АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2008, том 54, № 3, с. 439–450

АКУСТИКА ОКЕАНА, ГИДРОАКУСТИКА

УДК: 551.463

СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ЛУЧЕВОЙ И ВОЛНОВОЙ КАРТИНАМИ И ПОДАВЛЕНИЕ ХАОСА ПРИ ДАЛЬНЕМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В ОКЕАНЕ

© 2008 г. Д. В. Макаров, Л. Е. Коньков, М. Ю. Улейский

Тихоокеанский океанологический институт имени В.И. Ильичева ДВО РАН 690041 Владивосток, ул. Балтийская 43

E-mail: makarov@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 03.05.07 г.

Рассмотрена задача о дальнем распространении звука в горизонтально неоднородном подводном звуковом канале. Показано, что вертикальные осцилляции неоднородности резонансным образом влияют на приосевые лучи и разрушают их устойчивость. Как следствие, приосевые лучи демонстрируют хаотическое поведение. Лучевой хаос проявляется как интенсификация взаимодействия между соседними модами с малыми номерами. В этом случае появляется большое количество сильно связанных мод и картина поля вблизи оси канала приобретает диффузионный вид. Вместе с тем, нами показано, что с понижением частоты сигнала осцилляции неоднородности по глубине начинают подавлять взаимодействие соседних мод и, тем самым, способствуют ослаблению хаоса, вплоть до полного его исчезновения. Таким образом, структура поля вблизи оси канала становится регулярной, что подтверждается численным моделированием.

PACS: 43.30.Bp, 43.40.Cq, 05.45.Ac, 05.45.Mt, 92.10.Vz

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы была проведена серия экспериментов по дальнему распространению импульсных звуковых сигналов в северо-восточной части Тихого океана [1]. Было обнаружено, что при распространении импульсов с центральными частотами 75 и 84 Гц поздняя часть принимаемого сигнала является сильно нерегулярной и расплывчатой, а приходы различных лучей не разрешаются во времени. В то же время была отмечена удивительная стабильность и разрешаемость импульсов в ранней части принимаемого сигнала. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами лучевого моделирования в присутствии внутренних волн и указывают на связь нерегулярности поздней части с неустойчивостью по Ляпунову и, как следствие, хаосом лучей [2]. Это явление, лучевой хаос, стало предметом активных исследований [3–9]. В результате был выявлен ряд устойчивых свойств многолучевых ансамблей, таких как, например, группирование по временам прихода [10, 11] или чувствительность к форме невозмущенного профиля скорости звука [12, 13], сохраняющихся даже в случае сильной хаотичности отдельных траекторий. Несмотря на это, лучевой хаос до сих пор рассматривается как одно из главных ограничений гидроакустической томографии океана, не допускающее точное решение задачи реконструкции свойств среды [14].

Возможно ли преодоление проблемы лучевого хаоса? Лучевой хаос целиком и полностью обусловлен свойствами среды, в частности, ее изменчивостью вдоль трассы акустического канала, что приводит к неинтегрируемости системы лучевых уравнений [15]. Казалось бы, мы не можем изменить свойства среды и хаос должен рассматриваться как естественное и неконтролируемое явление. На самом деле мы можем, до определенной степени, управлять чувствительностью звукового поля к тем или и иным особенностям профиля скорости звука. Так, в работе [16] было показано, что причиной сильного хаоса приосевых лучей является резонансное взаимодействие с тонкоструктурными неоднородностями вдоль трассы волновода. С другой стороны, в работе [17] было указано, что при частотах порядка 20 Гц тонкая структура профиля скорости звука не оказывает влияния на рефракцию звуковых волн, и при расчете лучевой картины тонкоструктурные неоднородности должны быть предварительно сглажены. Отсюда возникает вопрос – можем ли мы управлять хаотичностью волнового поля, варьируя частоту сигнала? Ответ на этот вопрос требует детального анализа условий соответствия лучевой и волновой картины в условиях хаоса.

В данной работе мы проводим сравнительный анализ волновой и лучевой картин для модели подводного звукового канала с детерминированной неоднородностью, осциллирующей в горизонтальном и вертикальном направлениях. В частности, мы сравниваем свойства межмодового

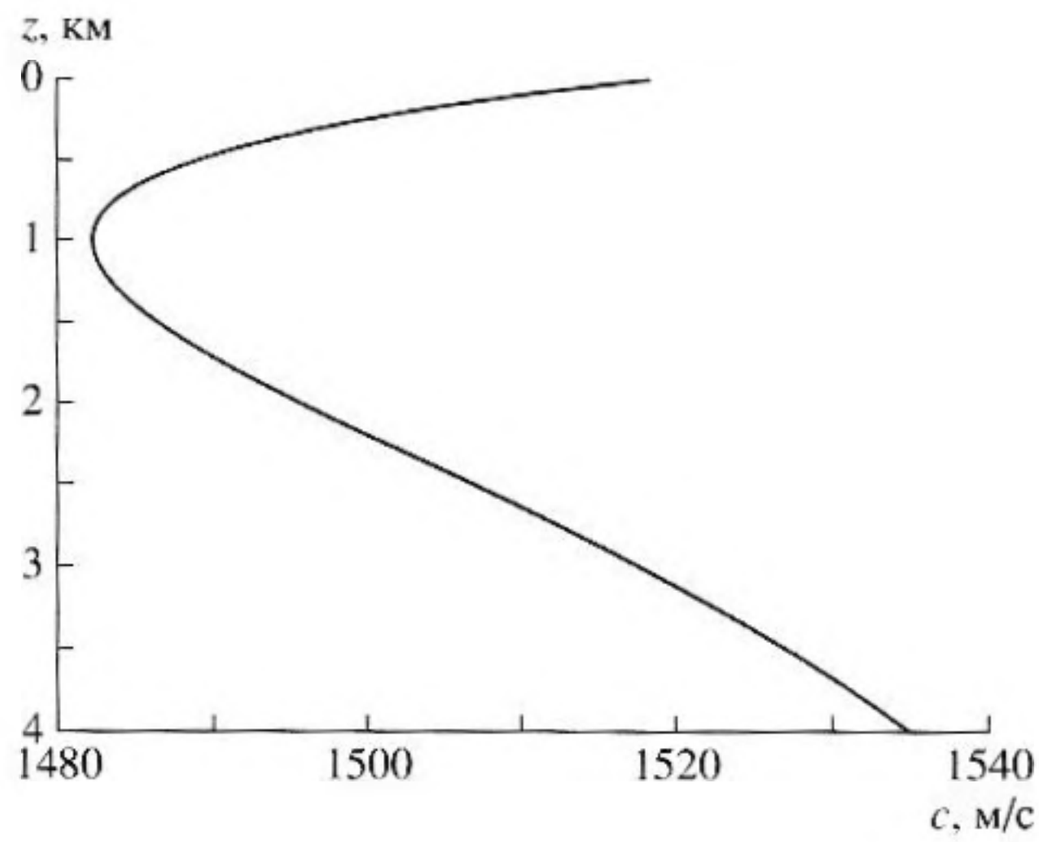

Рис. 1. Профиль скорости звука.

взаимодействия, следующие из волнового и из лучевого подходов. С одной стороны, особое внимание предполагается уделить тому, насколько сильно в волновой картине проявляются свойства, непосредственно связанные с хаотической динамикой лучей. В качестве характерного проявления хаоса мы будем рассматривать шумообразную горизонтальную изменчивость модового спектра и, как следствие, нерегулярную интерференционную структуру поля. С другой стороны, значительный интерес вызывает роль волновых поправок к лучевой картине.

Общий план данной статьи выглядит следующим образом. В следующем разделе описывается модель волновода, использованная в численных расчетах. В разделе 3 приводится решение задачи Штурма–Лиувилля на модовые функции волновода. Раздел 4 содержит описание лучевой динамики, при этом подробно рассматривается явление вертикального резонанса, играющее ключевую роль в неустойчивости приосевых лучей. В разделе 5 рассматривается влияние вертикального резонанса на модовую структуру акустического поля. В разделе 6 свойства модовой структуры рассмотрены с позиции волнового подхода. Раздел 7 посвящен сопоставлению теоретических результатов с численным моделированием акустического поля. И, наконец, в Заключении проводится краткое описание основных выводов статьи.

