмерностью реальной среды. Известно [5], что каустике соответствует бесконечная кривизна волнового фронта. В то же время, эволюция двух главных кривизн в трехмерной случайной среде происходит с существенно разными скоростями по разным поперечным координатам [5–7], поэтому они в общем случае никогда не совпадают. Это означает, что фокусировка лучей имеет преимущественно одномерный характер, и двумерная модель позволяет выявить не только качественные, но и количественные особенности статистики каустик.

Систему координат (z, x) будем считать фиксированной (эйлеровой), а также введем движущуюся вместе с лучом (лагранжеву) поперечную координату a, в качестве которой возьмем точку оси x, из которой вышел луч при $z = 0$. Тогда $X(z, a)$ – уравнение траектории луча, выходящего из точки с эйлеровой координатой $(z = 0, x = a)$. Статистику каустик удобно анализировать с помощью якобиана преобразования эйлеровых координат луча в лагранжевы. Якобиан преобразования эйлеровых координат в лагранжевы при этом равен

$$J(z, a) = \frac{\partial X(z, a)}{\partial a}.$$

Как известно [8], каустике соответствует переход якобиана через ноль, поэтому среднее число каустик, которые образуются во всех лучевых трубках на единичном отрезке поперечной оси x, равно отношению числа корней уравнения

$$J(z = \text{const}, x) = 0 \qquad (1)$$

на достаточно длинном отрезке $x \in [0, L]$ к длине этого отрезка.

Пусть $m(z)$ – интересующее нас среднее число каустик, которые образуются во всех лучевых

трубках на единичном отрезке поперечной оси x. В [9] получено выражение

$$m(z) = \int_{-\infty}^{\infty} da \langle |P| \delta[J(z,a)] \delta[x - X(z,a)] \rangle,$$

где

$$P = \frac{\partial J(z,a)}{\partial a}.$$

Отсюда следует, что для нахождения $m(z)$ необходимо знать совместную плотность вероятностей $W(x, j, p; z)$. В [9] для простейшего случая, когда регулярная часть показателя преломления $n = 1$, а флуктуационная $|\tilde{n}| \ll 1$, найдено уравнение для $W(x, j, p; z)$:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + u\frac{\partial w}{\partial j} + q\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{B}{2} j^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} +$$

$$+ \left(\frac{B}{2}p^2 + \frac{C}{2}j^4\right)\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} + Bpj\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial q}, \qquad (2)$$

$$D_{\beta\beta}(x) = 2\int_{-\infty}^{0} \langle \beta(z,x)\beta(z+\varsigma, x)\rangle d\tau,$$

где усреднение ведется по ансамблю реализаций случайного поля $\beta(z, x)$, равного

$$\beta(z,x) = \frac{d^2}{dx^2}\ln(n + \tilde{n}),$$

$$B = -D''_{\beta\beta}(0), \quad C = D''''_{\beta\beta}(0).$$

К сожалению, решить уравнение (2) в общем случае не удается ни аналитически, ни, из-за высокой размерности, численно. Поэтому здесь найдем среднее число каустик в единице поперечного сечения случайно-неоднородной среды численно-аналитическим методом фазовых экранов. При этом рассмотрим как упомянутый случай $n = 1$, так и распространение волн в ПЗК в присутствии случайных неоднородностей среды. Для этого в первую очередь получим уравнения для якобиана J. Это несложно сделать, используя лучевые уравнения, которые в лагранжевом представлении имеют вид [8]

$$\frac{dX}{dz} = V, \quad \frac{dV}{dz} = \alpha(z, X), \qquad (3)$$

где $V(z, a)$ – угол прихода луча (проекция на ось x единичного вектора касательной к траектории луча), а функция $\alpha(z, X)$ равна

$$\alpha(z, X) = \frac{d}{dx}\ln(n + \tilde{n}).$$

Дифференцируя (3) по а, с учетом обозначений

$$\frac{dV}{da} = U, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial x} = \beta(z, X)$$

получаем систему уравнений для якобиана J и кривизны волнового фронта U:

$$\frac{dJ}{dz} = U, \quad \frac{dU}{dz} = \beta(z, X)J. \qquad (4)$$

Для того чтобы лучше проследить влияние волноводной рефракции на статистику каустик, рассмотрим вначале случай $n = 1$, что означает отсутствие ПЗК. (Заметим, что такая модель среды может оказаться пригодной южнее 55° ю.ш., т.к. там из-за быстрого уменьшения температуры и солености в направлении, перпендикулярном зоне антарктической конвергенции, звуковой канал перестает существовать [1]). Тогда $\beta(z, x)$ – случайная функция. Будем считать случайные неоднородности среды гауссовыми с корреляционной функцией углов прихода луча

$$B_0(s) = \langle v(x)v(x+s)\rangle = \sigma_0^2 \exp(-s^2/d^2),$$

где d – характерный масштаб неоднородностей среды, σ_0^2 – дисперсия поля v.

