

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.222.1

ДИСПЕРСИОННЫЕ КРИВЫЕ ОБЪЕМНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В УПРУГОМ ТЕЛЕ С ДВУМЕРНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ ОТВЕРСТИЙ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

© 2008 г. А. В. Григорьевский, В. И. Григорьевский, С. А. Никитов

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники РАН

141190 Московская область, Фрязино, пл. Введенского 1

E-mail: vig324@ms.ire.rssi.ru

Поступила в редакцию 27.03.07 г.

С помощью метода конечных элементов рассчитаны дисперсионные кривые объемных акустических волн в системах круглых отверстий, расположенных в соответствии с законом квадратной и гексагональной симметрии в изотропном упругом материале. Показано наличие полных зон непропускания акустических волн, а также наличие обратных квазипоперечных мод первого порядка. В гексагонально-симметричной системе отверстий обнаружены полные зоны непропускания, расположенные среди мод высоких порядков. Для волн с чисто сдвиговой поляризацией рассчитана мнимая часть волнового числа внутри первой зоны непропускания.

РАКС: 43.20.Ks

Термин “фотонные кристаллы” появился примерно в начале 90-х годов [1] для сред, в которых имеется периодическая система диэлектрических неоднородностей, приводящая к возникновению зон непропускания в широком диапазоне частот для световых или электромагнитных волн. Наличие широких зон непропускания влечет за собой возможность эффективной локализации электромагнитных полей вблизи точечных или линейно расположенных дефектов, представляющих собой просто отсутствие неоднородностей в периодической структуре. Такая локализация открывает широкие возможности для применения в волоконной и интегральной оптике и оптоэлектронике.

Для композитных материалов, в которых имеется периодическая система акустических неоднородностей, по аналогии с названием фотонные кристаллы появился термин “фононные кристаллы” [2]. В настоящее время проводятся интенсивные исследования характеристик распространения акустических волн различных типов, как объемных, так и поверхностных в искусственных двумерных и трехмерных композитных материалах. В таких фотонных кристаллах как синтетические опалы [3] были обнаружены особенности поведения теплопроводности при низких температурах, связанные с прохождением акустических фононов в таких структурах. Обнаружены полные зоны непропускания для объемных акустических волн [4]–[5], для поверхностных акустических волн [6], продемонстрирована возможность локализации акустических волн в системах

дефектов периодической структуры [7], а также предсказано существование поверхностных акустических волн специального типа – волн Гуляева – Блюштейна в искусственных композитных средах [8].

Интерес к исследованию характеристик распространения акустических волн в композитных материалах связан с возможностью использования этих материалов в системах неразрушающего контроля, в ультразвуковой диагностике, в системах стабилизации и фильтрации частоты, а также в датчиках физических величин – в устройствах и приборах, которые уже широко используются на практике [9]–[11].

Как правило, в расчетах характеристик распространения волн в системах “сильных” периодических неоднородностей используются численные методы, такие как метод разложения по плоским волнам (PWE) [2] для решения задачи нахождение собственных волн, или метод конечных разностей во временной области (FDTD) [4] для решения нестационарных задач о возбуждении и прохождении волн. В настоящей работе нами исследовано распространение объемных акустических волн в системе двумерных периодических отверстий кругового сечения, изготовленных в изотропном упругом материале, с помощью метода конечных элементов (FEM, MKE). Метод конечных элементов позволяет решать задачи нахождение собственных волн наиболее естественным образом, поскольку все граничные условия сводятся к границам элементарной ячейки, так что возможно решать задачи для компо-

зитных материалов типа упругое твердое тело – жидкость или газ.

В настоящей работе рассчитаны дисперсионные кривые объемных акустических волн в системах круглых отверстий, расположенных в соответствии с законом квадратной и гексагональной симметрии в материале плавленого кварца. Технология вытягивания кварцевых волокон из заготовок с заранее проделанными отверстиями позволяет изготавливать подобные фоновые кристаллы с симметрией расположения отверстий, их диаметром и периодом следования, изменяющимися в достаточно широких пределах, что делает такие структуры перспективными для применения в акустооптических оптоволоконных устройствах. Показано наличие полных зон не пропускания объемных акустических волн в квадратно симметричной системе круглых отверстий достаточно большого диаметра, а также наличие обратных квазипоперечных мод первого порядка. В гексагональной системе отверстий обнаружена полная зона не пропускания, расположенная среди мод высших порядков. Рассчитана мнимая часть волнового числа внутри зоны не пропускания. Показано, что мнимая добавка достигает максимума вблизи центральной частоты зоны не пропускания, а частотная зависимость мнимой добавки аналогична таковой для случая брэгговского отражения в системе малых неоднородностей.

