АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2010, том 56, № 1, с. 63–69

АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

УДК 434.222.1

ФОРМИРОВАНИЕ УЗКОГО ВОЛНОВОГО ПУЧКА В ПОДВОДНОМ ЗВУКОВОМ КАНАЛЕ С ПОМОЩЬЮ ВЕРТИКАЛЬНОЙ АНТЕННЫ

© 2010 г. А. Л. Вировлянский, Д. В. Нефедова

Институт прикладной физики РАН

603950 Нижний Новгород, ул.Ульянова 46

E-mail: viro@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 28.01.09 г.

Обсуждается возможность использования вертикальной антенны для создания узкого волнового пучка, распространяющегося в подводном акустическом волноводе вдоль заданного опорного луча. Решена вариационная задача о таком выборе начального поля на апертуре антенны, чтобы средняя ширина пучка на трассе фиксированной длины была минимально возможной.

PACS: 43.30Dr, 43.30Bp, 43.30Cq

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Использование вертикальной излучающей антенны в подводном акустическом волноводе дает большие возможности по формированию звуковых полей со свойствами, нужными для решения различных практических задач. Одной из таких задач является выборочное освещение отдельных участков волновода. Например, речь может идти о фокусировке поля в окрестности заданной точки [1] или о создании максимальной (в среднем по трассе) концентрации звуковой энергии в фиксированном интервале глубин [2].

В данной работе обсуждается использование вертикальной антенны в качестве подводного прожектора, излучающего волновой пучок, распространяющейся вдоль заданного опорного луча. Предложен метод формирования пучка, средняя ширина которого на трассе фиксированной длины является минимально возможной. Создаваемое таким образом поле освещает лишь относительно малую окрестность выбранного луча. Путем "перенастройки" антенны на другие опорные лучи можно осуществлять сканирование формируемым звуковым пучком.

В подводной акустике хорошо известно, что повышенная интенсивность поля наблюдается в окрестностях лучей с начальными углами скольжения χ_0^*, отвечающими экстремумам функции $D(\chi_0)$ – зависимости длины цикла (периода) траектории от угла ее выхода из источника. Дело в том, что траектории с углами выхода близкими к χ_0^* имеют почти одинаковые периоды и поэтому они образуют так называемые слабо расходящиеся пучки лучей [3–5]. В нашей работе вопрос о формировании пучка с минимальным расплыванием рассматривается для опорного луча с произвольным начальным углом скольжения.

Здесь обсуждается задача о возбуждении поля с помощью антенны, представляющей собой вертикальную нить. При этом поле обладает цилиндрической симметрией. Его комплексная амплитуда выражается функцией $u(r, z)$, где z – глубина, а r – расстояние от антенны (она расположена вдоль линии $r = 0$) в горизонтальной плоскости. Предполагается, что ось z направлена вертикально вверх и свободная поверхность воды находится на уровне $z = 0$. Таким образом, задача является двумерной и речь идет о формировании пучка, слабо расплывающегося в вертикальной плоскости (r, z). Такой пучок в волноводе может распространяться лишь вдоль траектории некоторого луча, который мы будем называть опорным. Его траектория задается соотношением $z = Z(r)$, где функция $Z(r)$ представляет собой решение лучевого уравнения.

Воспользуемся малоугловым приближением и будем полагать, что комплексная амплитуда поля подчиняется параболическому уравнению [5, 6]

$$2ik\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2k^2 U(z)u = 0, \qquad (1)$$

где

$$U(r, z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c_0^2}{c^2(r, z)}\right),$$

$c(r, z)$ – поле скорости звука в волноводе, c_0 – некоторая постоянная скорость, $k = 2\pi f/c_0$, f – не-

сущая частота. Это уравнение следует решать с начальным условием

$$u(0,z) = u_0(z),$$

где $u_0(z)$ – поле на апертуре антенны. Полная излучаемая мощность ограничена условием нормировки

$$\int dz\,|u_0(z)|^2 = 1. \qquad (2)$$

В малоугловом приближении траектория опорного луча удовлетворяет уравнению

$$\ddot{Z} = -\left.\frac{\partial U(r,z)}{\partial z}\right|_{z=Z}.$$

Здесь и далее точка над Z означает дифференцирование по r. Это уравнение следует решать с начальными условиями $Z(0) = z_0$ и $\dot{Z}(0) = p_0$, где z_0 – начальная глубина луча, а p_0 – тангенс его начального угла скольжения χ_0. Переход к малоугловому приближению не является принципиальным и сделан лишь для некоторого упрощения выкладок. Полученные результаты легко обобщаются на случай, когда поле задается уравнением Гельмгольца.