Для численного моделирования в первую очередь необходимо перейти к безразмерным координатам. Характерными масштабами задачи являются радиус корреляции неоднородностей d и расстояние $z_0 = d/\sigma_0$, на котором происходит фокусировка лучей за экраном. Это позволяет ввести безразмерную лагранжеву координату $y = a/d$, безразмерное продольное расстояние $t = z/z_0$ и безразмерную кривизну волнового фронта $\tilde{U} = z_0 U$. В результате из (4) получим

$$\frac{dJ}{dt} = \tilde{U}, \quad \frac{d\tilde{U}}{dt} = \gamma(t)J. \qquad (5)$$

Здесь случайная функция $\gamma(t)$ связана с $\beta(z)$ равенством

$$\gamma(t) = z_0^2\beta(z) = z_0^2\beta(z_0 t)$$

и имеет корреляционную функцию

$$\langle\gamma(t)\gamma(t+\tau)\rangle = 2\delta(\tau).$$

Рассмотрим слой случайной статистически однородной среды, на который падает плоская волна. Представим среду системой равноотстоящих случайных фазовых экранов с известными статистическими свойствами, которые моделируются численно. Заметим, что из сравнения с результатами экспериментальных исследований [10, 11] и с теоретическим расчетом [11, 12] известна большая точность результатов, полученных с помощью метода фазовых экранов (МФЭ). Степень применимости этого метода зависит только от

точности описания рассеивающей среды и от возможностей вычислительной техники.

В данном случае идея МФЭ состоит в том, что уравнения (5) в любом сечении за экраном решаются точно, но при этом результат зависит от реализации некоторой случайной функции, учитывающей свойства экрана. Поэтому можно численно найти функцию $J(t, y)$ и среднее число каустик $m(t)$, которые образуются во всех лучевых трубках на единичном отрезке поперечной оси, как отношение числа корней уравнения (1) при $t = \text{const}$ на достаточно длинном отрезке $y \in [0, L/d]$ к длине этого отрезка.

Для решения уравнений (5) случайную среду разобьем на ряд тонких слоев, перпендикулярных направлению распространения. Неоднородности каждого слоя заменим фазовым экраном. В геометрооптическом приближении на каждом экране угол распространения луча меняется случайным образом, а между соседними экранами лучи распространяются прямолинейно. Это означает, что $\gamma(t, X)$ аппроксимируется суммой

$$\gamma(t, X) = \sum_{l=1}^{L} \delta(t - l\Delta t) q_l(X), \tag{6}$$

где $q_l(X)$ – случайная функция, учитывающая свойства l-го экрана, Δt – расстояние между экранами, L – общее число экранов.

Заметим, что поскольку параметры каждого экрана (функции q_l) произвольны и могут быть различны, то с помощью МФЭ можно изучить поведение поля за слоем с произвольным распределением параметров неоднородностей по толщине [13]. Для простоты ограничимся случаем одинаковых статистических свойств всех экранов.

Подставляя (6) в (5), с учетом свойств дельта-функции получим точное решение, связывающее значения $J(t, y)$ и $\tilde{U}(t, y)$ на двух соседних экранах:

$$J_l(y) = J_{l-1}(y)[1 + q_l(X)\Delta t] + \tilde{U}_{l-1}(y)\Delta t,$$

$$\tilde{U}_l(y) = \tilde{U}_{l-1}(y) + q_l(X) J_{l-1}(y), \quad l \geq 1.$$

В случае, когда на слой среды падает плоская волна, начальные условия имеют вид

$$J(0, y) = 1, \quad \tilde{U}(0, y) = 0. \tag{7}$$

Это позволяет окончательно найти якобиан для луча, прошедшего расстояние $t = l\Delta t$:

$$\begin{gathered} J_0(y) = 1, \\ J_l(y) = J_{l-1}(y)[1 + q_l(X)\Delta t] + \\ + \Delta t \sum_{i=1}^{l-1} q_i(X) J_{i-1}(y), \quad l \geq 1. \end{gathered} \tag{8}$$

Итерационный процесс (8) позволяет легко находить нужные характеристики волн за каждым последующим экраном.