Метод конечных элементов (МКЭ) относится к численным методам, позволяющим рассчитывать волновые поля и их характеристики в сложных областях с неоднородными свойствами среды, их заполняющей. Рассмотрим вывод системы уравнений МКЭ из основных уравнений акустики упругого тела. Уравнение движения упругой среды имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (1)$$

здесь ρ – плотность, u_i – смещения частиц среды по координатным осям x_1, x_2, x_3 , соответствующих координатам x, y и z , T_{ik} – тензор напряжений. В уравнении (1), как и в последующих выражениях по повторяющимся индексам, подразумевается суммирование. Предполагается, что упругая среда является однородной и бесконечной по оси z , и все волновые поля зависят только от координат x и y . Считается также, что все величины зависят от времени как $\exp(-i\omega t)$, так что уравнение (1) можно записать как

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + \rho \omega^2 u_i = 0. \quad (2)$$

В соответствии с процедурой Галеркина [12], [13] для численного решения уравнения (2) поле

внутри некоторой замкнутой области представляется в виде суммы ряда по линейно независимой системе непрерывных аппроксимирующих функций $N_\alpha(x, y)$

$$u_m = u_m^{(\alpha)} N_\alpha(x, y), \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь множители $u_m^{(\alpha)}$ являются коэффициентами разложения. Умножая уравнение (2) на аппроксимирующую функцию с номером $\alpha - N_\alpha(x, y)$ и подставляя выражения для упругих смещений в виде (3), после интегрирования по замкнутой области получаем следующие уравнения:

$$\iint_S \left(T_{ik} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_k} - \rho \omega^2 u_i N_\alpha \right) dS = \iint_S \frac{\partial (N_\alpha T_{ik})}{\partial x_k} dS. \quad (4)$$

В линейном приближении тензор напряжений связан с тензором деформаций посредством закона Гука:

$$T_{ik} = c_{ijkl} u_{jl}. \quad (5)$$

где $u_{jl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right)$ – тензор деформаций, а c_{ijkl} – тензор упругих модулей. Подставляя выражение для тензора деформаций в уравнение закона Гука (5) и пользуясь симметрией тензора упругих модулей по перестановкам в первой и второй паре индексов, можно выразить тензор деформаций через упругие смещения

$$T_{ik} = c_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}. \quad (6)$$

Далее с помощью соотношения (6) выражаем компоненты тензора напряжений T_{ik} посредством ряда по аппроксимирующим функциям (3) и подставляем в уравнения (4). Заметим, что под интегралом в правой части (4) стоит выражение, которое представляет собой полную дивергенцию некоего вектора, поэтому оно может быть преобразовано в интеграл по границе области от компоненты этого вектора, направленной вдоль внешней нормали к границе. В результате получаем следующую систему уравнений

$$c_{ijkl} u_j^{(\beta)} \iint_S \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_l} \right) dS - \rho \omega^2 u_i^{(\beta)} \iint_S (N_\alpha N_\beta) dS = \int_\Gamma (N_\alpha T_{in}) d\Gamma. \quad (7)$$

Система уравнений (7) позволяет определить коэффициенты разложения $u_j^{(\beta)}$ волнового поля внутри замкнутой области, если известны компоненты тензора напряжений, направленные вдоль

