

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРЕ С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

© 2010 г. И. А. Панфилов, Ю. А. Устинов

Южный федеральный университет
344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8а
E-mail: ustinov@math.rsu.ru
Поступила в редакцию 12.04.10 г.

На основе трехмерной теории упругости рассмотрены особенности распространения гармонических волн в полом цилиндре с винтовой анизотропией. Основное внимание уделено изучению осесимметричных колебаний. Для описания низкочастотных длинноволновых продольно-крутильных колебаний методами теории возмущений построена прикладная теория и получены оценки области ее применимости. Для анализа высокочастотных колебаний разработан и реализован численный метод определения критических частот и дисперсионных кривых. Показано, что в осесимметричном случае винтовая анизотропия порождает связь между продольными и крутильными колебаниями, которая математически описывается амплитудными коэффициентами однородных волн.

ВВЕДЕНИЕ

Теория волноводов берет свое начало в [1–3]. В этих работах исследовано распространение гармонических волн в упругом цилиндре и слое (плоская и антиплоская задачи) при свободных от напряжения боковой поверхности цилиндра и лицевых сторон слоя. Задачи эти считаются классическими, а дисперсионные уравнения, полученные в этих работах, многократно исследовались различными авторами. Результаты таких исследований позволили, в частности, получить оценки для областей применимости различных прикладных теорий, описывающих колебания стержней и цилиндрических оболочек, которые широко используются в различных технических устройствах. Подробный обзор этих исследований можно найти, например, в [4]. Дальнейшее развитие теории волноводов шло в различных направлениях. Так, например, в [5] исследовано распространение волн в твердом волноводе прямоугольного сечения, в [6] в поперечно-неоднородном пьезоактивном волноводе, в [7], [8] исследована дифракция сдвиговых волн в слое с разрезами.

Настоящая работа посвящена исследованию особенностей распространения волновых процессов в полом цилиндре с винтовой анизотропией на основе трехмерных уравнений теории упругости; построению методами теории возмущений прикладной теории продольно-крутильных колебаний стержней с винтовой анизотропией и оценке области ее применимости.

Цилиндр с винтовой анизотропией можно представить, в частности, как результат винтовой намотки слоев тонких нитей из жесткого материала на цилиндрическую поверхность с одновре-

менным покрытием их полимерным материалом. Таким образом, получается локально трансверсально-изотропный композит с осью симметрии, направленной по касательным к винтовым спиральям, для определения приведенных упругих характеристик которого можно использовать методы гомогенизации [9], [10]. Цилиндрическую оболочку с винтовой анизотропией можно получить путем свертывания прямоугольной ортотропной пластины в трубку, если направления главных осей упругой симметрии не совпадают с направлениями ее сторон. Винтовой анизотропией обладают стенки артериальных кровеносных сосудов [11], [12].

Основные соотношения линейной теории упругости для тел с винтовой анизотропией и результаты исследований задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией опубликованы в [13–15]. В этих работах, в частности, показано, что при растяжении–сжатии цилиндра с винтовой анизотропией помимо продольных деформаций возникает сдвиговые и, наоборот, при кручении помимо сдвиговых продольные.

В [16] для математического моделирования распространения пульсовых волн в артериальных сосудах на основе гипотез Кирхгофа–Лява получены уравнения колебаний оболочки с винтовой анизотропией. В [17] в рамках безмоментной теории исследованы некоторые особенности волновых процессов, порождаемых винтовой анизотропией. В [18], [19] анонсированы методы построения решений динамических краевых задач на основе прикладной теории типа Кирхгофа–Лява и результаты исследований некоторых конкретных задач, в [20] дается подробное описание этих результатов.

Настоящая работа посвящена исследованию гармонических волн в полой цилиндрической оболочке с винтовой анизотропией на основе трехмерных уравнений теории упругости.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ВИНТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через r_1, r_2 внутренний и внешний радиусы цилиндра срединной поверхности оболочки. С центром некоторого поперечного сечения цилиндра свяжем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, направив Ox_3 по оси цилиндра.

Введем винтовую систему координат r, φ, z , связанную с декартовыми соотношениями

$$x_1 = r \cos(\varphi + \tau z), \quad x_2 = r \sin(\varphi + \tau z), \quad x_3 = z, \quad (1)$$

где $r_1 \leq r \leq r_2$; $\tau = \operatorname{tg}(\alpha)/r_2$ геометрический параметр винтовой анизотропии.