Для численной реализации алгоритма (8) удобнее переопределять лагранжеву координату a так, что на l-м экране $a^{(l)} = X_l$. Связь шага разбиения на соседних экранах выражается при этом равенством

$$\Delta a^{(l)} = \Delta a^{(l-1)} J_{l-1}.$$

Для моделирования свойств экрана необходимо построить статистически однородную случайную функцию $q_l(k\Delta y)$, где k – целое число (порядковый номер узла). Пусть на интервале корреляции помещается p узлов сетки разбиения экрана, тогда в качестве функции $q_l(k\Delta y)$ будем рассматривать величину

$$q_l^{(k)} = \sigma_q \sum_{i=k}^{p+k-1} r_i [b_q^{(i)}]^{1/2},$$

где r_i задаются численно выборкой из последовательности псевдослучайных независимых чисел с гауссовым распределением, $b_q^{(i)}$ характеризует дискретные значения коэффициента корреляции поля q, и при нашем выборе функции $B_0(s)$ имеет вид

$$b_q^{(i)} = \left[1 - \frac{2(i-k)^2}{p^2}\right] \exp\left[-\frac{(i-k)^2}{p^2}\right],$$

σ_q – множитель, обеспечивающий выполнение равенства

$$\sqrt{\langle q_l^{(k)^2} \rangle} \Delta z = \Delta t.$$

В [11] отмечено, что такая функция $q_l^{(k)}$ является статистически однородной, причем ее корреляционная функция есть $B_0(s)$. При этом корреляционная функция каждой конкретной реализации фазового экрана не обязательно совпадает с требуемым видом $B_0(s)$, но усреднение по множеству реализаций всегда будет идентично $B_0(s)$.

Проверка правильности предлагаемой численной модели экрана выполнена в [14], там же найдены условия применимости МФЭ. В океане горизонтальный масштаб пространственной корреляции флуктуаций скорости звука всегда много больше вертикального (вертикальный масштаб не превосходит 1 км, тогда как горизонтальный достигает 20 км [1]). Поэтому применяемая в данной работе модель соответствует тому, что каждый экран учитывает действие одной неоднородности, а расстояние между экранами является аналогом продольного (по отношению к направлению распространения волны) радиуса корреляции. Тогда в соответствии с [14] выберем рассто-