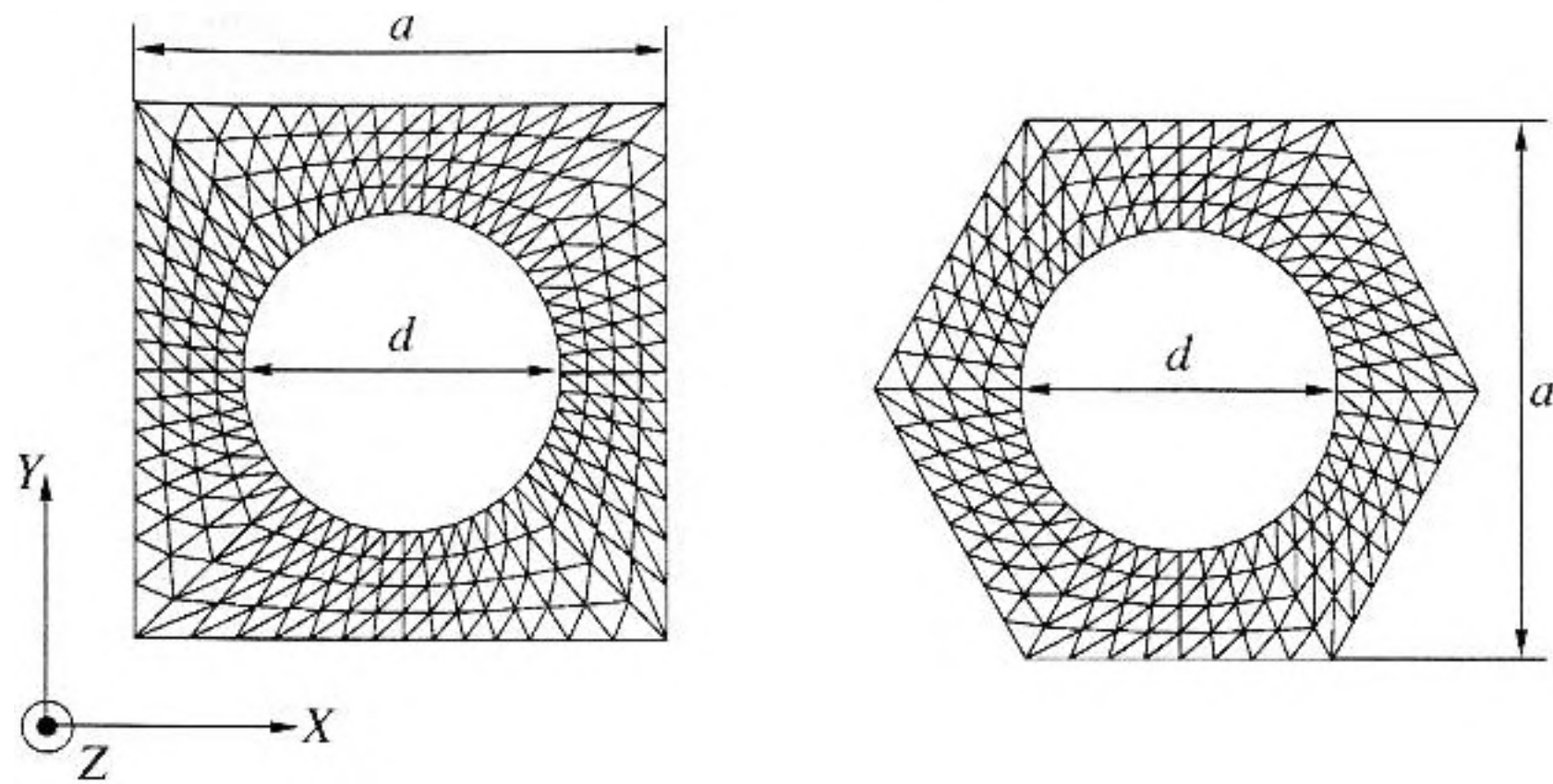


Рис. 1. Элементарные ячейки в квадратной и гексагональной симметрии расположения отверстий вместе с треугольными конечными элементами.

внешней нормали к границе этой области. В методе конечных элементов вся область задачи разбивается на достаточно большое количество малых областей, и система уравнений (7) записывается для каждой из этих областей. Чаще всего отдельные малые области имеют форму треугольников, вершины которых являются узловыми точками, в которых рассчитываются величины упругих смещений. Далее, путем комбинации всех уравнений с учетом равенства упругих смещений и нормальных компонент напряжений на границах между областями записывается одна большая система уравнений относительно упругих смещений во всех узловых точках области задачи. В качестве аппроксимирующих функций $N_\alpha(x, y)$ используются полиномы специального вида такие, что в каждом из узлов отдельного конечного элемента отличен от нуля только один из полиномов [12]. Это свойство позволяет напрямую интерпретировать коэффициенты разложения $u_j^{(\beta)}$ как упругие смещения в узлах области задачи. Если среда во всей области задачи неоднородна, то разбиение на конечные элементы производится для каждой из однородных подобластей с узлами на их границах. При этом каждый конечный элемент будет расположен в подобласти со своими значениями материальных констант в уравнениях (7). В силу равенства нормальных к границам компонент напряжений на внутренних границах между конечными элементами после комбинации всех элементарных уравнений (7) в результирующей системе уравнений в правой части будут стоять интегралы аналогичные правой части, но взятые по внешней границе области задачи. В настоящей работе мы используем в качестве аппроксимирующих функций полиномы первого порядка – линейные функции от X и Y .

Мы рассматриваем распространение объемных акустических волн в бесконечной упругой изотропной среде, в которой изготовлена двумерная периодическая система цилиндрических отверстий кругового сечения с периодом a . Предполагается, что волновой вектор расположен в плоскости XU прямоугольной системы координат, а оси отверстий расположены вдоль оси Z , то есть акустические волны распространяются в направлениях, перпендикулярных осям отверстий. На рис. 1 показаны выбранные для расчетов элементарные ячейки для квадратной и гексагональной симметрии, а также сетки треугольных конечных элементов, разбивающие элементарные ячейки.

Плавленый кварц относится к числу изотропных упругих материалов, которые характеризуются всего двумя отличными от нуля упругими модулями c_{11} и c_{44} в двух индексном обозначении. Нетрудно показать, что в рассматриваемой геометрии в изотропном материале упругие волны распадаются на два независимых набора. Один из них составляют сдвиговые волны со смещениями вдоль оси Z , это так называемые волны с вертикальной поляризацией. Вторым набором составляют связанные сдвиговые и продольные волны со смещениями, лежащими в плоскости XU , это волны с горизонтальной поляризацией. В расчетах использовались следующие значения модулей упругости $c_{11} = 0.785$, $c_{12} = 0.161$, $c_{44} = 0.312 \times 10^{14}$ Н/м² и плотности $\rho = 2.2 \times 10^6$ кг/м³.