Ширину пучка Δ на расстоянии r определим выражением

$$\Delta^2(r) = \int dz(z - Z(r))^2|u(r,z)|^2. \qquad (3)$$

Здесь и далее в интегралах по z с неуказанными явно пределами подразумевается, что интегрирование идет по всему вертикальному сечению волновода. При введении данного определения учтено известное свойство параболического уравнения, состоящее в том, что величина интеграла $\int dz|u(r,z)|^2$ не зависит от расстояния r. Поэтому из (2) следует, что данный интеграл при любом r равен единице. Параболическое уравнение (1) имеет форму уравнения Шредингера [7]. В этой аналогии расстояние r играет роль времени и указанное свойство выражает условие сохранения нормировки волновой функции.

Среднее значение Δ в интервале дистанций от 0 до L обозначим $\bar{\Delta}$:

$$\bar{\Delta}^2 = \frac{1}{L}\int_0^L dr\Delta^2(r). \qquad (4)$$

В данной работе решается задача об отыскании пучка, распространяющегося вдоль заданного опорного луча, с минимально возможным значением средней ширины $\bar{\Delta}$. Задача рассматривается в двух постановках.

(i) Жесткое ограничение на начальную ширину пучка. Пучок излучается антенной, перекрывающей интервал глубин $z_1 < z < z_2$. Соответственно, начальное поле $u_0(z)$ отлично от нуля только внутри данного интервала. Предполагается, что точка выхода опорного луча z_0 находится в центре апертуры.

(ii) Мягкое ограничение на начальную ширину пучка. Размер апертуры излучающей антенны не фиксируется, а начальная ширина пучка задается условием $\Delta(0) = a$, т.е.

$$\int dz(z - z_0)^2|u_0(z)|^2 = a^2. \qquad (5)$$

Далее мы увидим, что в некоторых случаях решения обеих задач практически совпадают.

Таким образом, задача состоит в минимизации величины $\bar{\Delta}$, рассматриваемой как функционал от $u_0(z)$ при указанных ограничениях. Приближенное решение задачи с мягким ограничением на начальную ширину пучка получено в нашей работе [8]. Для удобства читателя это решение кратко изложено ниже.

Следует иметь ввиду, что задача о формировании слабо расходящегося пучка может быть сформулирована по-разному. Если речь идет об очень коротких трассах, то с точки зрения нашего подхода оптимальным будет пучок, который фокусируется вблизи источника. Можно поставить задачу о формировании пучка, который максимально долго будет сохранять начальную ширину. Этот вопрос обсуждается в работах [9, 10].

2. АНТЕННА С КОНЕЧНОЙ АПЕРТУРОЙ

При решении рассматриваемой задачи в ситуации, когда поле возбуждается антенной с апертурой фиксированного размера (ограничение (i)) мы ограничимся случаем плоскослоистого волновода. При этом скорость звука не зависит от продольной координаты r и $U(r,z)$ превращается в $U(z)$. Интересуясь лишь волнами, захваченными волноводом, глубину моря формально будем считать бесконечной. Более того, для простоты мы будем рассматривать пучки, распространяющиеся в толще воды и не выходящие к поверхности. Поэтому влияние последней в наших рассуждениях также фактически не будет учитываться.

Воспользуемся представлением звукового поля в виде разложения по нормальным модам волновода [5, 11]. При этом

$$u(r,z) = \sum_m b_m\varphi_m(z)e^{-ikE_m r}, \qquad (6)$$

где b_m – коэффициенты возбуждения мод, а E_m и $\varphi_m(z)$ – собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\varphi_m}{dz^2} + k^2[E_m - U(z)]\varphi_m(z) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots$$