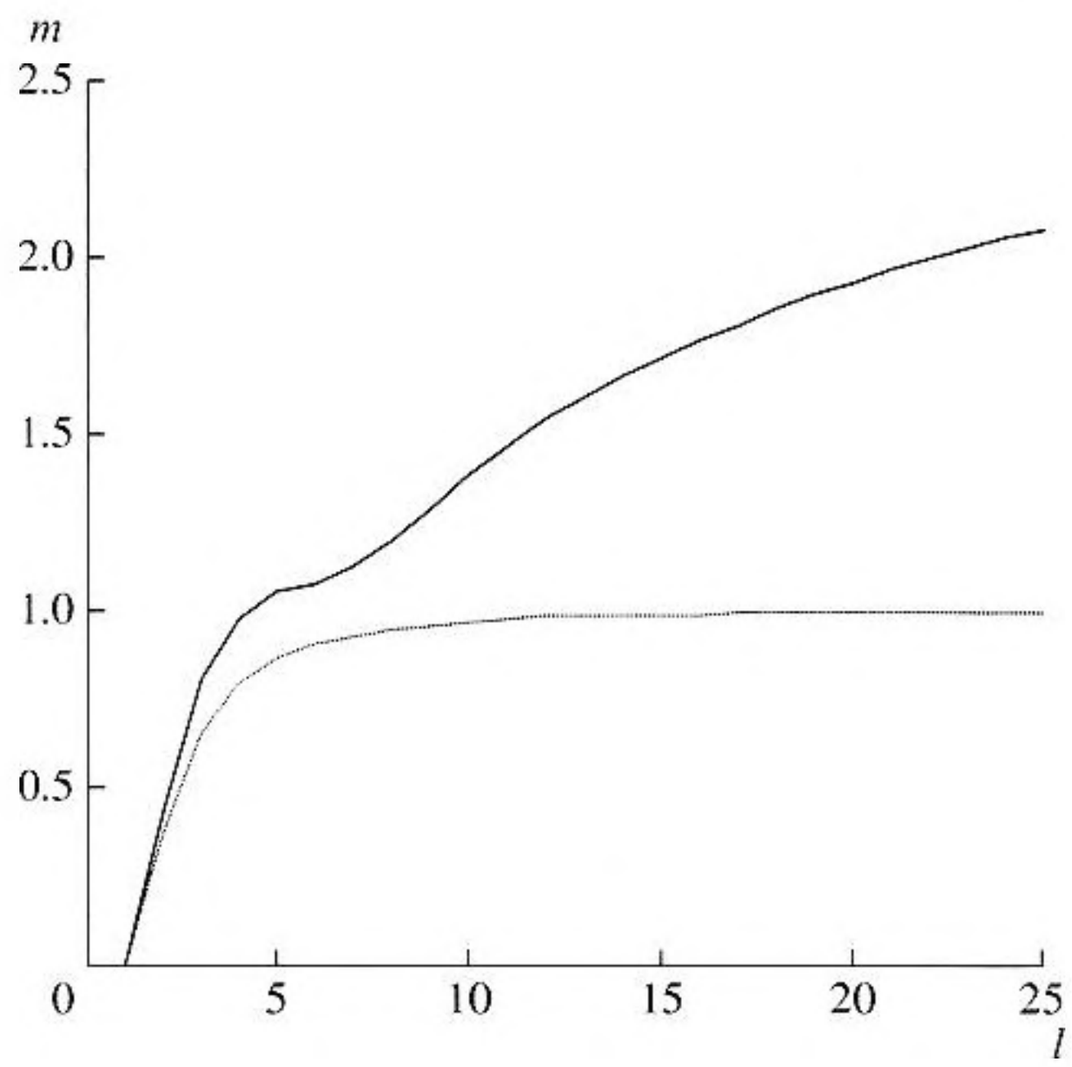

Рис. 1. Среднее число каустик: сплошная линия – в среде, штриховая – за одним экраном (результаты моделирования методом фазовых экранов).