В соответствии с теоремой Блоха [14] в бесконечной двумерной периодической структуре волновое поле может быть представлено в виде

$$\vec{u}(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}\vec{r}) \times \vec{u}_0(\vec{r}), \quad (8)$$

где \vec{k} – волновой вектор, приведенный к первой зоне Бриллюэна, а функция \vec{u}_0 периодична с периодом решетки. Как уже отмечалось, метод конеч-

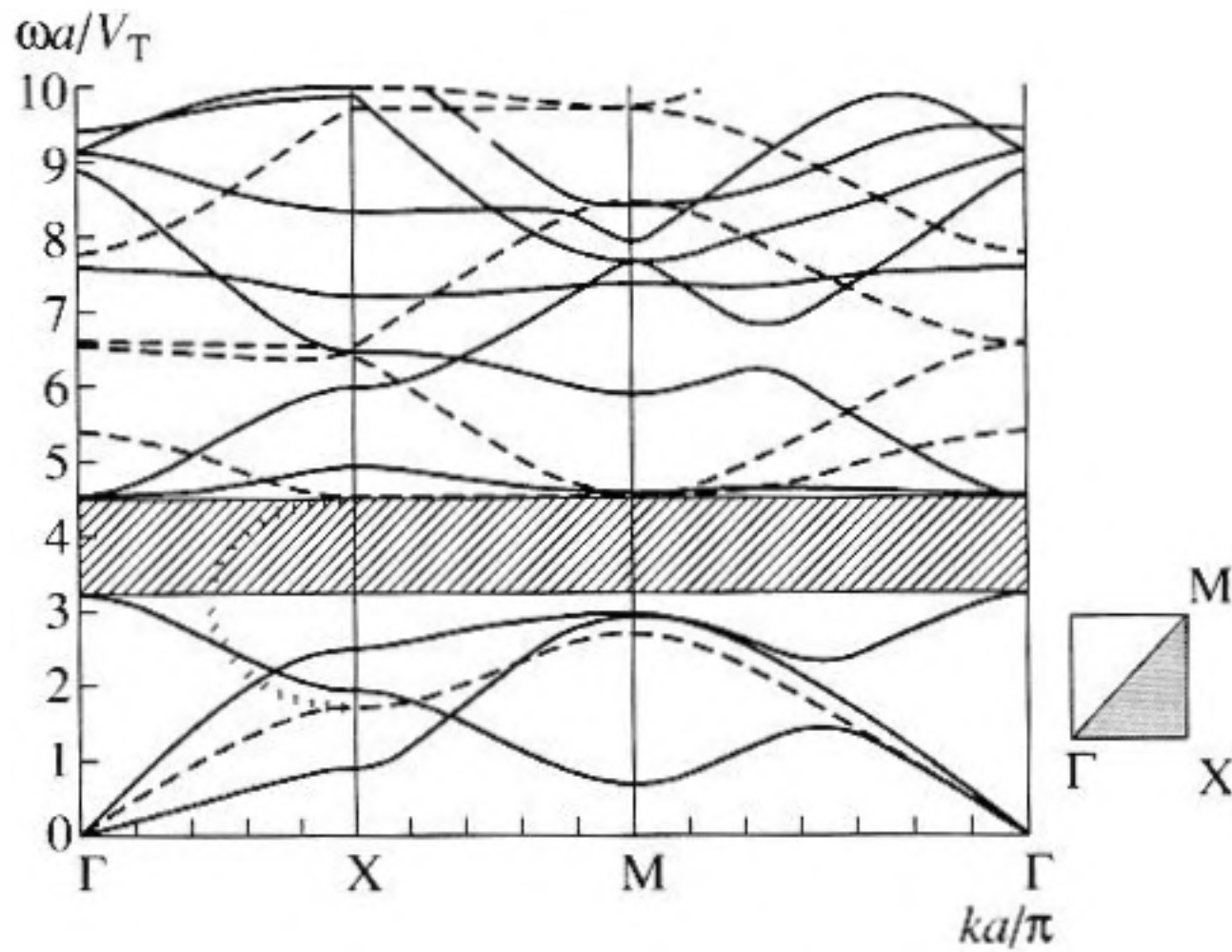


Рис. 2. Дисперсионные кривые объемных волн в системе с квадратной симметрией для $d/a = 0.9$, сплошные линии соответствуют горизонтальной поляризации, прерывистые – вертикальной. Пунктирная линия показывает частотную зависимость мнимой части волнового вектора на границе зоны Бриллюэна в направлении Γ -X.