с соответствующими граничными условиями. Собственные функции ортонормированны, то есть выполняется условие

$$\int dz \varphi_m(z)\varphi_n(z) = \delta_{mn}. \tag{7}$$

Вследствие полноты системы функций φ_m коэффициенты b_m и начальное поле связаны соотношениями

$$b_m = \int_{z_1}^{z_2} dz\, u_0(z)\varphi_m(z) \tag{8}$$

и

$$u_0(z) = \sum_m b_m \varphi_m(z). \tag{9}$$

Выражая ширину пучка через коэффициенты возбуждения мод путем подстановки (6) в (3), находим

$$\Delta^2(r) = \sum_{m,m'}\Big[(z^2)_{mm'} - 2(z)_{mm'}Z(r) + \\ + Z^2(r)\delta_{mm'}\Big]\exp(ik(E_{m'} - E_m)r)b_m b_{m'}^*, \tag{10}$$

где символ $()_{mm'}$ обозначает матричный элемент:

$$(f(z))_{mm'} = \int dz\, f(z)\varphi_m(z)\varphi_{m'}(z).$$

Для перехода к матричным обозначениям введем вектор-столбец $\bar{b}$, элементами которого являются коэффициенты возбуждения мод $b_1, b_2, \ldots$. Подставляя (10) в (4), получаем

$$\bar{\Delta}^2 = \bar{b}^+ P\bar{b}, \tag{11}$$

где верхний индекс + означает эрмитово сопряжение, а P – матрица с элементами

$$P_{mm'} = \sum_{m,m'}\Big[A_{mm'}\left(z^2\right)_{mm'} - 2B_{mm'}(z)_{mm'} + C\delta_{mm'}\Big],$$

$$A_{mm'} = \frac{\sin[k(E_{m'} - E_m)L/2]}{k(E_{m'} - E_m)L/2}\exp[ik(E_{m'} - E_m)L/2],$$

$$B_{mm'} = \frac{1}{L}\int_0^L dr\, Z(r)\exp(ik(E_{m'} - E_m)r),$$

$$C = \frac{1}{L}\int_0^L dr\, Z^2(r).$$

Теперь задача свелась к минимизации квадратичной формы (11) при двух ограничениях. Одно из них накладывается условием нормировки (2), которое удобно переписать в виде

$$\bar{b}^+\bar{b} = 1. \tag{12}$$

Второе ограничение заключается в том, что начальное поле должно обращаться в нуль вне апертуры антенны. Для того, чтобы понять каким образом оно сказывается на коэффициентах возбуждения мод, подставим (9) в (8). Получаем

$$b_m = \sum_{m'} Q_{mm'} b_{m'}, \tag{13}$$

где

$$Q_{mm'} = \int_{z_1}^{z_2} dz\, \varphi_{m'}(z)\varphi_m(z).$$

Пользуясь условием (7) и следующим из него известным соотношением

$$\sum_m \varphi_m(z)\varphi_m(z') = \delta(z - z'),$$

легко убедиться, что матрица Q с элементами $Q_{mm'}$ обладает свойством $Q^2 = Q$, т.е. является проекционной. Из условия (13), которое в матричных обозначениях принимает вид

$$\bar{b} = Q\bar{b}',$$

следует, что все собственные числа матрицы Q равны единице. Множество допустимых векторов $\bar{b}$ является линейным пространством. В этом пространстве введем базис из векторов $\bar{b}_N$, $N = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условию

$$\bar{b}_N^+\bar{b}_{N'} = \delta_{NN'}. \tag{14}$$

При этом каждый допустимый вектор $\bar{b}$ можно представить в виде разложения

$$\bar{b} = \sum_N \beta_N \bar{b}_N. \tag{15}$$

Согласно (12) и (14) вектор-столбец $\bar{\beta}$ с элементами β_N удовлетворяет условию нормировки

$$\bar{\beta}^+\bar{\beta} = 1. \tag{16}$$

Подставляя (15) в (11), получаем

$$\bar{\Delta}^2 = \bar{\beta}^+\tilde{P}\bar{\beta}, \tag{17}$$

где $\tilde{P}$ – матрица с элементами

$$\tilde{P}_{NN'} = \sum_{N,N'} \bar{b}_N^+ P_{NN'}\bar{b}_{N'}.$$

Нам осталось минимизировать квадратичную форму (17) с учетом единственного ограничения (16). Эта задача легко решается методом неопределенных множителей Лагранжа. Оказывается, что величина $\bar{\Delta}$ принимает минимальное значение, когда $\bar{\beta}$ является собственным вектором матрицы $\tilde{P}$, отвечающим наименьшему собственно-

му числу. Подстановка элементов этого вектора в (15) задает искомое начальное поле.