2. МОДЕЛЬ ПОДВОДНОГО ЗВУКОВОГО КАНАЛА

Рассмотрим слабонеоднородный глубоководный подводный звуковой канал. Представим профиль скорости звука в следующем виде

$$c(z, r) = c_b(z) + \delta c(z, r), \tag{1}$$

где z – глубина, r – горизонтальная координата, $c_b(z)$ – некоторый опорный профиль, а $\delta c(z, r)$ – малая осциллирующая неоднородность вдоль трассы канала. В данной работе в качестве опорного профиля используется следующая модель:

$$c_b(z) = c_0\left[1 - \frac{b^2}{2}(\mu - e^{-az})(e^{-az} - \gamma)\right], \quad 0 \le z \le h, \tag{2}$$

где $\gamma = \exp(-ah)$, $\mu = 1.078$, $a = 0.5$ км$^{-1}$, $b = 0.557$, $h = 4.0$ км – максимальная глубина, $c_0 = c(z = h) = 1535$ м/с (см. рис. 1). Эта модель была введена в работах [18, 19]. Основными ее преимуществами являются реалистичность и простота аналитического описания. Глубина оси канала находится по формуле

$$z_a = \frac{1}{a}\ln\frac{2}{\mu + \gamma} \tag{3}$$

и приблизительно равна 1 км. Мы будем рассматривать модель периодической горизонтальной неоднородности, описываемой формулой

$$\delta c(z, r) = \varepsilon c_0 \frac{z}{B} e^{-2z/B} \sin\frac{2\pi z}{\lambda_z} \sin\frac{2\pi r}{\lambda_r}, \tag{4}$$

где $\varepsilon = 0.005$, $B = 1$ км, $\lambda_z = 200$ м, $\lambda_r = 5000$ м. Несмотря на идеализированность, данная модель весьма полезна для изучения механизмов влияния вертикально осциллирующих неоднородностей на свойства акустического поля.

3. МОДЫ ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОДА

Мы намерены акцентировать свое внимание на исследовании свойств волн, распространяющихся под малыми углами относительно оси волноводного канала. В этом случае амплитуда звукового поля удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{i}{k_0}\frac{\partial U(z, r)}{\partial r} = \hat{H}U(z, r),$$
$$\hat{H} = -\frac{1}{2k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\Delta c(z) + \delta c(z, r)}{c_0}, \tag{5}$$

где $k_0 = 2\pi f/c_0$, f – частота сигнала, $\Delta c(z) = c_b(z) - c_0$.

В однородном волноводе поле может быть представлено в виде суммы нормальных мод, являющихся решениями задачи Штурма–Лиувилля

$$\frac{\partial^2 U_m}{\partial z^2} + 2k_0^2\left(E_m - \frac{\Delta c}{c_0}\right)U_m = 0. \tag{6}$$

Для первых мод, распространяющихся в толще океана, решение задачи (6) выглядит следующим образом

$$U_m(\xi) = A_m e^{-\xi/2}\xi^{s_m}F(1-m, 2s_m+1, \xi), \qquad (7)$$

где m – целое положительное число, A_m – константа, подбираемая исходя из условия нормировки

$$\int U_m U_m^* dz = 1, \qquad (8)$$

$F(1-m, 2s_m+1, \xi)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, параметр s_m дается выражением

$$s_m = \frac{k_0}{a}\sqrt{\frac{\mu\gamma b^2}{2} - E_m}, \qquad (9)$$

а переменная ξ связана с глубиной с помощью простой формулы

$$\xi(z) = \frac{2k_0}{b}ae^{-az}. \qquad (10)$$

Стоит отметить, что профиль (2) относится к обширному семейству точно решаемых на основе вырожденного гипергеометрического уравнения [20]. Спектр собственных значений описывается формулой

$$E_m = \frac{\mu\gamma b^2}{2} - \frac{1}{2}\left[b\frac{\mu+\gamma}{2} - \frac{a}{k_0}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]^2, \qquad (11)$$

где $m = 0, 1, \ldots$. Правило квантования (11) может быть представлено в более лаконичной форме с помощью действия луча [5, 21]. Действие луча определяется по формуле

$$I(E) = \frac{1}{\pi}\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} p(z, E)dz, \qquad (12)$$

где $z_{\min}$ и $z_{\max}$ – верхняя и нижняя точки заворота луча, соответственно. Функция $p(z, E)$ имеет вид

$$p(z, E) = \sqrt{2E + 2\Delta c/c_0}. \qquad (13)$$

В однородном волноводе E, как и действие, является инвариантом лучевой траектории. Для волновода с профилем (2) вычисление интеграла (12) дает результат [16, 18, 19]:

$$I(E) = \frac{b}{a}\left(\frac{\mu+\gamma}{2} - \sqrt{\mu\gamma - \frac{2E}{b^2}}\right). \qquad (14)$$

Действие равно нулю для горизонтального луча, идущего вдоль оси канала, и нарастает с увеличением "размаха" траектории луча по глубине. Действие модового луча удовлетворяет условию

$$I_m = I(E = E_m). \qquad (15)$$

Формулы (14) и (15) позволяют переписать выражение (11) следующим образом:

$$k_0 I_m = m + 1/2. \qquad (16)$$

Эта формула совпадает с известным правилом квантования Бора–Зоммерфельда [22].

При наличии слабой неоднородности действие, как правило, достаточно медленно меняется вдоль луча, являясь адиабатическим инвариантом. Адиабатическая инвариантность, однако, нарушается в резонансных областях. Этот случай будет рассмотрен в следующем разделе.

4. ЛУЧЕВАЯ КАРТИНА ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНОМ ПОДВОДНОМ ЗВУКОВОМ КАНАЛЕ

Рассмотрим свойства звуковых лучей в подводном звуковом канале с опорным профилем скорости звука (2) и горизонтальной неоднородностью (4). В лучевом пределе оператору $\hat{H}$ (5) соответствует функция Гамильтона следующего вида [23]:

$$H = -1 + \frac{p^2}{2} + \frac{\Delta c(z)}{c_0} + \frac{\delta c(z, r)}{c_0}, \qquad (17)$$

где p – тангенс угла скольжения звуковой волны. Траектории звуковых лучей удовлетворяют системе лучевых уравнений

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{\partial H}{\partial z}. \qquad (18)$$

Представим неоднородность (4) в другом виде:

$$\delta c(z, r) = \varepsilon c_0 \frac{z}{2B}e^{-2z/B} \times \\ \times [\cos(k_z z - k_r r) - \cos(k_z z + k_r r)], \qquad (19)$$

где $k_z = 2\pi z/\lambda_z$, $k_r = 2\pi r/\lambda_r$. Кроме того, введем обозначения для фаз неоднородности

$$\psi^- = k_z z - k_r r, \quad \psi^+ = k_z z + k_r r. \qquad (20)$$

Теперь лучевые уравнения (18) принимают следующий вид

$$\frac{dz}{dr} = p, \qquad (21)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{c_0}\frac{d\Delta c}{dz} - \frac{\varepsilon e^{-2z/B}}{2B} \times \\ \times\left[\left(1 - \frac{2z}{B}\right)(\cos\psi^- - \cos\psi^+) - k_z z(\sin\psi^- - \sin\psi^+)\right]. \qquad (22)$$

Поведение лучей качественно зависит от характера изменения члена, соответствующего горизонтальной неоднородности, вдоль лучевых траекторий. Здесь можно выделить два режима.