ных элементов позволяет напрямую рассчитывать волновые поля в ограниченных областях с заданными граничными условиями. Соотношение (8) позволяет применить МКЕ для расчета акустических полей внутри одной элементарной ячейки, поскольку это соотношение накладывает дополнительные условия на границах ячейки, а именно, в случае квадратной симметрии имеем:

$$\begin{aligned} u(x, -a/2) &= \exp(ik_y a) u(x, +a/2), \\ u(-a/2, y) &= \exp(ik_x a) u(+a/2, y), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогичные выражения могут быть записаны для величин нормальных напряжений на границах квадратной элементарной ячейки

$$\begin{aligned} T_{i2}(x, -a/2) &= \exp(ik_y a) T_{i2}(x, +a/2), \\ T_{i1}(-a/2, y) &= \exp(ik_x a) T_{i1}(+a/2, y), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (10)$$

В случае гексагональной симметрии расположения отверстий аналогичные граничные условия включают в себя три набора соотношений типа (9) и (10), на противоположных сторонах гексагональной элементарной ячейки.

В результате комбинации всех уравнений для конечных элементов (7) и периодических граничных условий (9) и (10) решение сводится к обобщенной задаче на собственные значения, которая в символическом виде может быть представлена следующим выражением

$$\left\{ \begin{bmatrix} S & T \\ U & P \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \times \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix} = 0. \quad (11)$$

Здесь подматрицы $[S]$, $[T]$ и $[M]$ представляют собой комбинацию уравнений (7) и зависят только от упругих параметров среды и конфигурации разбиения на конечные элементы, а подматрицы $[U]$ и $[P]$ включают в себя граничные условия (9) и (10). Вектор – столбец $[u \ t]^T$ включает упругие смещения во всех узлах и нормальные к границам элементарной ячейки компоненты напряжений. Компоненты волнового вектора k_x и k_y входят только в выражения для подматриц граничных условий $[U]$ и $[P]$. При расчете дисперсионных кривых, прежде всего, вычислялись матрицы $[S]$, $[T]$ и $[M]$, затем для каждого заданного значения волнового вектора формировались матрицы $[U]$ и $[P]$. Обобщенная задача (11) может быть сведена к обычной задаче на собственные значения, однако, на практике численно рассчитывалась частотная зависимость абсолютной величины определителя системы (11). Минимумы на этой кривой определяют собственные значения частоты ω . Таким образом, при расчете с помощью МКЕ задача сводится к нахождению собственных значений для конечной квадратной матрицы с числом строк и столбцов, равным полному числу узлов в элементарной ячейке. Моды с высокими номерами имеют малые длины волн, сравнимые с размерами отдельных конечных элементов, поэтому можно ожидать больших ошибок при нахождении собственных значений. Наоборот, моды с малыми номерами имеют длины волн, большие по сравнению с размерами отдельных конечных элементов, и линейная аппроксимация волнового поля внутри отдельных конечных элементов позволяет вычислять дисперсионные кривые с большей точностью. Вычислялись первые 10 собственных значений частоты, при этом полное количество узлов в сетке составляло 240–250, количество узлов на границах элементарной ячейки было равно примерно 48–60. При увеличении количества узлов в полтора раза 10-ая собственная частота отличалась не более чем на 1% от своей первоначальной величины.

На рис. 2 представлены дисперсионные кривые в случае квадратной симметрии расположения отверстий для первых нескольких мод при отношении диаметра к периоду $d/a = 0.9$. Кривые рассчитаны вдоль контура Γ -X-M- Γ в первой зоне Бриллюэна, показанной справа на этом же рисунке. Характерные точки и линии в зоне Бриллюэна обозначены в соответствии с принятыми в кристаллофизике обозначениями [14]. Заштрихованная область представляет собой запрещенную зону для волн с любой поляризацией. Расчеты показывают, что полная запрещенная зона появляется для параметра d/a , большего 0.83, и при $d/a = 0.9$ занимает область нормализованных частот ($\omega a/V_T$, где ω – круговая частота, a – размер элементарной ячейки, V_T – скорость поперечных акустических волн в однородном материале) от