Соотношения (1) при $r = \operatorname{const}$, $\theta = \operatorname{const}$ являются параметрическими уравнениями винтовой линии. С каждой винтовой линией свяжем базис Френе с ортами главной нормали e_1 , главной нормали e_2 , касательной e_3 .

Переход от базиса Френе к базису винтовой системы координат e_r, e_θ, e_z , первые два орта которой связаны с ортами декартовой системы $Ox_1x_2x_3$ соотношениями

$$e_r = i_1 \cos(\theta + \tau z) + i_2 \sin(\theta + \tau z), \\ e_\theta = -i_1 \sin(\theta + \tau z) + i_2 \cos(\theta + \tau z),$$

осуществляется с помощью ортогональной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}(x)$, $x = \tau r$.

Будем считать материал цилиндра локально трансверсально изотропным, у которого направления главных осей тензора упругих свойств совпадают с направлениями ортов e_1, e_2, e_3 , где орт e_3 определяет направление оси упругой симметрии. В этом базисе соотношения обобщенного закона Гука имеют вид [21]

$$\sigma_{11} = c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33}, \\ \sigma_{22} = c_{12}e_{11} + c_{11}e_{22} + c_{13}e_{33}, \\ \sigma_{33} = c_{13}(e_{11} + e_{22}) + c_{33}e_{33}, \\ \sigma_{23} = c_{44}e_{23}, \sigma_{13} = c_{44}e_{13}, \\ \sigma_{12} = c_{66}e_{12}.$$

Здесь e_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензоров малых деформаций и напряжений соответственно, $2c_{66} = c_{11} - c_{12}$.

При переходе от базиса Френе к базису винтовой системы координат, как показано в [15–16], для закона Гука получаем следующие выражения:

$$\sigma' = C' e', \quad C' = (c'_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, 6, \\ \sigma' = (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta})^T, \quad (2) \\ e' = (e_{rr}, e_{\theta\theta}, e_{zz}, 2e_{\theta z}, 2e_{rz}, 2e_{r\theta})^T.$$

Здесь

$$c'_{11} = c_{11}, \quad c'_{12} = c_{12}l_c^2 + c_{13}l_s^2, \\ c'_{13} = c_{13}l_c^2 + c_{12}l_s^2, \\ c'_{14} = l_c l_s (c_{13} - c_{12}), \\ c'_{22} = c_{11}l_c^4 + (2c_{13} + 4c_{44})l_c^2 l_s^2 + c_{33}l_s^4, \\ c'_{23} = c_{13}l_c^4 + (c_{11} + c_{33} - 4c_{44})l_c^2 l_s^2 + c_{13}l_s^4, \\ c'_{24} = -c_{11}l_c^3 l_s - c_{13}(l_c^3 l_s - l_c^3 l_s) + c_{33}l_c^3 l_s - 2c_{44}(l_c^3 l_s - l_c^3 l_s), \\ c'_{33} = c_{11}l_s^4 + 2c_{13}l_c^2 l_s^2 + c_{33}l_c^4 + 4c_{44}l_c^2 l_s^2, \\ c'_{34} = -l_c l_s (c_{11}l_s^2 - c_{13} + 2c_{13}l_c^2 + 2c_{44}l_c^2 - 2c_{44}l_s^2), \\ c'_{44} = c_{11}l_c^2 l_s^2 - 2c_{13}l_c^2 l_s^2 + c_{33}l_c^2 l_s^2 + c_{44}(1 - 4l_c^2 l_s^2), \\ c'_{55} = c_{44}l_c^2 + c_{66}l_s^2, \\ c'_{56} = l_c l_s (c_{44} - c_{66}), \quad c_{66} = c_{66}l_c^2 + c_{44}l_s^2 \\ l_c = \cos \alpha, \quad l_s = \sin \alpha.$$

Остальные элементы матрицы C' равны нулю.