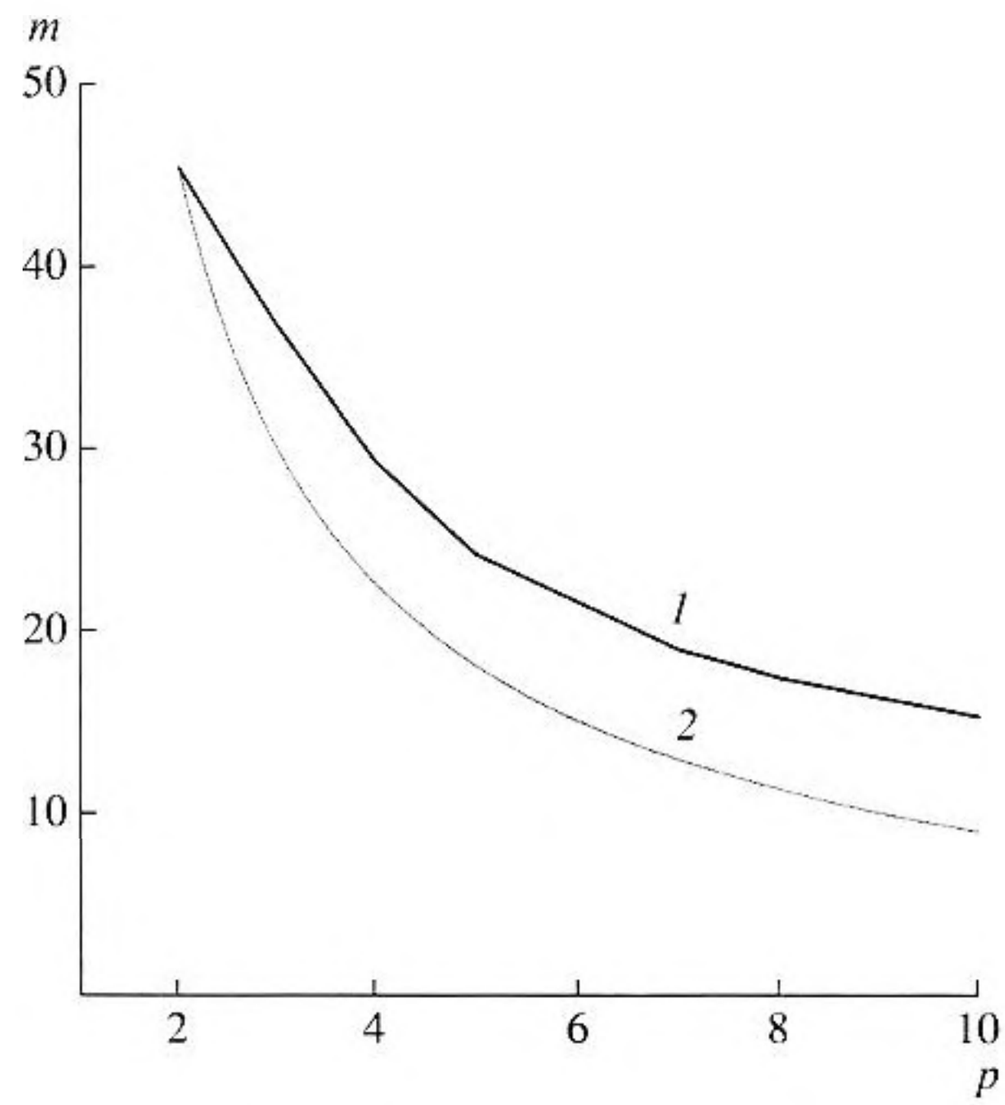

Рис. 2. Зависимость средней плотности каустик в случайно-неоднородной среде от радиуса корреляции неоднородностей. *1* – результат моделирования для слоя $l = 25$, *2* – функция $1/p$.

яние между экранами $\Delta t = 0.25$. Этот выбор определяется тем, что на таком расстоянии для характерных неоднородностей океана справедливо геометрооптическое приближение. При этом метод дает достоверные результаты до расстояний, соответствующих не менее чем 25-му экрану.

На рис. 1 приведена зависимость $m(l)$ для слоя $t = 5$, нормированная на величину $m(\infty)$, найденную для одного экрана (безразмерный радиус корреляции неоднородностей экрана $p = 5$). Там же для сравнения (штриховая линия) нанесен график $m(t)$ для одного экрана. Видно, что в то время как среднее число каустик за экраном достигает постоянного насыщенного значения, число каустик в среде увеличивается, хотя линейный рост на начальном участке после 3-го экрана сменяется более медленным. Так, на участке от $l = 7$ до $l = 25$ среднее число каустик растет приблизительно по логарифмическому закону.

Качественно характер зависимости $m(l)$ на начальном участке можно объяснить дискретностью модели непрерывной среды. Действительно, вначале (примерно от второго до пятого экрана) основной вклад в число m вносит только первый экран (поле якобиана J еще "не знает" о существовании других экранов), и средняя плотность каустик начинает насыщаться примерно на том же уровне, что и для одного экрана. После пятого экрана проявляется эффект накопления: в среднее число m начинают давать вклад каустики, обусловленные последующими экранами, поэтому $m(l)$ нарастает. Насыщение среднего числа каустик за одним экраном объясняется тем, что среднее число лучей и средний масштаб каждой лучевой трубки с увеличением расстояния t растут линейно [6]. В то же время в случайно-неоднородной среде экспоненциальное увеличение среднего числа лучей при сохранении линейного нарастания масштаба лучевой трубки [14] приводит к росту средней плотности каустик.

Исследуем зависимость среднего числа каустик в единице поперечного сечения от радиуса корреляции неоднородностей (от параметра p). Известно [9], что на больших расстояниях за случайным фазовым экраном средняя плотность каустик насыщается на уровне $m_\infty \sim 1/d$. На рис. 2 представлены результаты моделирования в среде (толщина слоя $t = 5$) для различных радиусов корреляции неоднородностей. Аналогично распространению за экраном, с ростом радиуса корреляции средняя плотность каустик в среде на больших расстояниях уменьшается, однако закон спадания с ростом параметра p более медленный, чем для одного экрана.

Обсудим теперь поведение $m(l)$ в каноническом ПЗК. В этом случае [1] регулярная часть показателя преломления имеет вид

$$n = 1 + \varepsilon(e^{\eta} - \eta - 1), \quad \eta = x/r, \qquad \varepsilon = 5.7 \times 10^{-3}, \tag{9}$$