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ МЯГКОМ ОГРАНИЧЕНИИ НА НАЧАЛЬНУЮ ШИРИНУ ПУЧКА

Теперь обратимся к другой постановке задачи, когда размер апертуры не фиксируется, а начальная ширина пучка задается условием (5). В данном разделе мы кратко изложим приближенное аналитическое решение этой задачи, найденное в нашей предыдущей работе [8]. Оно получено в предположении, что ширина пучка, которая велика по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ (иначе пучок не может быть медленно расплывающимся), в то же время мала по сравнению с характерным масштабом зависимости функции $U(r,z)$ от аргумента z. Это позволяет воспользоваться так называемым безаберрационным приближением, которое состоит в том, что в окрестностях опорного луча $Z(r)$ зависимость $U(r,z)$ от z аппроксимируется квадратичным полиномом:

$$U(r,z) \simeq U(r,Z(r)) + \\ + U_z(r,Z(r))\zeta + \frac{1}{2}U_{zz}(r,Z(r))\zeta^2. \tag{18}$$

Здесь использованы обозначения $\zeta = z - Z$, $U_z(r,z) = \partial U(r,z)/\partial z$ и $U_{zz}(r,z) = \partial^2 U(r,z)/\partial z^2$. В безаберрационном приближении параболическое уравнение кардинально упрощается и может быть решено аналитически [12–14].

Представим комплексную амплитуду поля в виде

$$u(r,z) = w(r,\zeta)\exp\left(ikS(r) + ik\dot{Z}(r)\zeta\right), \tag{19}$$

где $w(r,\zeta)$ – новая неизвестная функция, а

$$S(r) = \int_0^r dr\left(\frac{\dot{Z}^2}{2} - U(r,Z(r))\right)$$

– эйконал опорного луча. Подставляя (19) в (1), с учетом (18) получаем уравнение для w

$$2ik\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - k^2\Phi\zeta^2 w = 0, \tag{20}$$

где

$$\Phi(r) = U_{zz}(r,Z(r)).$$

Функция Грина уравнения (20) имеет вид [12]

$$G_w(r,\zeta,\zeta_0) = \\ = \sqrt{\frac{k}{2\pi i|\sigma_2|}}\exp\left[\frac{ik}{2\sigma_2}\left(\dot{\sigma}_2\zeta^2 - 2\zeta\zeta_0 + \sigma_1\zeta_0^2\right)\right], \tag{21}$$

где $\sigma_1(r)$ и $\sigma_2(r)$ – два линейно независимых решения уравнения в обыкновенных производных

$$\ddot{\sigma} + \Phi(r)\sigma = 0$$

с начальными условиями $\sigma_1(0) = 1$, $\dot{\sigma}_1(0) = 0$, $\sigma_2(0) = 0$, $\dot{\sigma}_2(0) = 1$.

Эта формула становится точной, если $U(r,z)$ является квадратичной функцией z. В простейшем примере, когда $U = 0$, имеем $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = r$. При этом (21), как и должно быть, дает известное (точное) выражение для функции Грина в свободном пространстве

$$G(r,\zeta,\zeta') = \sqrt{\frac{k}{2\pi i r}}\exp\left(\frac{ik(\zeta-\zeta')^2}{2r}\right).$$

Решение уравнения (20) с начальным условием

$$w(0,\zeta) \equiv w_0(\zeta) = u_0(\zeta + z_0)e^{-ikp_0\zeta}$$

выражается интегралом

$$w(r,\zeta) = \int d\zeta_0\, G(r,\zeta,\zeta_0)w_0(\zeta_0). \tag{22}$$

Использование безаберрационного приближения позволяет представить среднюю ширину пучка $\bar{\Delta}$ в виде интеграла от начального поля $u_0(z)$. Тем самым удается получить явное выражение для функционала, который мы собираемся минимизировать. С помощью (3), (22) и (19) после несложных, хотя и несколько громоздких, преобразований находим

$$\Delta^2(r) = \sigma_1^2 a^2 + \frac{i\sigma_1\sigma_2}{k}\int d\zeta\,\zeta\left(w_0\frac{dw_0^*}{d\zeta} - \right. \\ \left. - w_0^*\frac{dw_0}{d\zeta}\right) + \frac{\sigma_2^2}{k^2}\int d\zeta\left|\frac{dw_0}{d\zeta}\right|^2. \tag{23}$$