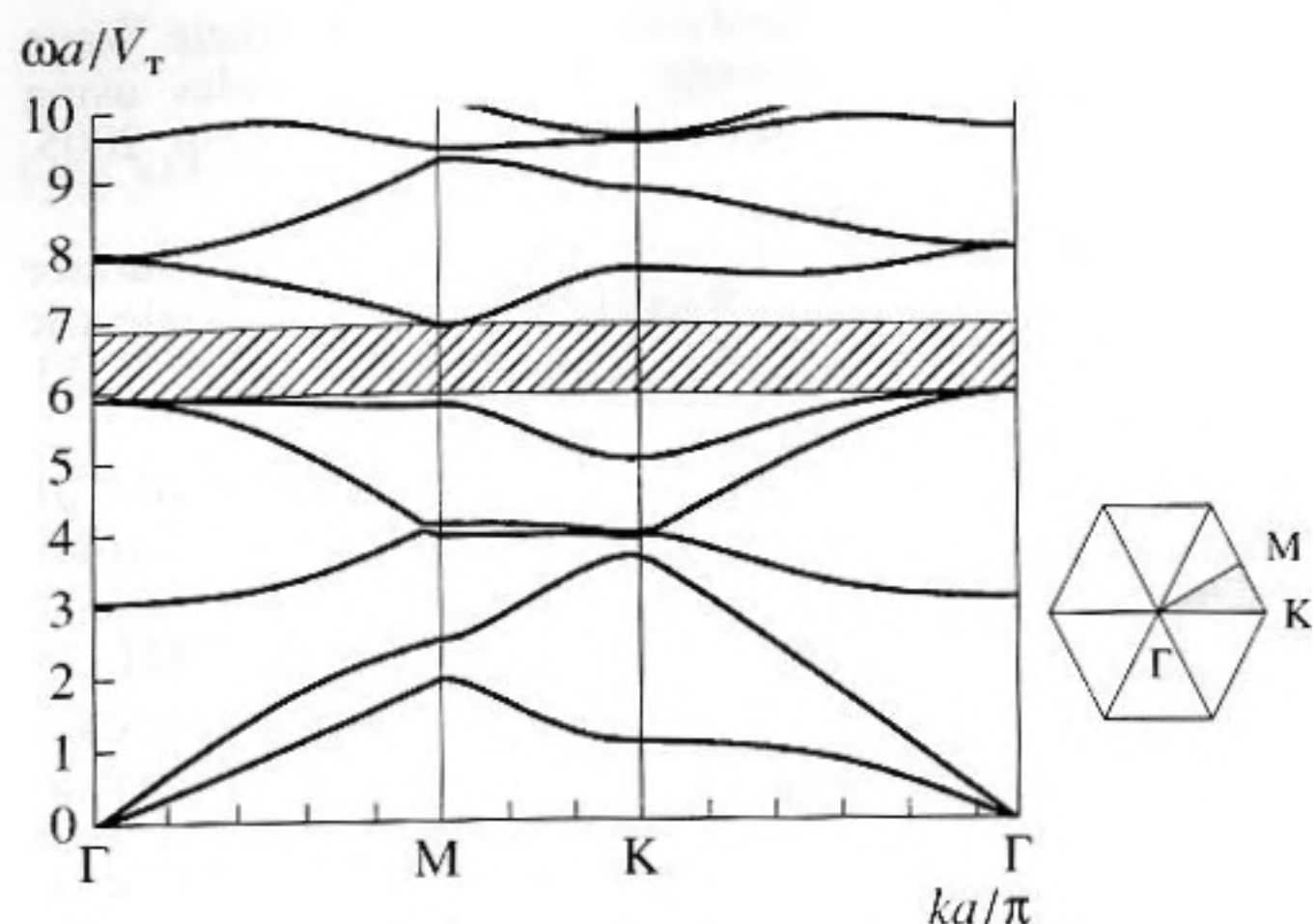


Рис. 3. Дисперсионные кривые для мод с горизонтальной поляризацией в системе с гексагональной симметрией для $d/a = 0.75$.

3.22 до 4.45. В направлении Γ -М на дисперсионной кривой первого порядка для волн с горизонтальной поляризацией имеется участок около $\pi/a < k < 2\pi/a$, где групповая скорость волны отрицательна. Это так называемая обратная волна. Обратные волны в двумерных композитных системах обычно ассоциируются с явлением отрицательного преломления при условии выпуклости поверхности равных частот [15]. Однако в данном случае поверхность равных частот является вогнутой, что видно из сопоставления дисперсионных кривых в направлениях Γ -М и М-Х на рис. 2, и отрицательного преломления с участием обратной волны не наблюдается. В то же время, на участке прямой волны около направления Γ -М поверхность равных частот является вогнутой, что также достаточно для возникновения явления отрицательного преломления [16].

В области частотной запрещенной зоны при действительном значении частоты уравнение (11) не имеет решений с чисто действительными значениями волнового вектора. Однако это уравнение может иметь решения в комплексной плоскости волновых векторов. Такие решения описывают волны, затухающие вследствие отражения от системы неоднородностей. На рис. 2 пунктирной линией показана мнимая часть волнового вектора, при этом действительная часть равна π/a и расположена на краю зоны Бриллюэна в направлении Γ -Х. Мнимая часть волнового вектора достигает максимума вблизи центральной частоты зоны непропускания, а частотная зависимость мнимой части аналогична таковой для случая брэгговского отражения в системе малых неоднородностей [10].