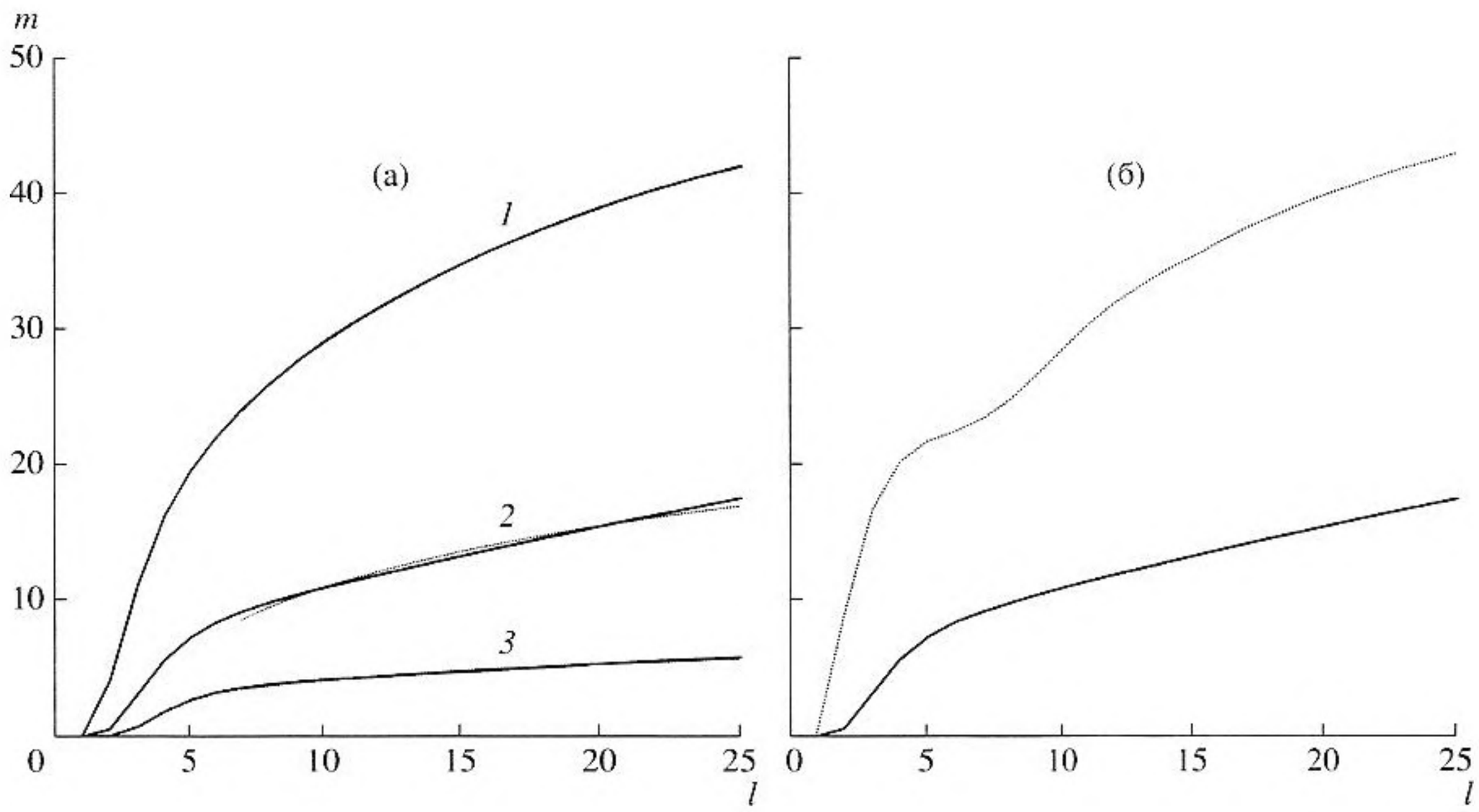

Рис. 3. Средняя плотность каустик при распространении волны вдоль оси подводного звукового канала. *1* – $p = 2$; *2* – $p = 5$; *3* – $p = 10$. Сплошная линия – $m(l)$, штриховая – аппроксимация функцией $\lg(l)$ (а). Сравнение средней плотности каустик в подводном звуковом канале (сплошная линия) и при отсутствии канала (штриховая) (б).

где r – полуширина канала, а высота x отсчитывается от его оси.

Вначале рассмотрим распространение волны вдоль оси канала. Результаты моделирования, полученные с помощью алгоритма (8) с учетом (9), приведены на рис. 3а. Заметим, что, как и в отсутствие ПЗК, рост средней плотности каустик подчиняется логарифмическому закону. При этом увеличение радиуса корреляции неоднородностей также приводит к тому, что среда становится "более регулярной" – плотность каустик уменьшается. В то же время сравнение со случаем $n = 1$ (при одинаковом значении параметра $p = 5$, рис. 3б) показывает, что в ПЗК каустик меньше. Для объяснения рассмотрим предельный случай регулярного волновода (при $n = 0$). Поскольку функция $\beta(z, x)$ перестает зависеть от z, легко получить решение уравнений (4) с начальными условиями (7):

$$J(z) = \frac{1}{2}[\exp(\sqrt{\beta(x)}z) + \exp(-\sqrt{\beta(x)}z)],$$

откуда видно, что якобиан J является неотрицательным, в результате средняя плотность каустик равна нулю. В случайно-неоднородной среде положительная волноводная добавка в показателе преломления приводит к увеличению величины J (по сравнению со случаем, когда ПЗК отсутствует), в результате число нулей этой функции уменьшается.