В базисе винтовой системы координат e_r, e_θ, e_z компоненты тензора деформаций выражаются через координаты вектора смещений

$$u = (u_r, u_\theta, u_z)^T$$

следующими формулами:

$$e_{rr} = \partial_r u_r, \quad e_{\theta\theta} = (u_r + \partial_\theta u_\theta)/r, \\ e_{zz} = \partial_z u_z, \\ 2e_{r\theta} = \partial_r u_\theta + (\partial_\theta u_r - u_\theta)/r, \\ 2e_{rz} = \partial_r u_z + \partial_z u_r, \\ 2e_{z\theta} = \partial_\theta u_z/r + \partial_z u_\theta. \quad (3)$$

Уравнения движения в данном случае имеют вид

$$\partial_r(r\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} + \partial_\theta \sigma_{r\theta} + rD\sigma_{rz} = \rho r \partial_t^2 u_r, \\ \partial_r(r\sigma_{r\theta}) + \sigma_{r\theta} + \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + rD\sigma_{\theta z} = \rho r \partial_t^2 u_\theta, \\ \partial_r(r\sigma_{rz}) + \partial_\theta \sigma_{\theta z} + rD\sigma_{zz} = \rho r \partial_t^2 u_z. \quad (4)$$

В формулах (4) ρ – плотность материала цилиндра;

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$D = \partial - \tau \partial_\theta.$$

Будем считать, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений при $r = r_\beta$ ($\beta = 1, 2$):

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0 \quad (5)$$

Для исследования гармонических волновых процессов в цилиндре будем использовать различные операторные формы [22]. Для этого введем следующие векторы:

$$\sigma_r = (\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz})^T,$$

$$\sigma_\theta = (\sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{z\theta})^T,$$

$$\sigma_z = (\sigma_{rz}, \sigma_{z\theta}, \sigma_{zz})^T.$$

Используя соотношения (2), (3) и ограничиваясь осесимметричным случаем, представим $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ в виде

$$\sigma_r = \partial_z A_r u + B_r u,$$

$$\sigma_\theta = \partial_z A_\theta u + B_\theta u,$$

$$\sigma_z = \partial_z A_z u + B_z u.$$

Здесь

$$A_r = \begin{vmatrix} 0 & c'_{14} & c'_{13} \\ c'_{56} & 0 & 0 \\ c'_{55} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$B_r = \begin{vmatrix} c'_{11} \partial_r + c'_{12}/r & 0 & 0 \\ 0 & c'_{66}(\partial_r - 1/r) & c'_{56} \partial_r \\ 0 & c'_{56}(\partial_r - 1/r) & c'_{55} \partial_r \end{vmatrix},$$

$$A_\theta = \begin{vmatrix} c'_{56} & 0 & 0 \\ 0 & c'_{24} & c'_{23} \\ 0 & c'_{44} & c'_{34} \end{vmatrix},$$

$$B_\theta = \begin{vmatrix} 0 & c'_{66}(\partial_r - 1/r) & c'_{56} \partial_r \\ c'_{12} \partial_r + c'_{22}/r & 0 & 0 \\ c'_{14} \partial_r + c'_{24}/r & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$A_z = \begin{vmatrix} c'_{56} & 0 & 0 \\ 0 & c'_{44} & c'_{34} \\ 0 & c'_{34} & c'_{33} \end{vmatrix},$$

$$B_z = \begin{vmatrix} 0 & c'_{56}(\partial_r - 1/r) & c'_{56} \partial_r \\ c'_{14} \partial_r + c'_{24}/r & 0 & 0 \\ c'_{13} \partial_r + c'_{23}/r & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отыскивая решение в виде гармонической волны

$$u = e^{i(kz - \omega t)} a, \quad \sigma_r = e^{i(kz - \omega t)} b_r,$$

$$\sigma_\theta = e^{i(kz - \omega t)} b_\theta, \quad \sigma_z = e^{i(kz - \omega t)} b_z,$$

$$a = (a_r, ia_\theta, ia_z)^T, \quad b_r = (ib_{rr}, b_{r\theta}, b_{rz})^T,$$

$$b_\theta = (b_{r\theta}, ib_{\theta\theta}, ib_{\theta z})^T, \quad b_z = (b_{rz}, ib_{z\theta}, ib_{zz})^T.$$

на основании (4), (5) получаем двухпараметрическую спектральную задачу

$$L(k, \omega)a \equiv -k^2 A_2 a + ikA_1 a + A_0 + r\rho\omega^2 I a = 0 \quad (6)$$

при $r = r_\beta : (ikA_r + B_r)a = 0.$

Здесь

$$A_2 a = rA_2 a, \quad A_1 a = \partial_r(rA_r a) + SA_\theta a + rB_z a,$$

$$A_0 = \partial_r(rB_r a) + SB_\theta a,$$

$$S = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

ДЛИННОВОЛНОВЫЕ НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Для проведения исследований перейдем к безразмерным координатам $\xi = r/r_2, \zeta = z/r_2$ и введем параметры $\gamma = r_2 k$ – безразмерное волновое число, $\Omega = r_2 \omega / c$ – безразмерная частота, $c = (E' / \rho)^{1/2}$ – параметр, имеющий размерность скорости. Все модули отнесем к E' .