Подставив (23) в (4), получаем выражение для средней ширины пучка

$$\bar{\Delta}^2 = a^2 + iB\int d\zeta\,\zeta\left(w_0\frac{dw_0^*}{d\zeta} - w_0^*\frac{dw_0}{d\zeta}\right) + A\int d\zeta\left|\frac{dw_0}{d\zeta}\right|^2, \tag{24}$$

где

$$A = \frac{1}{Lk^2}\int_0^L dr\,\sigma_2^2(r), \quad B = \frac{1}{Lk}\int_0^L dr\,\sigma_1(r)\sigma_2(r), \\ C = \frac{1}{L}\int_0^L dr\,\sigma_1^2(r). \tag{25}$$

Представив $w_0(\zeta)$ в виде

$$w_0(\zeta) = v(\zeta)\exp\left(-i\frac{B\zeta^2}{2A}\right),$$

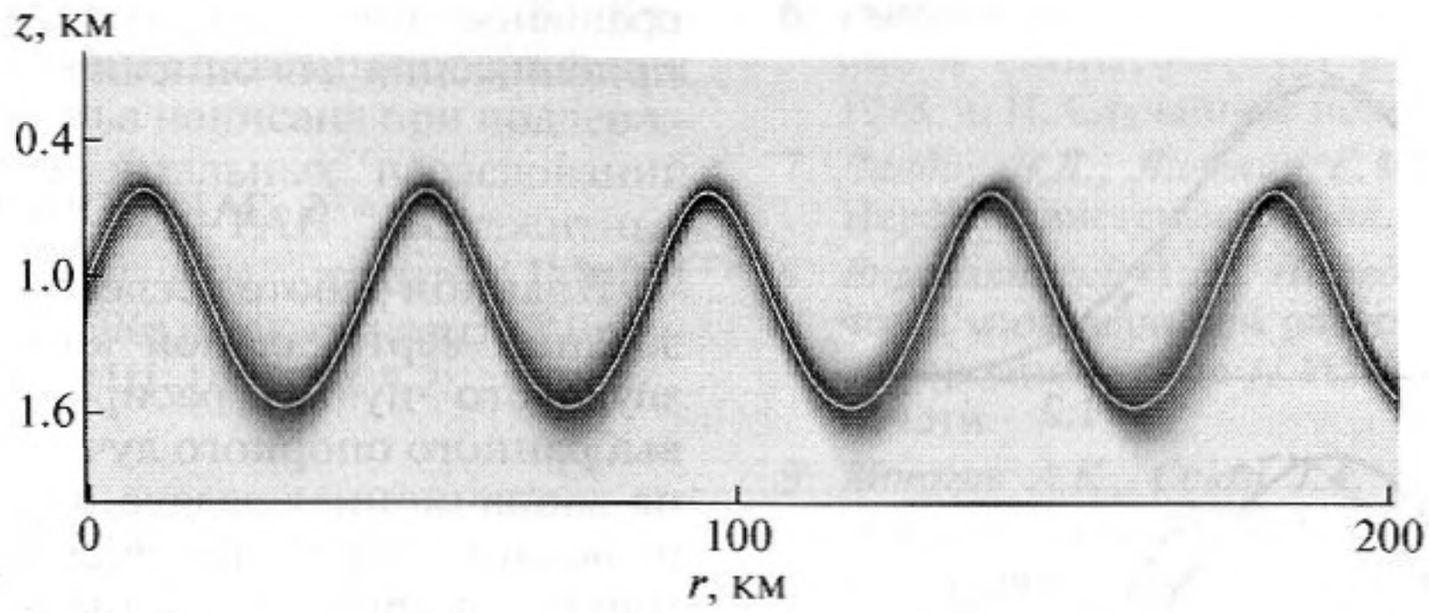

Рис. 1. Волновой пучок, сформированный антенной, перекрывающий интервал глубин от 1.2 км до 0.8 км. Несущая частота 250 Гц; опорный луч (белая линия в центре пучка) стартует с глубины 1 км под углом $\chi_0 = 4°$; длина трассы $L = 200$ км.