В случае гексагональной симметрии были обнаружены перекрывающиеся парциальные зоны

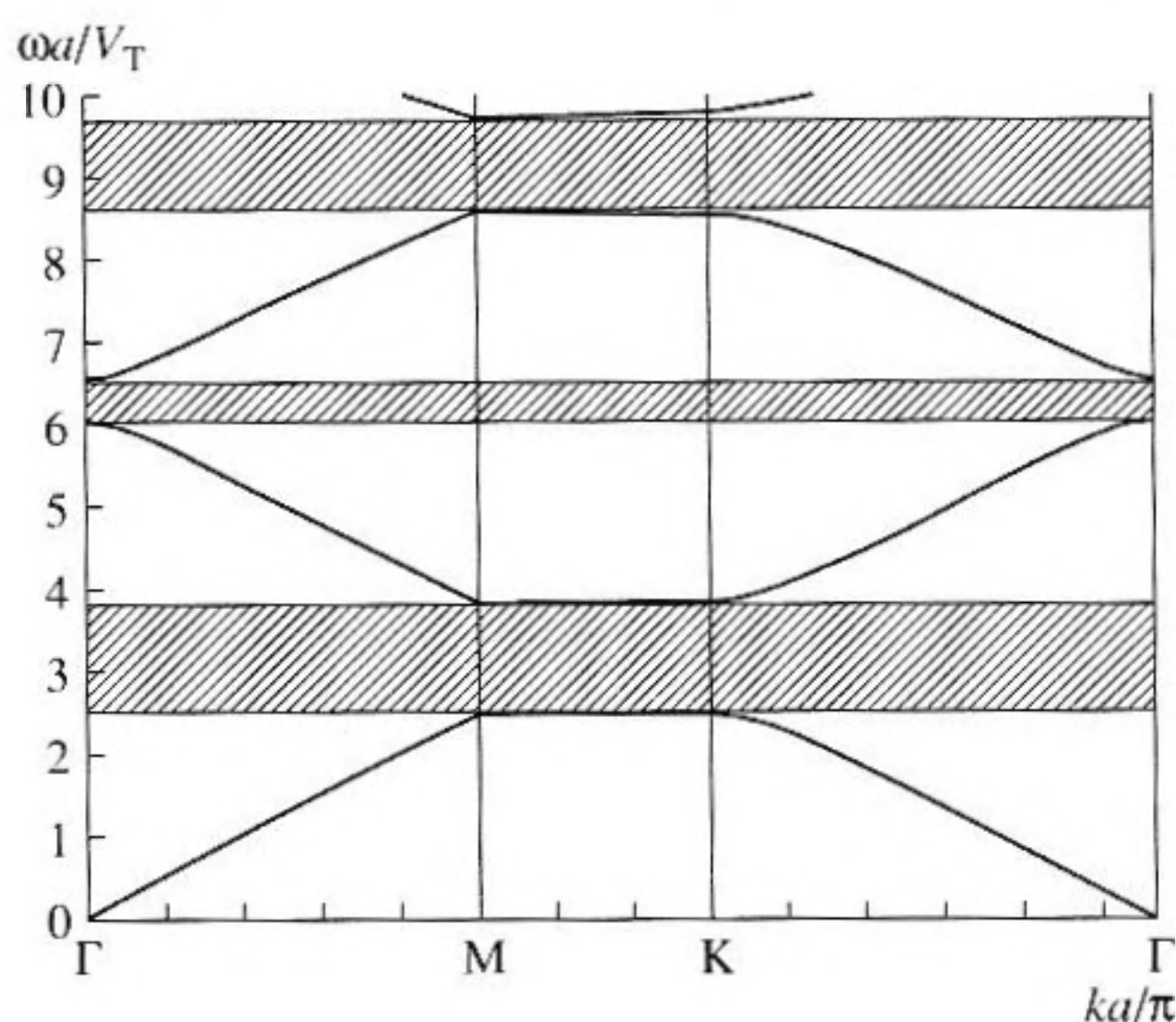


Рис. 4. Дисперсионные кривые для мод с вертикальной поляризацией в системе с гексагональной симметрией для $d/a = 0.75$.

непропускания для волн с вертикальной и горизонтальной поляризацией, что означает наличие полной зоны непропускания и в этом случае. На рис. 3 показаны дисперсионные кривые первых нескольких мод с горизонтальной поляризацией для отношения диаметра к периоду $d/a = 0.75$. Видно, что имеется запрещенная зона в диапазоне частот 5.99 до 6.93.

В случае вертикальной поляризации в системе с гексагональной симметрией в рассчитанном диапазоне нормализованных частот имеются три зоны непропускания. Первая запрещенная зона занимает область частот от 2.46 до 3.81, вторая зона расположена в области от 6.0 до 6.42 и третья зона расположена в области от 8.56 до 9.69. Вторая зона для волн с вертикальной поляризацией находится почти целиком внутри зоны для горизонтально поляризованных волн, а полная запрещенная зона занимает область частот от 5.99 до 6.42. Отметим, что относительная ширина этой полной запрещенной зоны составляет примерно $\Delta\omega/\omega_c = 6\%$, где $\Delta\omega$ – абсолютная ширина, а ω_c – значение центральной частоты запрещенной зоны. Кривые на рис. 3 и 4 рассчитаны вдоль контура Γ -М-К- Γ в первой зоне Бриллюэна, показанной на рис. 3 справа.