В первом режиме фазы неоднородности ψ^- и ψ^+ быстро меняются вдоль лучей в силу малости периодов неоднородности λ_z и λ_r. В этом случае мы можем воспользоваться методом усреднения, представив решение системы (21), (22) в виде $z = \bar{z} + \delta z$, $p = \bar{p} + \delta p$, где $\bar{z}$ и $\bar{p}$ решения усредненных лучевых уравнений

$$\frac{d\bar{z}}{dr} = \bar{p}, \quad \frac{d\bar{p}}{dr} = -\frac{1}{c_0}\frac{d\Delta c}{d\bar{z}}, \tag{23}$$

а δz, δp – быстроосциллирующие добавки с нулевым средним по r. Система уравнений (23) легко интегрируется (см., например, [19]), и ее решение устойчиво по Ляпунову.

Второй режим соответствует прохождению резонансных участков, когда выполняется одно из условий:

$$\frac{d\psi^+}{dr} = k_z p + k_r \simeq 0, \tag{24}$$

$$\frac{d\psi^-}{dr} = k_z p - k_r \simeq 0. \tag{25}$$

Поскольку появление резонансов (24) и (25) связано с вертикальными осцилляциями неоднородности, резонансы такого вида получили название вертикальных [16, 24].

Рассмотрим окрестность одного из вертикальных резонансов, например, соответствующего условию (24). Для начала упростим уравнение (22). С этой целью, во-первых, мы учтем, что параметр k_z в нашем случае является большим, что дает право после раскрытия скобок оставить в правой части (22) только те члены, которые пропорциональны k_z. Кроме того, мы отбросим нерезонансный член, пропорциональный $\sin\psi^-$. Таким образом, уравнение (22) принимает следующий вид:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{c_0}\frac{d\Delta c}{dz} - \frac{\varepsilon k_z z e^{-2z/B}}{2B}\sin\psi^+. \tag{26}$$

Еще раз дифференцируя (24) по r и учитывая (26), получаем уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{\varepsilon k_z^2 z e^{-2z/B}}{2B}\sin\psi + \frac{k_z}{c_0}\frac{d\Delta c}{dz} = 0. \tag{27}$$

В этой формуле мы опустили верхний индекс "+". Уравнение второго порядка (27) может быть записано в виде системы двух уравнений первого порядка в гамильтоновой форме

$$\begin{gathered}\frac{d\psi}{dr} = y = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial y},\\ \frac{dy}{dr} = -\frac{\varepsilon k_z^2 z e^{-2z/B}}{2B}\sin\psi - \frac{k_z}{c_0}\frac{d\Delta c}{dz} = -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\psi},\end{gathered} \tag{28}$$

с функцией Гамильтона

$$\tilde{H}(y,\psi) = \frac{y^2}{2} + \frac{k_z}{c_0}\frac{d\Delta c}{dz}\psi - \frac{\varepsilon k_z^2 z e^{-2z/B}}{2B}\cos\psi. \tag{29}$$

При выполнении неравенства

$$G(z) = \frac{\varepsilon k_z z e^{-2z/B}}{2B} - \left|\frac{1}{c_0}\frac{d\Delta c}{dz}\right| > 0 \tag{30}$$

фазовый портрет, соответствующий системе уравнений (28), содержит особую точку типа центр, вокруг которой расположена область колебательного движения. Именно эта область и ассоциируется с резонансной зоной, поскольку после попадания луча в нее производная $d\psi/dr$ остается малой в течении некоторого интервала r, что приводит к появлению секулярного члена при интегрировании (22).

Следует заметить, что выражения (27)–(30) параметрически зависят от глубины луча z. Таким образом, по мере изменения глубины луч может как попасть в резонансную зону, так и, впоследствии, покинуть ее. Пересечение границ резонансной зоны происходит тогда, когда вдоль траектории луча выполняется условие [25]

$$\tilde{H} = \tilde{H}_s, \tag{31}$$

где

$$\tilde{H}_s = \frac{k_z}{c_0}\frac{\partial\Delta c}{\partial z}\psi_c - \varepsilon k_z^2\frac{z}{B}\exp\left(-\frac{2z}{B}\right)\cos\psi_c, \tag{32}$$

$$\psi_c = \pi + \arcsin\left(\frac{B\exp(2z/B)}{\varepsilon c_0 k_z z}\frac{\partial\Delta c}{\partial z}\right). \tag{33}$$

В формулах (31) и (32) предполагается, что ψ – циклическая переменная с областью значений в интервале $[0 : 2\pi]$.

Вероятность попадания луча в вертикальный резонанс пропорциональна площади резонансной зоны в пространстве ψ–y, которая, в свою очередь, увеличивается с ростом функции $G(z)$, определяемой выражением (30). Как мы видим из рис. 2, эта функция имеет максимум вблизи оси канала, где $d\Delta c/dz = 0$. Это обстоятельство позволяет нам найти те лучи, на которые вертикальный резонанс оказывает наибольшее влияние. Для этого, во-первых, подставим (3) в (13), получая формулу для тангенса угла скольжения на оси канала

$$p((z = z_a), E) = \sqrt{2E + \frac{b^2(\mu-\gamma)^2}{4}}. \tag{34}$$

Далее, подставляя (34) в (24), находим значение параметра E, соответствующее резонансным лучам

$$E_{\text{res}} = \frac{\lambda_z^2}{2\lambda_r^2} - \frac{b^2(\mu-\gamma)^2}{8}. \tag{35}$$

Подставляя (35) в (14), находим резонансное значение действия

$$I_{\text{res}} = \frac{b(\mu+\gamma)}{2a}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda_z^2}{b^2\lambda_r^2(\mu+\gamma)^2}}\right). \tag{36}$$

При $\lambda_z/\lambda_r \longrightarrow 0$ резонансное значение действия стремится к нулю. Это означает, что мелкомасштабные глубинные осцилляции неоднородности волновода в первую очередь оказывают влияние на приосевые лучи. Кроме того, стоит заметить, что формулы (35) и (36) не зависят от знака λ_r. Это означает, что резонансы (24) и (25) влияют на одни и те же лучи.

Прохождение сквозь зону вертикального резонанса сопровождается резким изменением действия луча. Используя подход, развитый в работах [26–29], находим формулу для скачка действия

$$\Delta I = \frac{s\varepsilon z^* p^* \sqrt{k_z}}{\omega^* \exp(2z^*/B)} \int\limits_{-s^*\infty}^{\psi^*} \frac{\sin\psi}{y(\psi)} d\psi, \tag{37}$$

где ψ^*, z^* и p^* – значения соответствующих величин в момент попадания в зону вертикального резонанса, определяемый критерием (31),

$$\omega^* = ab\sqrt{\mu\gamma - \frac{p^{*2}}{b^2} + [\mu - \exp(-az^*)][\exp(-az^*) - \gamma]},$$

s – знак производной $\partial\Delta c/\partial z$ в момент попадания в резонанс, а функция $y(\psi)$ задается выражением

$$y(\psi) = \sqrt{2\left(\frac{\tilde{H}_s(r^*)}{k_z} - \frac{1}{c_0}\frac{\partial\Delta c(z=z^*)}{\partial z}\psi + \varepsilon k_z \frac{z^*}{B}\exp(-2z^*/B)\cos\psi\right)}. \tag{38}$$

Величина скачка действия, оцениваемая по формуле (37), неустойчива по отношению к малым вариациям начальных условий. Это означает, что два близких луча уже после первого прохождения сквозь вертикальный резонанс окажутся разделенными. После нескольких последовательных прохождений траектории этих лучей окончательно перестанут коррелировать. Таким образом, вертикальный резонанс приводит к хаосу лучей, имеющих близкое к резонансному значение действия (аналогичный эффект наблюдался в работе [30]). Это наглядно продемонстрировано на рис. 3, где изображены траектории нескольких приосевых лучей.

5. ВЛИЯНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО РЕЗОНАНСА НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОД В ЛУЧЕВОМ ПРЕДЕЛЕ

Рассмотрим вопрос о влиянии вертикального резонанса на взаимодействие мод. Как было показано Вировлянским [31–36], в рамках лучевого подхода амплитуда моды с номером m на расстоянии r от источника определяется суперпозицией лучей со значениями действия, близкими к действию модового луча (15)

$$I(r) \simeq I_m. \tag{39}$$

Таким образом, в лучевом пределе взаимодействие мод связано с изменением действия вдоль лучей. С другой стороны, как уже отмечалось выше, в слабонеоднородных волноводах действие луча является адиабатическим инвариантом и в нерезонансном случае медленно меняется вдоль траектории. Это означает, что из моды с номером i энергия, в первую очередь, переходит в соседние моды, $i-1$-ую или $i+1$-ую, и только потом в $i-2$-ую или $i+2$-ую.

Рассеяние лучей на вертикальном резонансе нарушает адиабатичность действия и, помимо этого, приводит к лучевому хаосу. В условиях хаоса лучи быстро диффундируют по действию внутри интервала $I \in [I_{\text{res}} - \Delta I_{\max} : I_{\text{res}} + \Delta I_{\max}]$, где $\Delta I_{\max}$ – максимальное изменение действия, следу-

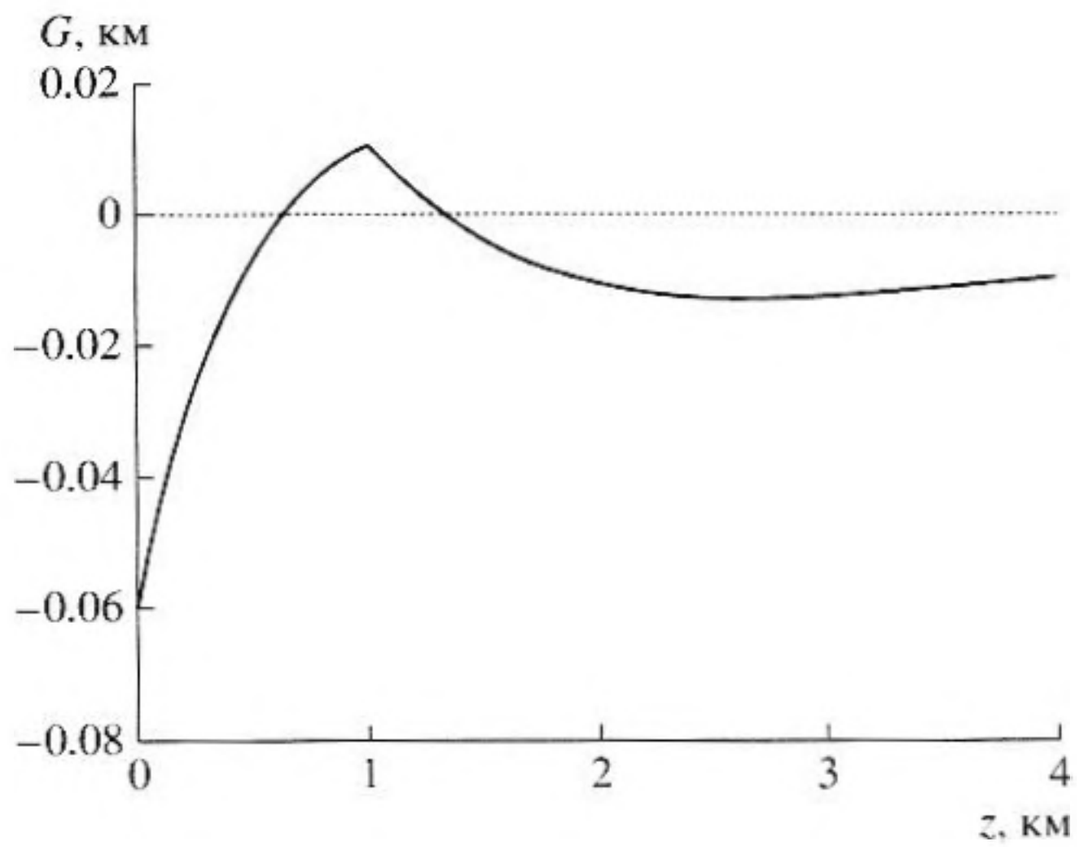

Рис. 2. Функция $G(z)$.

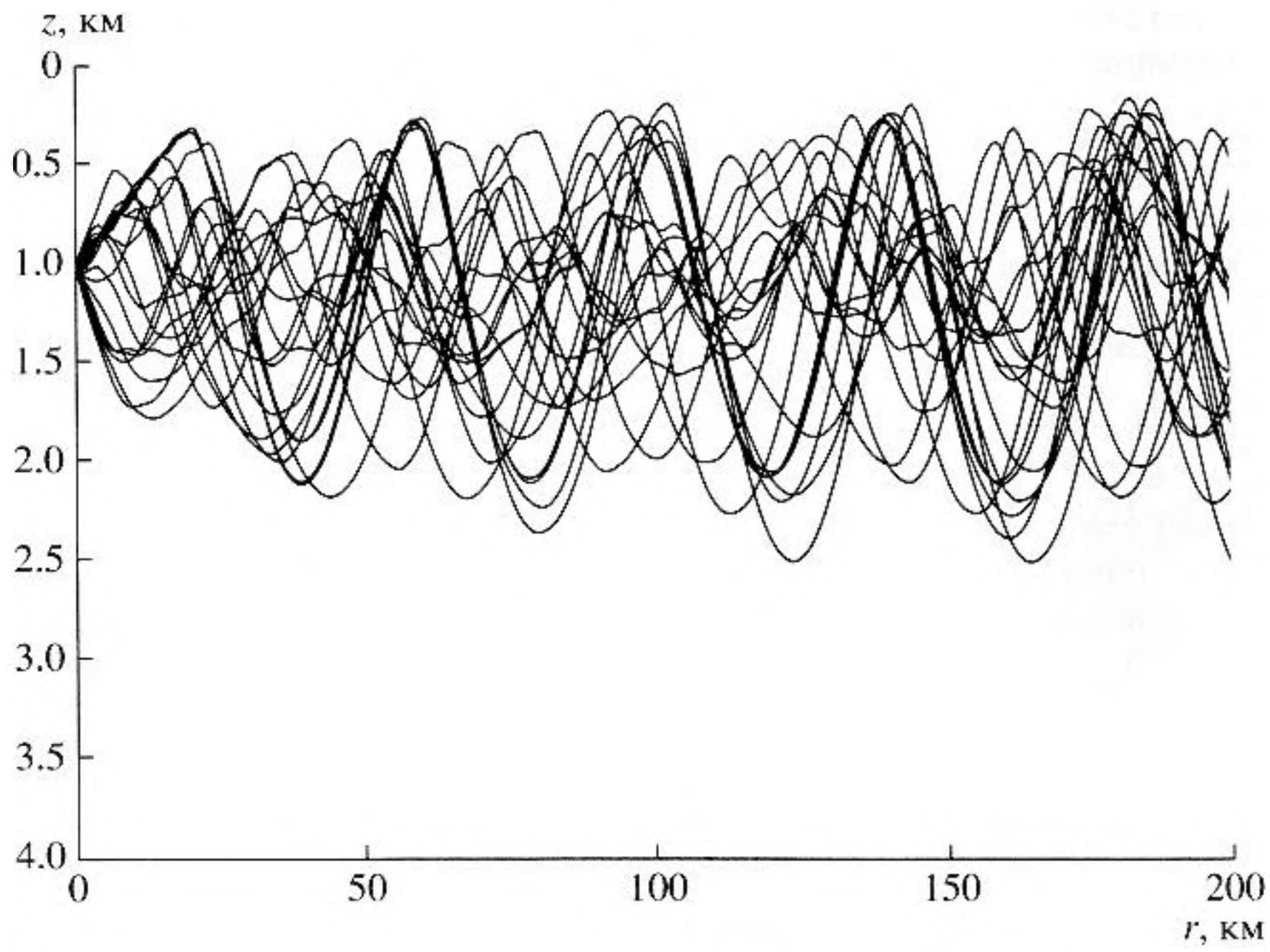

Рис. 3. Траектории звуковых лучей, испускаемых с оси канала, $p(r = 0) \in [-0.1 : 0.1]$.