Замечание. Технические постоянные [21] E, E', G, ν, ν' связаны с модулями c_{ij} следующими формулами

$$c_{11} = \frac{E(E' + \nu^2 E)}{E'(1 + \nu^2) - 2E\nu'(\nu + \nu')},$$

$$c_{12} = \frac{E(\nu E' + \nu'^2 E)}{E'(1 + \nu^2) - 2E\nu'(\nu + \nu')}.$$

$$c_{13} = \frac{EE'v}{E'(1-v) - 2v'^2 E},$$

$$c_{33} = \frac{E'^2(1-v)}{E'(1-v) - 2v'^2 E}, \quad c_{44} = G'.$$

Под длинноволновыми низкочастотными колебаниями будем понимать случай, когда $\gamma \ll 1$, $\Omega \ll 1$.

Уравнение (6) преобразуем к безразмерному виду

$$L(\gamma, \Omega)a \equiv (-\gamma^2 A'_2 + i\gamma A'_1 + A'_0 + \xi\Omega^2 I)a = 0 \quad (7)$$

при $\xi = \xi_\alpha : (i\gamma A'_r + B'_r)a = 0$

Здесь матрицы A'_j получаются путем деления элементов матриц A_j на E , заменами $r_\alpha = r_2 \xi_\alpha$, $\partial_r = r_2 \partial_\xi$ ($\alpha = 1, 2$), ∂_ξ обыкновенная производная по ξ .

Для построения приближенного решения, отвечающего малым значениям параметров γ , Ω , используя методы теории возмущений [23], решение (7) будем отыскивать в виде

$$\Omega = s_0 \gamma + s_1 \gamma^3 + \dots, \quad (8)$$

$$a = a_0 + \gamma a_1 + \gamma^2 a_2 + \dots$$

После подстановки (8) в (7) получаем рекуррентную систему краевых задач

$$A'_0 a_0 = 0, \quad B'_r a_0|_{\xi=\xi_\alpha} = 0, \quad (9)$$

$$A'_0 a_1 + A'_1 a_0 = 0, \quad (B'_r a_1 + iA'_r a_0)|_{\xi=\xi_\alpha} = 0, \quad (10)$$

$$A'_0 a_2 + A'_1 a_1 + A'_2 a_0 + \xi s_0^2 a_0 = 0, \quad (11)$$

$$(B'_r a_2 + iA'_r a_1)|_{\xi=\xi_\alpha} = 0.$$

Соотношениям (11) отвечает статическая однородная задача, которая имеет два линейно независимых решения [13], [14]

$$a_0^1 = (0, 0, 1)^T, \quad a_0^2 = (0, \xi, 0)^T. \quad (12)$$

Каждый из них является собственным вектором, отвечающим спектральной паре $(\gamma = 0, \Omega = 0)$.

Однородное уравнение (10) имеет два нетривиальных решения

$$a_1^1 = (-ia_r^1, 0, 0)^T, \quad a_1^2 = (-ia_r^2, 0, 0)^T, \quad (13)$$

координаты которых определяются решением следующих краевых задач:

$$La_r^\beta = F^\beta, \quad la_r^\beta|_{\xi=\xi_\alpha} = f_\alpha^\beta,$$

$$La \equiv \partial_\xi(\xi b_{11} \partial_\xi a + b_{12} a) - b_{12} \partial_\xi a - b_{22} a / \xi,$$

$$la \equiv b_{11} \partial_\xi a + b_{12} a / \xi,$$

$$F^1 = -\partial_\xi(\xi b_{13}) + b_{23}, \quad f_\alpha^1 = -b_{13}(\xi_\alpha),$$

$$F^2 = -\partial_\xi(\xi^2 b_{14}) + \xi b_{24}, \quad f_\alpha^2 = -\xi_\alpha b_{14}(\xi_\alpha).$$

Здесь $b_{ij} = c'_{ij} / E'$.