Таким образом, в настоящей работе с помощью метода конечных элементов рассчитаны дисперсионные кривые акустических волн в плавленом кварце с двумерной периодической структурой круглых отверстий. Рассмотрены случаи квадратной и гексагональной симметрии расположения отверстий. В случае квадратной симметрии существует полная зона непропускания при отношении диаметра отверстий к периоду боль-

шему, чем 0.83. В случае гексагональной симметрии обнаружена полная зона непропускания шириной 6% при отношении диаметра отверстий к периоду $d/a \leq 0/7$. Рассчитана частотная зависимость мнимой части волнового вектора внутри зоны непропускания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yablonovitch E., Gmitter T.J., Leung K.M.* Photonic band structure: The face-centered cubic case employing nonspherical atoms // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 67. P. 2295.
2. *Kushwaha M.S., Halevi P., Martinez G., Dobrzynski L., Djafari-Rouhani B.* Theory of band structure of periodic elastic composites // *Phys. Rev. B*, 1994. V. 49. P. 2313.
3. *Богомолов В.Н., Парфеньева Л.С., Смирнов И.А., Мисиорек Х., Ежовский А.* Прохождение фононов через фотонные кристаллы – среды с пространственной модуляцией акустических свойств // *ФТТ*. 2002. Т. 44. С. 175.
4. *Tanaka Y., Tomoyasu Y. and Tamura S.* Band structure of acoustic waves in phononic lattices: Two-dimensional composites with large acoustic mismatch // *Phys. Rev. B*. 2000. V. 62. P. 7387.
5. *Wilm M., Khelif A., Ballandras S., Laude V., Djafari-Rouhani B.* Out-of-plane propagation of elastic waves in two-dimensional phononic band-gap materials // *Phys. Rev. E*, 67. 2003 P. 065602–1.
6. *Wu T.T., Hsu Z.C., Huang Z.G.* Band gaps and the electromechanical coupling coefficient of a surface acoustic wave in a two-dimensional piezoelectric phononic crystal // *Phys. Rev. B*. 2005. V. 71. P. 064303–1.
7. *Sun J.H., Wu T.T.* Analyses of Surface Acoustic Wave Propagation in Phononic Crystal Waveguides using FDTD Method // *Proc. of IEEE Ultrason. Symp.* 2005. P. 73.
8. *Hsu J.C., Wu T.T.* Bleustein-Gulyaev-Shimizu Surface Acoustic Waves in Two-Dimensional Piezoelectric Phononic Crystals // *IEEE Trans. on UFFC*. 2006. V. 53. P. 1169.
9. *Багхаи-Ваджи А.Р., Плесский В.П., Симонян А.В.* Распространение волн рэлеевского типа в периодических структурах из резонирующих элементов // *Акуст. журн.* 1993. Т. 38. № 5. С. 806–821.
10. *Григорьевский В.И., Гуляев Ю.В.* Распространение быстрой волны утечки в системе металлических электродов на поверхности кристалла тетрабората лития // *Акуст. журн.* 2000. Т. 46. № 4. С. 474–480.
11. *Иванов О.В., Никитов С.А., Гуляев Ю.В.* Оболочечные моды волоконных световодов // *УФН*. 2006. Т. 176. С. 175.
12. *Сильвестер П., Феррари Р.* Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. Пер. с англ. М: Мир. 1986. 229 с., илл.
13. *Балабаев С.М., Ивина Н.Ф.* Анализ пьезопреобразователей комбинированным методом конечных и граничных элементов // *Акуст. журн.* 1996. Т. 42. № 2. С. 172–178.
14. *Бонч-Бруевич В.Л., Калашиников С.Г.* Физика полупроводников. М: Наука. 1977 – 672 с., илл.
15. *Qiu C., Zhang X., Liu Z.* Far-field imaging of acoustic waves by a two-dimensional sonic crystal // *Phys. Rev. B*, 71. 2005. P. 054302–1.
16. *Luo C., Johnson S.G., Joannopoulos J.D., Pendry J.B.* All-angle negative refraction without negative effective index // *Phys. Rev. B*, 65. 2002. P. 201104–1.

Dispersion Curves of Bulk Acoustic Waves in an Elastic Body with a Two-Dimensional Periodic Structure of Circular Holes

A. V. Grigor'evskii, V. I. Grigor'evskii, and S. A. Nikitov

Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences (Fryazino Branch), pl. Vvedenskogo 1, Fryazino, Moscow oblast, 141190 Russia

e-mail: vig324@ms.ire.rssi.ru

Abstract—The dispersion curves of bulk acoustic waves in systems of circular holes made in an isotropic elastic material are calculated by the finite-element method for the cases of the square and hexagonal symmetries of the hole arrangement. The presence of total band gaps for acoustic waves is demonstrated, and the presence of inverse quasi-transverse first-order modes is revealed. For the hexagonally symmetric system of holes, total band gaps are found in the region of higher-order modes. For waves with a purely shear polarization, the imaginary part of the wave number in the first band gap is calculated.