ющее из формулы (37). Это сопровождается перераспределением энергии лучевого пучка между модами с номерами, принадлежащими интервалу

$$m' - \Delta m \le m \le m' + \Delta m, \tag{40}$$

где Δm может быть оценено с помощью (16) как

$$\Delta m \simeq k_0 \Delta I_{\max}, \tag{41}$$

$$m' \simeq k_0 I_{\text{res}} - 1/2. \tag{42}$$

Поскольку область значений ΔI является непрерывной, энергия лучевого пучка перераспределяется между всеми модами, принадлежащими интервалу (40).

Таким образом, как мы видим, лучевой подход, как в условиях хаоса, так и в случае устойчивости лучей, предполагает преобладание взаимодействия между модами с близкими номерами. Лучевой хаос проявляет себя в значительном увеличении числа взаимодействующих мод. Кроме того, так как вклады хаотических лучей в одну и ту же моду являются некогерентными, зависимость модовых амплитуд от горизонтальной координаты r [31] является нерегулярной.

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОД В НЕРЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ – ВОЛНОВОЙ ПОДХОД

Лучевая теория адекватно описывает модовую структуру поля при высоких частотах сигнала, когда модовый спектр слабо дискретизирован и может приближенно рассматриваться как сплошной. В этом случае достаточно рассчитать эволюцию соответствующего лучевого пучка в пространстве переменной действия.

Рассмотрим теперь условия формирования модовой структуры поля при сравнительно малых частотах, когда дискретизация модового спектра играет существенную роль. Представим поле в виде суммы мод однородного волновода

$$U(z, r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(r) U_m(z), \tag{43}$$

где модовые функции $U_m(z)$ определяются по формуле (7). Подставляя (43) в (5) и учитывая (6), получаем уравнения эволюции для модовых амплитуд

$$\frac{i}{k_0}\frac{dc_m}{dr} = E_m c_m + \sum_m v_{mn} c_n, \tag{44}$$

где v_{mn} вычисляется следующим образом

$$v_{mn}(r) = \frac{1}{c_0}\int U_m(z)\delta c(z, r) U_n(z) dz. \tag{45}$$

Данное представление позволяет построить сходящиеся ряды теории возмущения для модовых амплитуд, модовых функций и соответствующих им собственных значений E_m, если выполняется условие [22]

$$\frac{|v_{mn}|}{E_m - E_n} \ll 1. \tag{46}$$

С учетом (11) условие (46) принимает вид

$$\frac{|v_{mn}|}{ab(\mu+\gamma)|m-n|} \ll \frac{1}{k_0}. \qquad (47)$$

Потеря устойчивости решений линейной системы уравнений (44) возможна только при наличии дополнительной связи с некоторой степенью свободы [37–40]. В принципе, при распространении звука в океане это может быть связь с модами сплошного спектра. Однако данный механизм не обеспечивает нерегулярность первых мод, отмеченную в экспериментах по дальнему распространению звука с частотами порядка 100 Гц [41], поскольку в этом случае первые моды взаимодействуют с модами сплошного спектра крайне слабо. Казалось бы, это напрямую означает конфликт лучевого и волнового описания: неустойчивость лучей делает расчет волнового поля практически невозможным, в то время как решения линейных волновых уравнений являются устойчивыми и, потому, интегрируемыми. На самом деле этот конфликт является мнимым. Во-первых, несмотря на хаотичность отдельных лучей, динамика пучков, состоящих из них, является достаточно предсказуемой [8, 42]. Во-вторых, в тех случаях, когда динамика лучей является хаотической, структура волнового поля может проявлять экспоненциальную неустойчивость по отношению к малым вариациям среды [17, 37, 38, 42, 43]. Таким образом, неизбежные погрешности в задании параметров среды, возникающие, например, при численном моделировании волнового поля, экспоненциально нарастают с увеличением расстояния, аналогично погрешностям, связанным с конечной точностью задания начальных условий для траекторий лучей. Кроме того, если рефракция формирующих поле лучей является хаотической, поле принимает сложный диффузионный вид, при этом энтропия поля согласуется с энтропией Колмогорова-Синая, являющейся одной из мер хаотичности лучей [44]. Вдобавок к вышесказанному отметим, что интегрируемость системы уравнений (44) совсем не означает регулярного изменения модовых амплитуд с r. Например, пусть мы имеем большую компактную группу сильно связанных мод, что соответствует лучевой картине взаимодействия мод в условиях хаоса. Если мы возбудим одну из мод, принадлежащих данной группе, то энергия достаточно быстро перераспределится между всеми модами группы. Как только это произойдет, зависимость каждой из связанных мод от r будет представлять из себя суперпозицию большого числа линейных колебаний с некратными частотами и, поэтому, будет иметь стохастический вид.

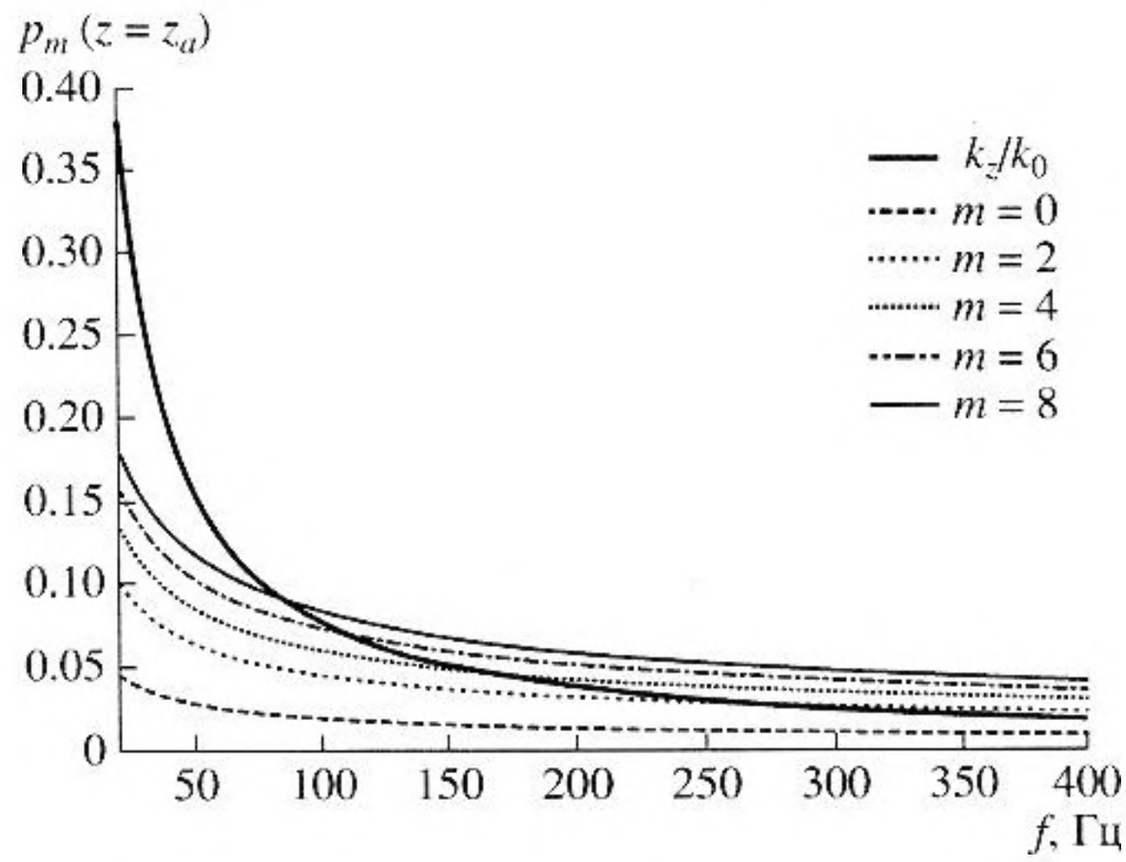

Рис. 4. Зависимость максимального тангенса угла скольжения модового луча от частоты. Жирная линия – частотная зависимость величины k_z/k_0.