Пусть теперь волна распространяется перпендикулярно оси ПЗК. Такая ситуация характерна, например, при локации дна. В соответствии с первоначальным выбором системы координат ось z направлена теперь в глубину, а x – вдоль оси канала. Для канонического профиля $n(z)$ дисперсия

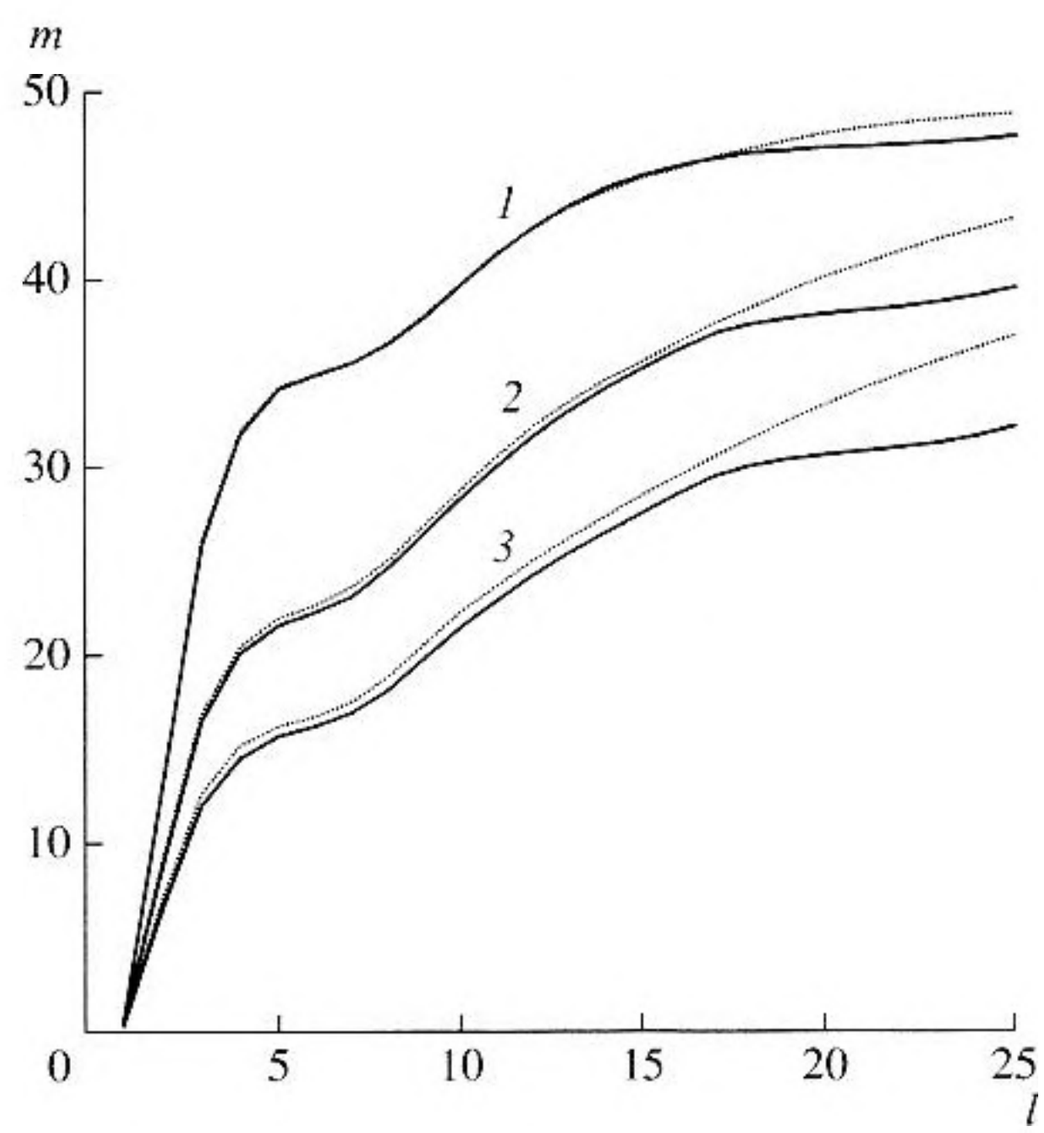

Рис. 4. Средняя плотность каустик при распространении волны перпендикулярно оси подводного звукового канала (сплошная линия) и в отсутствии канала (штриховая). *1* – $p = 2$; *2* – $p = 5$; *3* – $p = 10$.