Введем гильбертово пространство H со скалярным произведением

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathbf{g}_1 \cdot \overline{\mathbf{g}_2} d\xi,$$

$$\overline{\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2} = g_{1j} \overline{g_{2j}},$$

$(j = 1, 2, 3).$

Здесь и ниже суммирование по повторяющемуся индексу; $\mathbf{g}_\beta = (g_{\beta 1}, g_{\beta 2}, g_{\beta 3})^T$ — произвольные векторфункции, принадлежащие H ; все введенные выше матрицы 3×3 рассматриваются как операторы $H \rightarrow H$.

Введем линейную комбинацию собственных векторов

$$a_0 = C_1 a_0^1 + C_2 a_0^2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Умножая уравнение (11) скалярно на a_0 , получаем следующую однородную алгебраическую систему:

$$(d_{11} - s_0^2 b_1) C_1 + d_{12} C_2 = 0,$$

$$d_{21} C_1 + (d_{22} C_2 - s_0^2 b_2) C_2 = 0$$

$$d_{ij} = (A'_2 a_0^i, a_0^j), \quad (14)$$

$$b_1 = (\xi_2^2 - \xi_1^2) / 2,$$

$$b_2 = (\xi_2^4 - \xi_1^4) / 4.$$

С учетом выражений (12), (13), после преобразований получаем

$$d_{11} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (b_{13} \partial_\xi a_r^1 + b_{23} a_r^1 / \xi + b_{33}) \xi d\xi,$$

$$d_{12} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (b_{13} \partial_\xi a_r^2 + b_{23} a_r^2 / \xi + b_{34}) \xi d\xi,$$

$$d_{21} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (b_{14} \partial_\xi a_r^1 + b_{24} a_r^1 / \xi + b_{34} \xi) \xi d\xi,$$

$$d_{22} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (b_{14} \partial_{\xi} a_r^2 + b_{24} a_r^2 / \xi + b_{44} \xi) \xi d\xi,$$

$$b_1 = (\xi_2^2 - \xi_1^2) / 2, \quad b_2 = (\xi_2^4 - \xi_1^4) / 4.$$

Замечание. Опираясь на теорему Бетти, можно показать, что $d_{21} = d_{12}$.

Из условия существования нетривиального решения системы (14) получаем характеристическое уравнение для определения s_0 :

$$\Delta(s_0) \equiv s_0^4 - 2g_1 s_0^2 + g_0 = 0,$$

$$2g_1 = d_{11} + d_{22}, \quad g_2 = d_{11} d_{22} - d_{12}^2.$$

Обращаясь к (14), получаем начальные участки дисперсионных кривых

$$\Omega = v_1 \gamma + O(\gamma^3), \quad \Omega = v_2 \gamma + O(\gamma^3),$$

$$v_1 = (g_1 + \sqrt{g_1^2 - g_2})^{1/2},$$

$$v_2 = (g_1 - \sqrt{g_1^2 - g_2})^{1/2}.$$

Из проведенного анализа вытекает, что при малых значениях параметров γ , Ω существуют четыре бездисперсионных волны вида:

$$u_1^+ = X_{11} a_0^1 e^{ik_1(z-ct)} + X_{12} a_0^2 e^{ik_2(z-ct)}, \quad (15)$$

$$u_2^+ = X_{12} a_0^1 e^{ik_1(z-ct)} + X_{22} a_0^2 e^{ik_2(z-ct)},$$

$$u_1^- = X_{11} a_0^1 e^{ik_1(z+ct)} + X_{12} a_0^2 e^{ik_2(z+ct)}, \quad (16)$$

$$u_2^- = X_{12} a_0^1 e^{ik_1(z+ct)} + X_{22} a_0^2 e^{ik_2(z+ct)},$$

Здесь

$$X_{\beta 1} = a(d_{22} - v_{\beta}^2 b_2), \quad X_{\beta 2} = -ad_{12},$$

$$c_{\beta} = v_{\beta} c, \quad k_{\beta} = \omega / c_{\beta}, \quad c = (E' / \rho)^{1/2}, \quad (\beta = 1, 2).$$

Таким образом, любые низкочастотные и длинноволновые колебания цилиндра с винтовой анизотропией являются линейной комбинацией элементарных решений (15), (16).