где $v(\zeta)$ – еще одна новая неизвестная функция, из (24) находим

$$\overline{\Delta}^2 = a^2\left(C - \frac{B^2}{A}\right) + A\int d\zeta\left|\frac{dv}{d\zeta}\right|^2.$$

Поскольку постоянные A, B и C полностью определяются несущей частотой и параметрами опорного луча и не зависят от начального поля, наша задача свелась к минимизации функционала

$$F = \int d\zeta\left|\frac{dv}{d\zeta}\right|^2$$

при ограничениях (5) и (2), которые удобно переписать в виде

$$\int d\zeta|v|^2 = 1, \quad \int d\zeta\,\zeta^2|v|^2 = a^2.$$

Формально точно такая же задача возникает в квантовой механике при нахождении волновой функции, задающей состояние с минимальной неопределенностью, то есть с минимальным произведением дисперсий координаты и импульса [7]. Ее решением является так называемое *когерентное состояние*

$$v(\zeta) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi a^2}}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{4a^2}\right).$$

Отсюда следует искомое выражение для начального поля

$$u_0(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi a^2}}\exp\left(-\frac{(z-z_0)^2}{4a^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{i(z-z_0)^2}{2A} + ikp_0(z-z_0)\right). \tag{26}$$

Таким образом, оказалось, что минимальной (в среднем) расходимостью обладает гауссов пучок, параметры которого A и B заданы первыми двумя из формул (25). Его средняя ширина задается выражением

$$\overline{\Delta}^2 = a^2\left(C - \frac{B^2}{A}\right) + \frac{A}{4a^2}.$$

Обратим внимание, что величина $\overline{\Delta}$ как функция параметра a имеет минимум

$$\overline{\Delta}_0^2 = \sqrt{AC - B^2},$$

который достигается при $a = a_0$, где

$$a_0 = \sqrt[4]{\frac{A^2}{4\left(AC - B^2\right)}}. \tag{27}$$

При фиксированных значениях несущей частоты и длины трассы, формула (27) (совместно с (25) и (26)) задает самый узкий (в среднем по трассе) пучок, который может распространяться вдоль выбранного опорного луча. Для его излучения нужна антенна с апертурой размера 2–3 a_0. Поэтому следует ожидать, что при использовании антенны с апертурой $|z_2 - z_1|$, превышающей a_0 в несколько раз, расчет начального поля по методу, предложенному в разд. 2, должен дать результат, близкий к (26). В следующем разделе на конкретном примере мы убедимся, что это действительно так.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим пример формирования пучка с минимальной расходимостью в реалистичной модели подводного звукового волновода с так называемым каноническим профилем скорости звука (его также называют профилем Манка) [5]

$$c(z) = c_0\left(1 + \varepsilon\left(e^{2(z-z_a)/B} - 2(z-z_a)/B - 1\right)\right),$$

где $c_0 = 1.5$ км/с, $B = 1$ км, $z_a = -1$ км и $\varepsilon = 0.0057$. Пусть опорный луч выходит с глубины $z_0 = z_a$