флуктуаций скорости звука уменьшается с глубиной z по закону [1]

$$\sigma_n^2 \sim \exp(-3z/2r).$$

Очевидно, что в этом случае ПЗК при малых значениях z не влияет на статистику каустик. Действительно, результаты, представленные на рис. 4, показывают, что кривые $m(l)$ близки к соответствующим зависимостям, полученным в отсутствии ПЗК при тех же значениях p. Однако с ростом z (с ростом номера экрана l) плотность каустик становится меньше из-за уменьшения случайной составляющей показателя преломления, причем уменьшение $m(l)$ тем заметнее, чем больше радиус корреляции неоднородностей, т.к. среда (в пределах каждого экрана) в этом случае "более регулярная".

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, численно-аналитическим методом фазовых экранов мы получили, что в случайно-неоднородном океане средняя плотность каустик на единице поперечного сечения среды с увеличением расстояния, проходимого волной, нарастает приблизительно по логарифмическому закону. При этом в отсутствии ПЗК, а также при распространении волны поперек оси канала плотность каустик оказывается больше по сравнению со случаем, когда волна распространяется вдоль оси, что является следствием влияния регулярной составляющей показателя преломления. Кроме того, установлено, что средняя плотность каустик спадает с ростом радиуса корреляции случайных неоднородностей среды.

Автор выражает признательность А.И. Саичеву за постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант РФФИ-05-02-16517) и гранта "Ведущие Научные Школы России" (НШ-5200.2006.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Распространение звука во флуктуирующем океане / Под ред. Флатте С. М.: Мир, 1982. 336 с.
2. *Андреева И.Б.* Звукорассеивающие слои – акустические неоднородности толщи вод океана // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 4. С. 437–444.
3. *Зверев В.А., Иванова Г.К.* О вертикальной структуре волнового поля в каноническом волноводе на больших дистанциях // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 6. С. 771–777.
4. *Вировлянский А.Л., Казарова А.Ю., Любавин Л.Я.* Вариации амплитуд мод в переменном по трассе волноводе // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 1. С. 26–36.
5. *White B.S.* The Stochastic Caustic //SIAM J. Appl. Math. 1984. V. 44. № 1. P. 127–149.
6. *Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 216 с.
7. *Klyatskin V.I.* Caustics in random media // Waves in random media. 1993. V. 3. P. 93–100.
8. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
9. *Грибова Е.З., Саичев А.И.* Среднее число и вероятностное распределение каустик в случайно-неоднородной среде и за случайным фазовым экраном // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37. № 4. С. 471–478.
10. *Кандидов В.П., Леденев В.И.* О применении метода статистических испытаний к исследованию распространения волнового пучка в случайно-неоднородной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 4. С. 438–442.
11. *Непп Д.Л.* Расчет временных характеристик стохастических волн методом фазовых экранов // ТИИЭР. 1983. Т. 71. № 6. С. 40–58.
12. *Martin J.M., Flatte S.M.* Intensity images and statistics from numerical simulation of wave propagation in 3-D random media // Appl. Optics. 1988. V. 27. № 11. P. 2111–2126.
13. *Ерухимов Л.М., Урядов В.П.* О частотной корреляции флуктуаций радиоволн за n хаотическими экранами // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11. № 12. С. 1852–1863.
14. *Грибова Е.З., Саичев А.И.* Расчет характеристик многолучевого распространения волн в случайной среде методом фазовых экранов // РЭ. 1994. Т. 39. № 2. С. 193–199.

Statistics of Caustics in an Underwater Sound Channel

E. Z. Gribova

Lobachevskiĭ State University, Nizhni Novgorod, pr. Gagarina 23, Nizhni Novgorod, 603950 Russia

e-mail: gribova@rf.unn.ru

Abstract—The numerical–analytical phase screen method is used to analyze the statistics of the density of caustics in an underwater sound channel with large-scale random inhomogeneities. Different cases of wave propagation direction with respect to the channel axis are considered, and the influence of the inhomogeneity correlation radius is investigated.