Далее, поскольку $a_0^1 = (0, 0, 1)^T$, $a_0^2 = (0, \xi, 0)^T$, то первые слагаемые в приведенных выше формулах описывают продольные волны, а вторые — крутильные. При $\tau = 0$ элементарные волны u_1^{\pm} становятся чисто продольными, а u_2^{\pm} — чисто крутильными. Винтовая анизотропия приводит к тому, что эти волны становятся квазипродольными и квазикрутильными соответственно.

В том случае, когда безразмерный параметр $\tau_0 = r_2 \tau \ll 1$, главные члены разложений d_{ij} по этому параметру имеют вид:

$$d_{11}^0 = \xi_2^2 - \xi_1^2, \quad d_{22}^0 = G'(\xi_2^4 - \xi_1^4) / 2E',$$

$$d_{12}^0 = \tau_0(\xi_2^4 - \xi_1^4) B / 2E',$$

$$B = E' - 2(1 + \nu')G'.$$

Заметим, что для изотропного материала параметр $B = 0$, т.е. этот параметр можно рассматривать как характеристику степени анизотропии.

Полезно отметить, что описанные результаты можно получить на основе следующих уравнений:

$$\begin{aligned} D_{11} \partial_z^2 w + D_{12} \partial_z^2 \varphi &= \rho S \partial_t^2 w, \\ D_{12} \partial_z^2 w + D_{22} \partial_z^2 \varphi &= \rho J_{\rho} \partial_t^2 \varphi, \end{aligned} \quad (17)$$

$$F = \pi(r_2^2 - r_1^2), \quad J_{\rho} = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4),$$

где w — смещения точек оси стержня вдоль оси z , φ — угол поворота сечения, отнесенный к единице длины,

$$D_{11} = \pi r_2^2 E' d_{11}, \quad D_{12} = \pi r_2^3 E' d_{12}, \quad D_{22} = \pi r_2^4 E' d_{22}.$$

Уравнения (17) при $D_{12} = 0$ превращаются в классические уравнения продольных и крутильных колебаний соответственно для стержня из ортотропного материала.

В заключение этого раздела приведем некоторые результаты расчетов, иллюстрирующие влияние различных параметров на характеристики волновых процессов.

Расчеты проводились для двух материалов.

1) Условно жесткий материал М1 (композит с винтовой намоткой из стальных нитей с полимерным наполнителем) со следующими значениями упругих постоянных (н/м²), полученных на основе формул [24]: $E' = 1.208 \times 10^{11}$, $E = 5.3 \times 10^9$, $\nu' = 0.23$, $\nu = 0.30$, $G' = 1.189 \times 10^9$.

2) Условно мягкий материал М2 (биологическая ткань стенки артериального сосуда [11]) $E' = 4.905 \times 10^8$, $E = 0.833E'$, $G' = E' / 6$, $\nu' = 0.45$, $\nu = 0.54$.

Для М1 и М2 на рис. 1 приведены графики, иллюстрирующие зависимости первых двух нормированных фазовых скоростей v_{β} от параметра $\alpha = \arctg \tau_0$. Кривые 1, 2 иллюстрируют зависимость первых двух нормированных фазовых скоростей $v_1(\alpha)$ и $v_2(\alpha)$ для $\xi_1 = 0.1$, $\xi_2 = 1$ (толстостенный цилиндр) для “жесткого” материала, а кривые 3, 4 — соответствующие зависимости для “мягкого” материала. Причем кривые 1, 3 описывают поведение квазипродольных волн, т.е. таких, у которых при $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$ отсутствует крутильная деформация; кривые 2, 4 — квазикрутильных волн, т.е. таких, у которых при $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$ отсутствует продольная деформация. Изменение внутреннего радиуса (толщины) цилиндра мало влияет на эти фазовые скорости.