В тех случаях, когда критерий (46) не выполняется, анализ системы уравнений (44) не позволяет получать количественные оценки, однако может быть полезен для качественного описания пространственной структуры поля. В частности, разложение поля по модам однородного волновода дает возможность оценить влияние вертикальной структуры неоднородности на взаимодействие мод. Подставим (4) в (45) и представим матричные элементы v_{mn} в следующем виде

$$v_{mn} = J_{mn}\sin k_r r, \qquad (48)$$

где

$$J_{mn} = \frac{\varepsilon}{B}\int U_m(z) z e^{-2z/B}\sin k_z z U_n(z)dz. \qquad (49)$$

Для облегчения дальнейшего анализа воспользуемся приближением ВКБ, переписав модовые функции в следующем виде:

$$U_m(z) = \tilde{U}_m(z)(e^{ik_0S_m(z)+i\pi/4} + e^{-ik_0S_m(z)-i\pi/4}). \qquad (50)$$

Амплитудный множитель $\tilde{U}_m$ дается выражением

$$\tilde{U}_m(z) = \frac{1}{\sqrt{p_m(z)D_m}}, \qquad (51)$$

где D_m – длина цикла модового луча, $p_m(z) = p(z, E = E_m)$, где $p(z, E)$ описывается уравнением (13). Функция $S_m(z)$ определяется выражением

$$S_m(z, E_m) = \int_{z_{\min}}^{z} p(z, E_m)dz. \qquad (52)$$

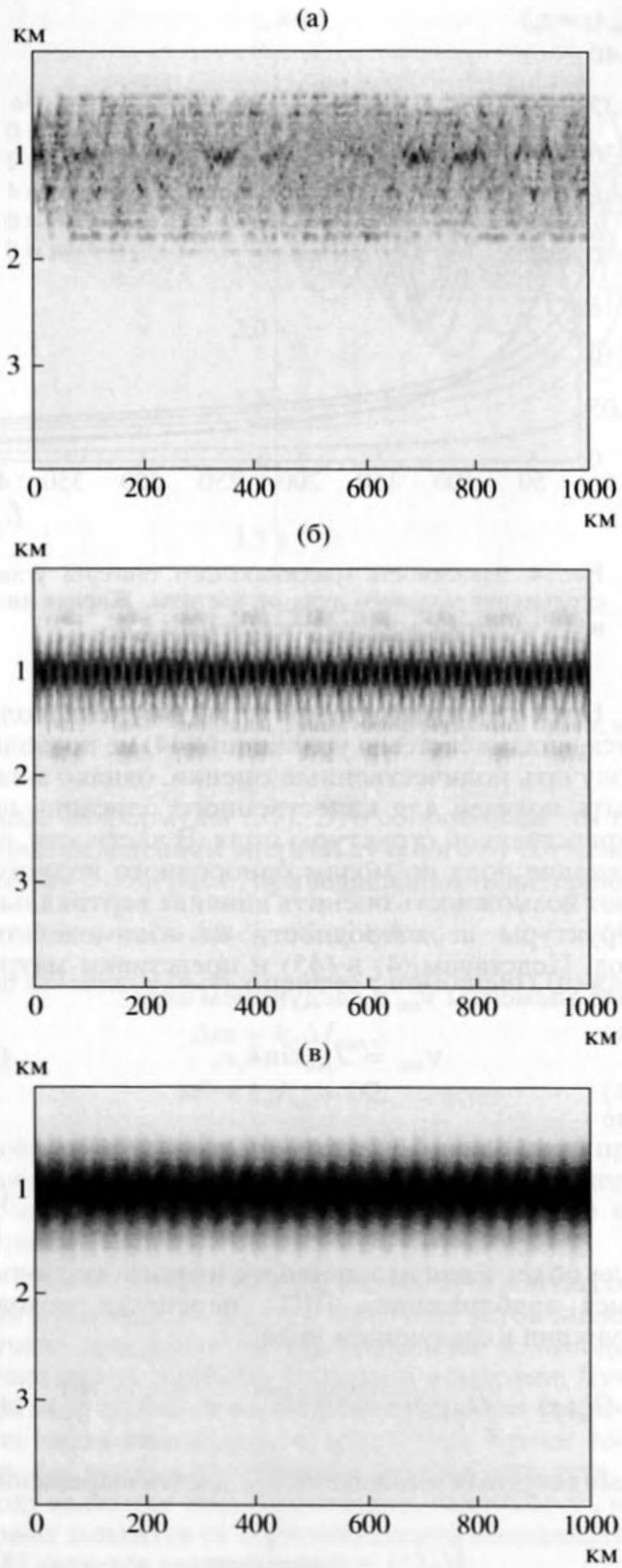

Рис. 5. Акустическое поле. Частота сигнала: а) 200 Гц, б) 50 Гц, в) 20 Гц.

Подставляя (50) в (49) и раскрывая скобки, получаем

$$J_{mn} = \int dz \Upsilon_{mn}(z)(e^{i(k_0 S_m + k_0 S_n + k_z z + \pi/2)} - e^{-i(k_0 S_m + k_0 S_n + k_z z + \pi/2)} + e^{i(k_0 S_m - k_0 S_n + k_z z)} - e^{-i(k_0 S_m - k_0 S_n + k_z z)} + \ldots) \quad (53)$$

где введено обозначение

$$\Upsilon_{mn} = \frac{\varepsilon z}{2iB} \exp(-2z/B) \tilde{U}_m \tilde{U}_n. \quad (54)$$

Интеграл (53) может быть представлен в виде суммы интегралов, каждый из которых может быть вычислен с помощью метода стационарной фазы. С учетом того, что $\partial S_m/\partial z = p_m$, условия стационарной фазы выглядят следующим образом:

$$\frac{k_z}{k_0} = p_m(z) + p_n(z) \quad (55)$$

и

$$\frac{k_z}{k_0} = p_m(z) - p_n(z). \quad (56)$$

В зависимости от того, выполняются или нет приведенные условия, мы можем говорить об усилении или подавлении взаимодействия мод под влиянием вертикальных осцилляций неоднородности. Кроме того заметим, что, согласно методу стационарной фазы (см., например, [36]), значение интеграла (53) обратно пропорционально квадратному корню из второй производной от фазы осциллирующего множителя. Отсюда следует, что интеграл (53) будет принимать максимальные значения при таких m и n, при которых резонансные условия (55) и (56) выполняются на оси канала, где $dp/dz = 0$, и мы можем заменить в этих выражениях тангенсы угла скольжения модовых лучей $p_m(z)$ и $p_n(z)$ на их максимальные значения $p_m(z = z_a)$ и $p_n(z = z_a)$, соответственно. На рис. 4 изображена зависимость максимального тангенса угла скольжения модового луча от частоты сигнала для 0-й, 2-й, 4-й и 8-й мод. Для сравнения приведена частотная зависимость величины k_z/k_0. Как следует из приведенных графиков, при малых частотах взаимодействие первых мод является нерезонансным и достаточно слабым. Условия для резонансного взаимодействия первых мод возникают лишь начиная с $f \approx 80$ Гц, и с дальнейшим ростом частоты условия (55) и (56) выполняются для все большего и большего числа мод с близкими номерами. Как уже отмечалось выше, это хорошо согласуется с лучевой картиной и предполагает нерегулярную зависимость модовых амплитуд от r.

7. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Для проверки приведенных выше утверждений нами были проведены расчеты акустического поля путем численного решения параболиче-

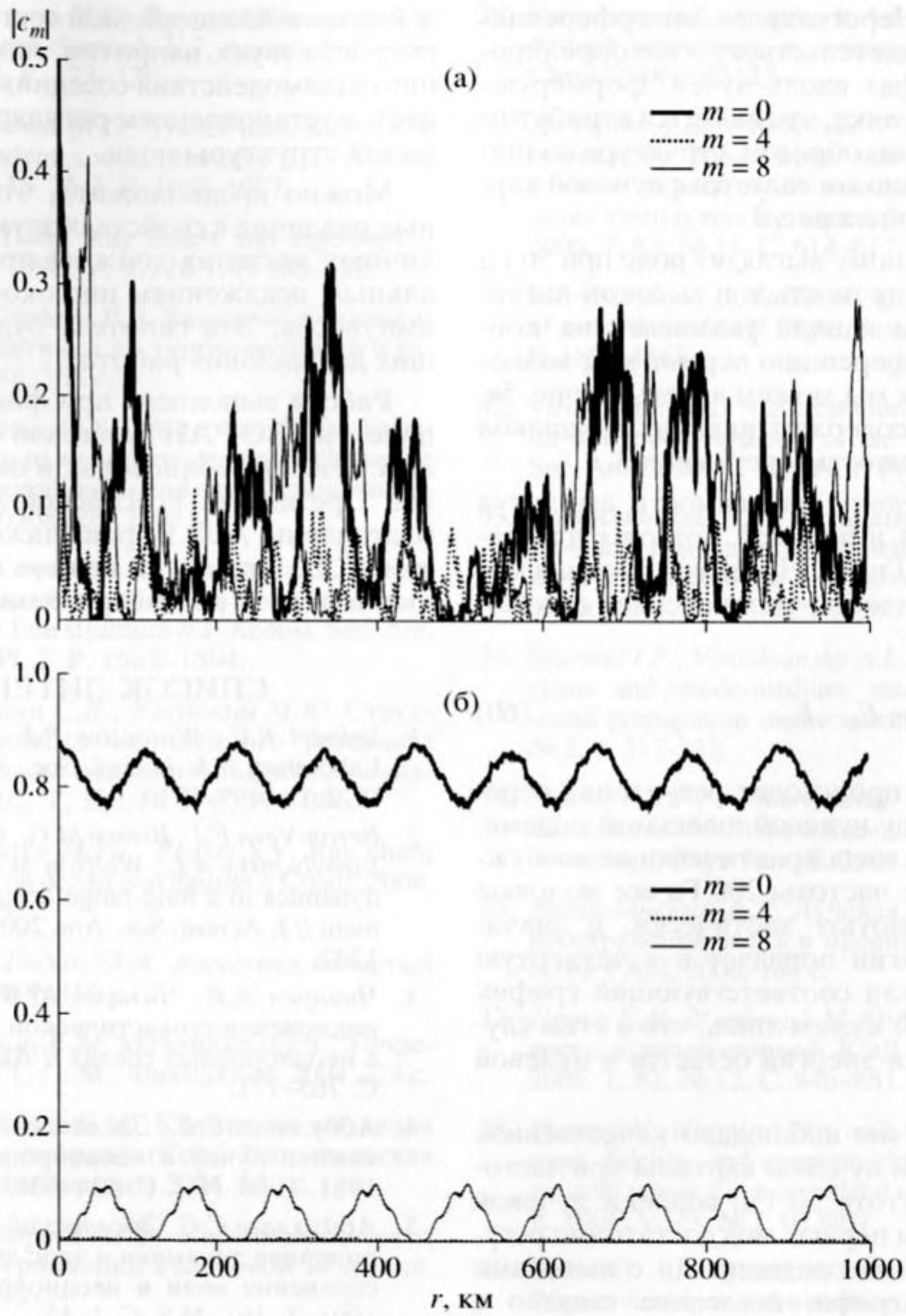

Рис. 6. Амплитуды 0-й, 4-й и 8-й мод как функции горизонтальной координаты. Частота сигнала: а) 200 Гц, б) 50 Гц.

ского уравнения (5). В качестве начального условия был выбран горизонтально направленный гауссов волновой пакет, описываемый следующей формулой [17] :

$$u(z, r = 0) = (2\pi\sigma_z^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{(z - z_a)^2}{4\sigma_z^2}\right). \quad (57)$$

Полуширина пакета σ_z связана с частотой сигнала с помощью формулы

$$\sigma_z = \frac{3c_0}{4\pi f \operatorname{tg}\alpha_0}. \quad (58)$$

Угол α_0 в формуле (58) приближенно равен максимальному углу скольжения, под которым распространялся бы волновой пакет (57) в отсутствие горизонтальной неоднородности. Поскольку в данной работе нас интересует малоугловое распространение звука вблизи оси канала, при расчетах мы положили $\alpha_0 = \operatorname{arctg} 0.1$. Так как в этом случае влияние поверхности и дна является минимальным, мы использовали упрощенные граничные условия

$$u(z = 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(z = h) = 0. \quad (59)$$

Структура акустического поля в случае тонального сигнала с частотой 200 Гц приведена на рис. 5а. Поле имеет ярко выраженный диффузионный характер, при этом все зоны конвергенции и тени

сильно размыты. Нерегулярная интерференционная структура свидетельствует о некоррелированности набегов фаз вдоль лучей, формирующих поле в каждой точке, что является атрибутом лучевого хаоса. Таким образом, структура волнового поля качественно согласуется с лучевой картиной, изображенной на рис. 3.

Совершенно по иному выглядит поле при 50 Гц (см. рис. 5б). Периодичность зон высокой интенсивности вдоль оси канала указывает на конструктивную интерференцию первых мод волновода. При 20 Гц, как мы можем видеть на рис. 5в, структура поля не содержит никаких признаков хаоса и является полностью регулярной.

На рис. 6 приведены зависимости амплитуд нулевой, четвертой и восьмой мод от r для частот 200 Гц (а) и 50 Гц (б). Нулевая и восьмая моды связаны между собой резонансным соотношением [34]

$$\frac{k_r}{k_0} \simeq E_8 - E_0. \qquad (60)$$

При частоте 50 Гц происходит регулярная перекачка энергии между нулевой и восьмой модами, при этом четвертая мода практически не возбуждается. В случае же частоты 200 Гц все модовые амплитуды осциллируют хаотически, и значительная часть энергии попадает и в четвертую моду. Мы не привели соответствующий график для частоты 20 Гц. Укажем лишь, что в этом случае практически вся энергия остается в нулевой моде.

Таким образом, мы наблюдаем качественное согласие волновой и лучевой картины при частоте 200 Гц. При частоте 50 Гц, вопреки лучевой картине, амплитуды первых мод достаточно регулярно зависят от r. В соответствии с выводами предыдущего параграфа, последнее связано с ослаблением связи между модами с близкими номерами и, как следствие, ослаблением хаоса. При частоте 20 Гц волновая картина не содержит никаких признаков хаоса и полностью противоречит лучевому приближению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе показано, что неоднородности подводного звукового канала, осциллирующие как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях, приводят к существенной зависимости взаимодействия мод от частоты сигнала. Так, при частотах, превышающих 100 Гц, неоднородность приводит к сильному межмодовому взаимодействию внутри обширной, но компактной группы мод с малыми номерами. В этом случае структура поля вблизи оси канала принимает крайне нерегулярный характер. На меньших частотах сильные вертикальные колебания горизонтально-неоднородной составляющей профиля скорости звука, напротив, способствуют подавлению взаимодействия соседних мод, что сопровождается установлением регулярной интерференционной структуры поля.