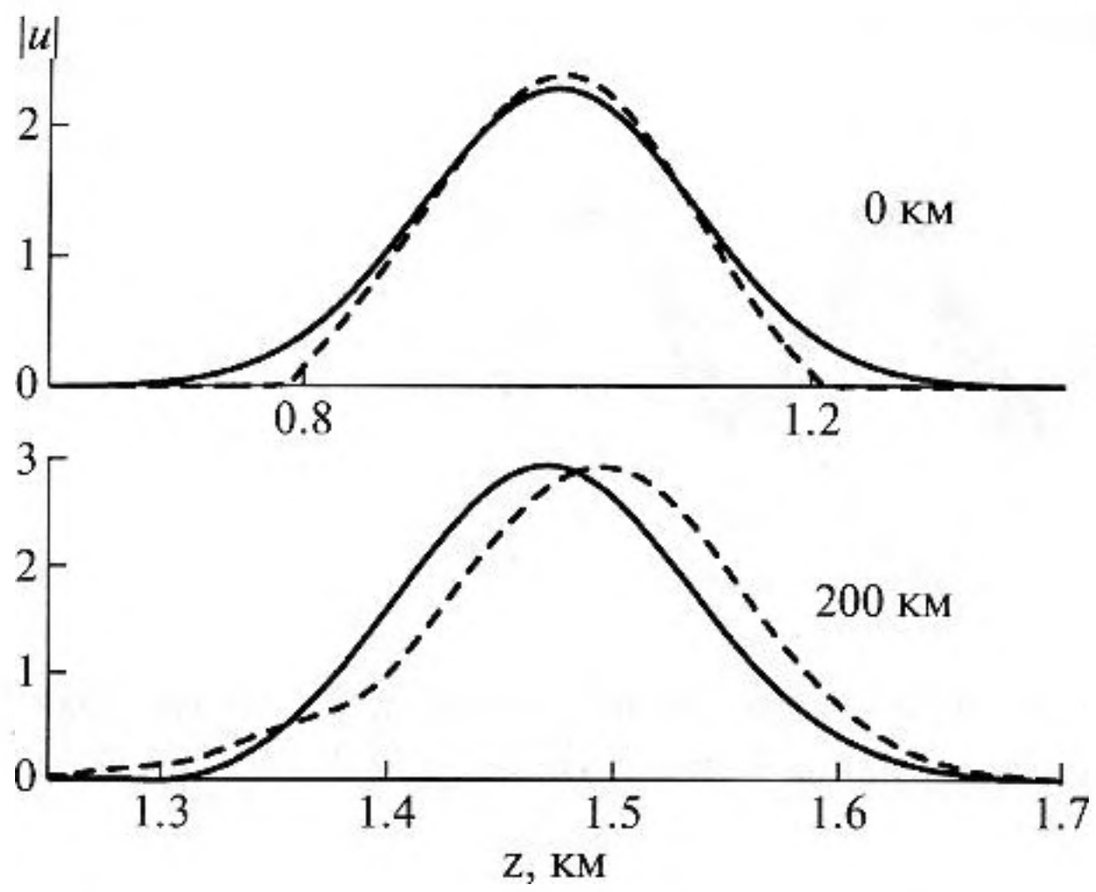

Рис. 2. Вертикальное сечение пучка в начале (верхний график) и в конце трассы (нижний график). Пунктирные линии – результат численного решения вариационной задачи по формулам из разд. 2; сплошные линии – гауссов пучок с $a_0 = 0.076$ км.

под углом скольжения $\chi_0 = 4°$, а длина трассы $L = 200$ км.

На рис. 1 изображен волновой пучок на несущей частоте 250 Гц, поле которого рассчитано по формулам разд. 2 в предположении, что антенна перекрывает интервал глубин от $z_2 = -1.2$ км до $z_1 = -0.8$ км (на этом и следующем графиках указаны абсолютные значения координаты z). С помощью модовой программы [15] были рассчитаны первые 400 собственных функций $\varphi_m(z)$ и отвечающие им собственные числа E_m. Затем были вычислены элементы матриц P, Q, A,B и $\tilde{P}$, используемых при решении вариационной задачи. Расчеты показали, что дальнейшее увеличение количества учитываемых мод волновода практически не влияет на результат.

Величина a_0 для рассматриваемого опорного луча составляет 0.076 км, что в пять раз меньше выбранного размера апертуры антенны (0.4 км). Поэтому в соответствии с замечанием, сделанным в конце предыдущего раздела, полученный пучок с минимальной средней шириной должен быть близок к гауссову пучку (26). Пунктирные кривые на рис. 2 показывают зависимости амплитуды поля от глубины в вертикальном сечении пучка в начале (верхний график) и в конце трассы (нижний график). Сплошные линии представляют аналогичные зависимости для гауссова пучка (26) с $a = a_0$. Как видим, сравниваемые поля, действительно, не сильно отличаются друг от друга. Аналогичная картина наблюдается и в промежуточных точках трассы. Поскольку выражение (26) получено в безаберрационном приближении, сравнение подтверждает применимость данного приближения для описания поля пучка.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследован вопрос об использовании вертикальной антенны для излучения звукового пучка, распространяющегося вдоль выбранного опорного луча. Здесь сформулирована вариационная задача о формировании такого начального поля на апертуре антенны, чтобы средняя ширина пучка была минимальна. В разделе 2 с использованием модового описания поля получено строгое решение этой задачи в плоскослоистом волноводе. Предложенная процедура расчета оптимального начального поля требует применения численных методов.

В разд. 3 показано, что замена жесткого ограничения на размер апертуры более мягким условием (5) в безаберрационном приближении позволяет получить аналитическое решение задачи. Оказалось, что искомый пучок является гауссовым. Впрочем, полученное решение правильнее назвать полуаналитическим, так как оно выражается через параметры опорного луча, которые в общем случае нельзя найти без численного решения лучевого уравнения. Тем не менее, даже такое описание дает ясное представление о зависимости средней ширины найденного пучка $\bar{\Delta}$ от его начальной ширины a. При малых a текущая ширина пучка $\Delta(r)$ быстро растет с дистанцией из-за дифракционного расплывания и $\bar{\Delta}$ принимает большие значения. С увеличением a дифракционное расплывание, а вместе с ним и величина $\bar{\Delta}$, уменьшаются. Так происходит до тех пор, пока a не достигнет значения a_0, заданного соотношением (27). Дальнейшее увеличение a ведет уже к росту $\bar{\Delta}$: уменьшение дифракционного расплывания перестает компенсировать увеличение начальной ширины пучка. Соотношение (26) с $a = a_0$ определяет пучок с минимально возможной средней шириной (при фиксированных значениях длины трассы и несущей частоты), распространяющийся вдоль выбранного опорного луча. Данный результат применим не только в плоскослоистом волноводе, но и в любой среде, параметры которой являются досточно плавными функциями координат r и z.

Из сказанного следует, что в условиях применимости безаберрационного приближения для изучения пучка с минимально возможной средней шириной нужна антенна с апертурой, в несколько раз превышающей a_0. При этом метод формирования начального поля, изложенный в разд. 2, должен дать результат близкий к (26). Этот вывод подтвержден результатами численного моделирования, приведенными в разд. 4.

Авторы благодарны Л.Я. Любавину и А.Ю. Казаровой за многочисленные полезные обсуждения и помощь в работе. Статья написана при поддержке программы фундаментальных исследований Отделения физических наук РАН "Когерентные акустические поля и сигналы", грантов РФФИ 07-02-00255 и 08-05-00596, а также гранта "Ведущие научные школы" НШ-1055.2008.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Даргейко М.М., Кравцов Ю.А., Петников В.Г., Петросян А.С., Самойленко Ю.И., Славинский М.М.* Применение принципа фазового сопряжения для решения задач оптимального управления волновыми полями в неоднородных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. №. 6. С. 746–752.
2. *Таланов В.И.* О синтезе антенн в многомодовых волноводах // Изв. вузов. Радиофизика.1985. Т. 28. № 7. С. 872–879.
3. *Гончаров В.В., Куртепов В.М.* О формировании и распространении слаборасходящихся пучков лучей в горизонтально неоднородном океане // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 5. С. 773–781.
4. *Петухов Ю.В., Абросимов Д.И., Бородина Е.Л.* Каустики и слаборасходящиеся пучки лучей в океанических волноводах // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 3. С. 367–374.
5. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. М: Наука, 2007. 370 с.
6. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. М: Наука, 1978. ч. II. Случайные поля. 464 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М: Наука, 1974. 752 с.
8. *Вировлянский А.Л., Нефедова Д.В.* Волновой пучок с минимальной расходимостью в плавно неоднородной среде // Изв. вузов. Радиофизика. В печати.
9. *Morozov A.K., Colosi J.A.* Entropy and scintillation analysis of acoustic beam propagation through ocean internal waves // J. Acoust. Soc. Amer. 2005. V. 117. № 3. Pt. 2. P. 1611–1623.
10. *Петухов Ю.В., Хилько А.А.* Формирование, распространение и фокусировка пучков в океанических волноводах. Квазиоптическое приближение // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 5. С. 796–806.
11. *Вировлянский А.Л.* Лучевая теория дальнего распространения звука. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2006. 164 с.
12. *Кондратьев И.Г., Пермитин Г.В., Смирнов А.И.* Распространение широких волновых пучков в плавно неоднородных средах // Изв. вузов. Радиофизика.1980. Т. 23. № 10. С. 1195–1203.
13. *Пермитин Г.В., Смирнов А.И.* Квазиоптика плавнонеоднородных сред // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. № 3. С. 736–751.
14. *Власов С.Н., Таланов В.И.* Самофокусировка волн. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997. 220 с.
15. *Окомелькова И.А., Шерешевский И.А.* Расчет нормальных волн в слоистой среде. Горький: Препринт ИПФ РАН ССР. № 235. 1989. 36 с.