Можно предположить, что столь существенные различия в свойствах звукового поля при различных частотах должны приводить к нетривиальным искажениям широкополосных звуковых импульсов. Эта гипотеза будет проверена в наших дальнейших работах.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта ДВО РАН Волновой хаос в неоднородных акустических волноводах в океане, а также грантов Президента Российской Федерации. Авторы благодарны А.Л. Вировлянскому, А.И. Нейштадту и С.В. Пранцу за ценное обсуждение различных аспектов рассматриваемой проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Spindel R.C., Worcester P.F.* North Pacific Acoustic Laboratory // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 117. № 3. Pt. 2. P. 1499–1510.
2. *Beron-Vera F.J., Brown M.G., Colosi J.A., Tomsovic S., Virovlyansky A.L., Wolfson M.A., Zaslavsky G.M.* Ray dynamics in a long-range acoustic propagation experiment // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 114. № 3. P. 1226–1242.
3. *Чигарев А.В., Чигарев Ю.В.* О возможности возникновения стохастической неустойчивости лучей в неоднородных средах // Акуст. журн. 1978. Т. 24. С. 765–771.
4. *Абдуллаев С.С., Заславский Г.М.* Нелинейная динамика лучей в неоднородных средах // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. № 2. С. 524–536.
5. *Абдуллаев С.С., Заславский Г.М.* Классические нелинейная динамика и хаос лучей в задачах распространения волн в неоднородных средах // УФН. 1991. Т. 161. № 8. С. 1–43.
6. *Wolfson M.A., Tappert F.D.* Study of horizontal multipaths and ray chaos due to ocean mesoscale structure // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107. № 1. P. 154–162.
7. *Smirnov I.P., Virovlyansky A.L., Zaslavsky G.M.* Theory and applications of ray chaos to the underwater acoustics // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. 036221.
8. *Brown M.G., Colosi J.A., Tomsovic S., Virovlyansky A.L., Wolfson M.A., Zaslavsky G.M.* Ray dynamics in long-range deep ocean sound propagation // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113. № 5. P. 2533–2547.
9. *Вировлянский А.Л., Заславский Г.М.* Лучевой и волновой хаос в задачах о дальнем распространении звука в океане // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 3. С. 329–345.
10. *Virovlyansky A.L.* Ray travel times at long ranges in acoustic waveguides // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113. № 5. P. 2523–2532.
11. *Вировлянский А.Л.* Лучевой хаос при распространении звука в океане // Известия ВУЗов. Радиофизика 2003. Т. 46. № 7. С. 555–571.

12. *Beron-Vera F.J., Brown M.G.* Ray stability in weakly range-dependent sound channels // J. Acoust. Soc. Am. 2003. Vol. 114. № 1. P. 123–130.

13. *Beron-Vera F.J., Brown M.G.* Travel time stability in weakly range-dependent sound channels // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 115. № 3. P. 1068-1077.

14. *Tappert F.D., Xin Tang.* Ray chaos and eigenrays // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99. № 1. P. 185–195.

15. *Заславский Г.М, Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.

16. *Makarov D.V., Uleysky M.Yu., Martynov M.Yu.* Sensitivity of ray dynamics in an underwater sound channel to vertical scale of longitudinal sound-speed variations. e-print arXiv:physics/0508226 (2005).

17. *Hegewisch K.C., Cerruti N.R., Tomsovic S.* Ocean acoustic wave propagation and ray method correspondence: internal wave fine structure // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 117. № 3. Pt. 2. P. 1582–1594.

18. *Макаров Д.В., Пранц С.В., Улейский М.Ю.* Структура пространственного нелинейного резонанса лучей в неоднородном подводном звуковом канале // Докл. АН. 2002. Т. 382. № 3. С. 394–396.

19. *Makarov D.V., Uleysky M.Yu., Prants S.V.* Ray chaos and ray clustering in an ocean waveguide // Chaos. 2004. V. 14. № 1. P. 79–95.

20. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.

21. *Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М.* Механика (Сер. "Теоретическая физика", Т. 1). М.: Физматлит, 2004. 224 с.

22. *Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория) (Сер. Теоретическая физика, Т. 3). М.: Физматлит, 2004. 800 с.

23. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. 296 с.

24. *Макаров Д.В., Улейский М.Ю.* Высвечивание лучей из горизонтально-неоднородного подводного звукового канала // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 4. С. 565–573.

25. *Makarov D.V., Uleysky M.Yu.* Local chaos induced by spatial oscillations of a perturbation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2008. V. 13. P. 400–406.

26. *Чириков Б.В.* Прохождение нелинейной колебательной системы через резонанс // ДАН СССР. 1959. Т. 125. № 5. С. 1015–1018.

27. *Itin A.P., Neishtadt A.I., Vasiliev A.A.* Captures into resonance and scattering on resonance in dynamics of a charged relativistic particle in magnetic field and electroelastic wave // Physica D. 2000. V. 141. P. 281–296.

28. *Нейштадт А.И.* Захват в резонанс и рассеяние на резонансах в двухчастотных системах // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2005 Т. 250. С. 198–218.

29. *Vainchtein D.L., Neishtadt A.I., Mezic I.* On passages through resonances in volume-preserving systems // Chaos. 2006. 043123.

30. *Макаров Д.В., Улейский М.Ю.* Генерация баллистического транспорта частиц при воздействии слабого переменного возмущения на периодическую гамильтонову систему // Письма в ЖЭТФ. 2006. Т. 83. № 11. С. 614–617.

31. *Virovlyansky A.L., Zaslavsky G.M.* Wave chaos in terms of normal modes // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. № 2. P. 1656–1668.

32. *Virovlyansky A.L.* Manifestation of ray stochastic behavior in a modal structure of the wave field // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 108. № 1. P. 84–95.

33. *Вировлянский А.Л., Любавин Л.Я., Стромков А.А.* Лучевой подход для анализа модовой структуры поля в переменном по трассе волноводе // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 5. С. 597–604.

34. *Smirnov I.P., Virovlyansky A.L., Zaslavsky G.M.* Wave chaos and mode-medium resonances at long-range sound propagation in the ocean // Chaos 2004. V. 14. № 2. P. 317-332.

35. *Smirnov I.P., Virovlyansky A.L., Edelman M., Zaslavsky G.M.* Chaos-induced intensification of wave scattering // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. № 2. 026206.

36. *Вировлянский А.Л.* Лучевая теория дальнего распространения звука в океане. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2006. 164 с.

37. *Пранц С.В., Улейский М.Ю.* Квантовая неустойчивость в резонаторной КЭД // Письма в ЖЭТФ. 2005. Т. 82. № 12. С. 846–851.

38. *Prants S.V., Uleysky M.Yu. and Argonov V.Yu.* Entanglement, fidelity, and quantum-classical correlations with an atom moving in a quantized cavity field // Phys. Rev. A. 2006. V. 73. № 2. 023807.

39. *Kolovsky A.R.* Quantum coherence, evolution of the Wigner function, and transition from quantum to classical dynamics for a chaotic system // Chaos 1996. V. 6. № 4. P. 534-542.

40. *Prants S.V., Uleysky M.Yu.* Atomic fractals in cavity quantum electrodynamics // Physics Letters A. 2003. V. 309. № 5–6. P. 357–362.

41. *Wage K.E., Dzieciuch M.A., Worcester P.F., Howe B.M. and Mercer J.A.* Mode coherence at megameter ranges in the North Pacific // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 117. Pt. 2. № 3. P. 1565–1581.

42. *Cerruti N.R., Tomsovic S.* Sensitivity of wave field evolution and manifold stability in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. № 5. 054103.

43. *Peres A.* Stability of quantum motion in chaotic and regular systems // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. № 4. P. 1610–1615.

44. *Morozov A.K., Colosi J.A.* Entropy and scintillation analysis of acoustic beam propagation through ocean internal waves // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 117. № 3. Pt. 2. P. 1611–1623.

The Ray–Wave Correspondence and the Suppression of Chaos in Long-Range Sound Propagation in the Ocean

D. V. Makarov, L. E. Kon'kov, and M. Yu. Uleysky

Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Far East Division, Russian Academy of Sciences, ul. Baltiĭskaya 43, Vladivostok, 690041 Russia

e-mail: makarov@poi.dvo.ru

Abstract—The long-range sound propagation in a horizontally inhomogeneous underwater sound channel is considered. It is shown that the vertical oscillations of inhomogeneity affect the near-axis rays in a resonance way and destroy their stability. As a consequence, the near-axis rays exhibit a chaotic behavior. The ray chaos manifests itself as intensification of interaction between adjacent low-order modes. In this case, a great number of strongly coupled modes appear, and the field structure near the channel axis becomes diffusive. However, as the signal frequency decreases, the inhomogeneity oscillations in depth lead to decoupling of adjacent modes and, hence, to suppression of chaos. As a result, the field structure near the channel axis becomes regular, which is confirmed by numerical simulation.