Кривые на рис. 2 иллюстрируют зависимости для амплитудных коэффициентов элементарных решений (15), (16) для толстостенного цилиндра

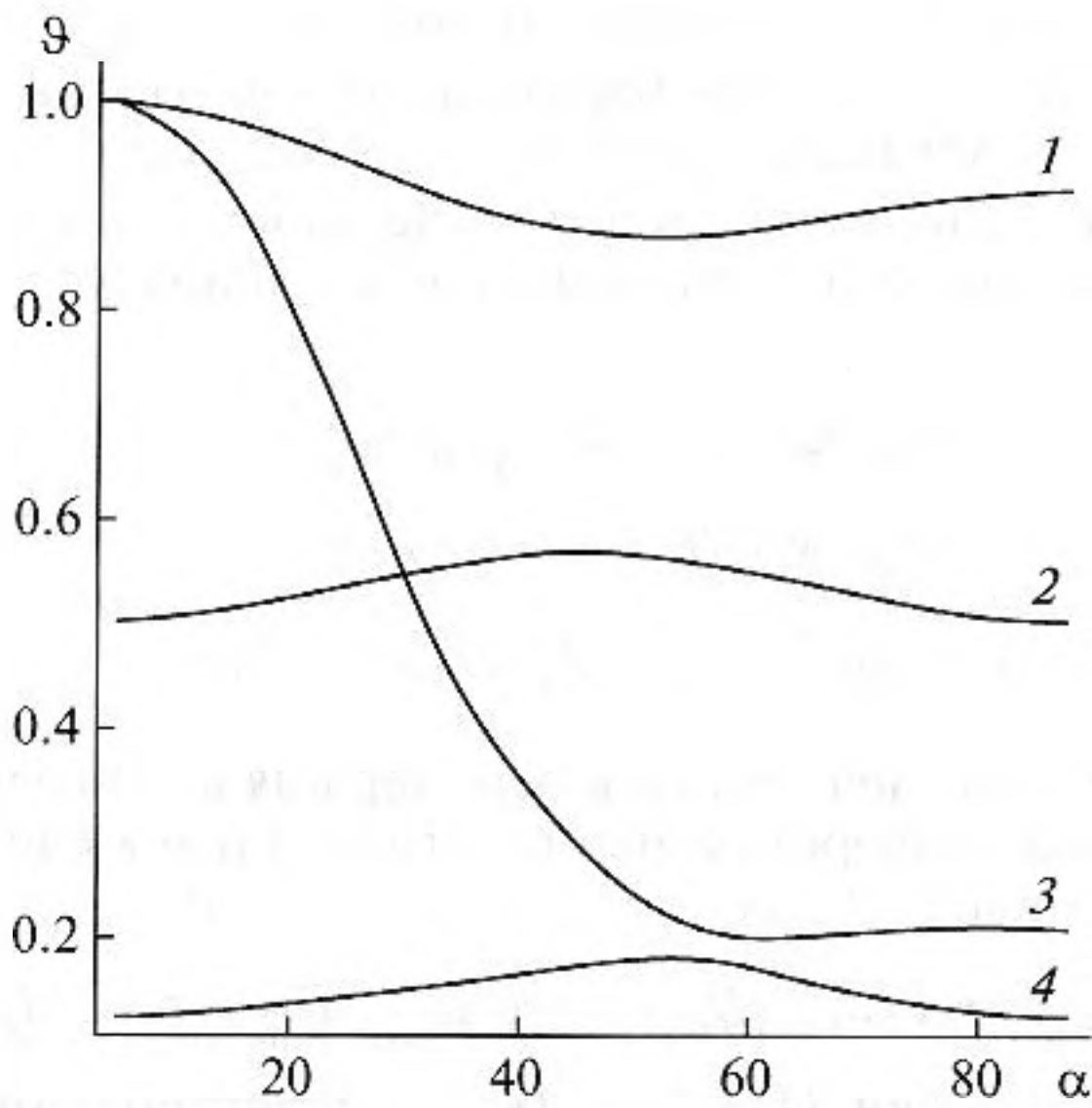


Рис. 1.

материала М2, отвечающих фазовой скорости 3 на рис. 1. Здесь кривая 1 соответствует X_{11} , кривая 2 — X_{12} . (X_{22} по модулю на несколько порядков меньше X_{11} и X_{12} , поэтому на графике не приводится). Как показали расчеты для различных значений внутреннего диаметра цилиндров как из жесткого, так и из мягкого материалов в интервале $45^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$ существует такое значение $a = a^*$, при котором коэффициент $X_{12}(\alpha^*) = 0$. При изменении α в окрестности α^* меняет знак на противоположный, что указывает на изменение знака фазы вращательных компонент элементарных волн (15), (16) на противоположные. Таким обра-

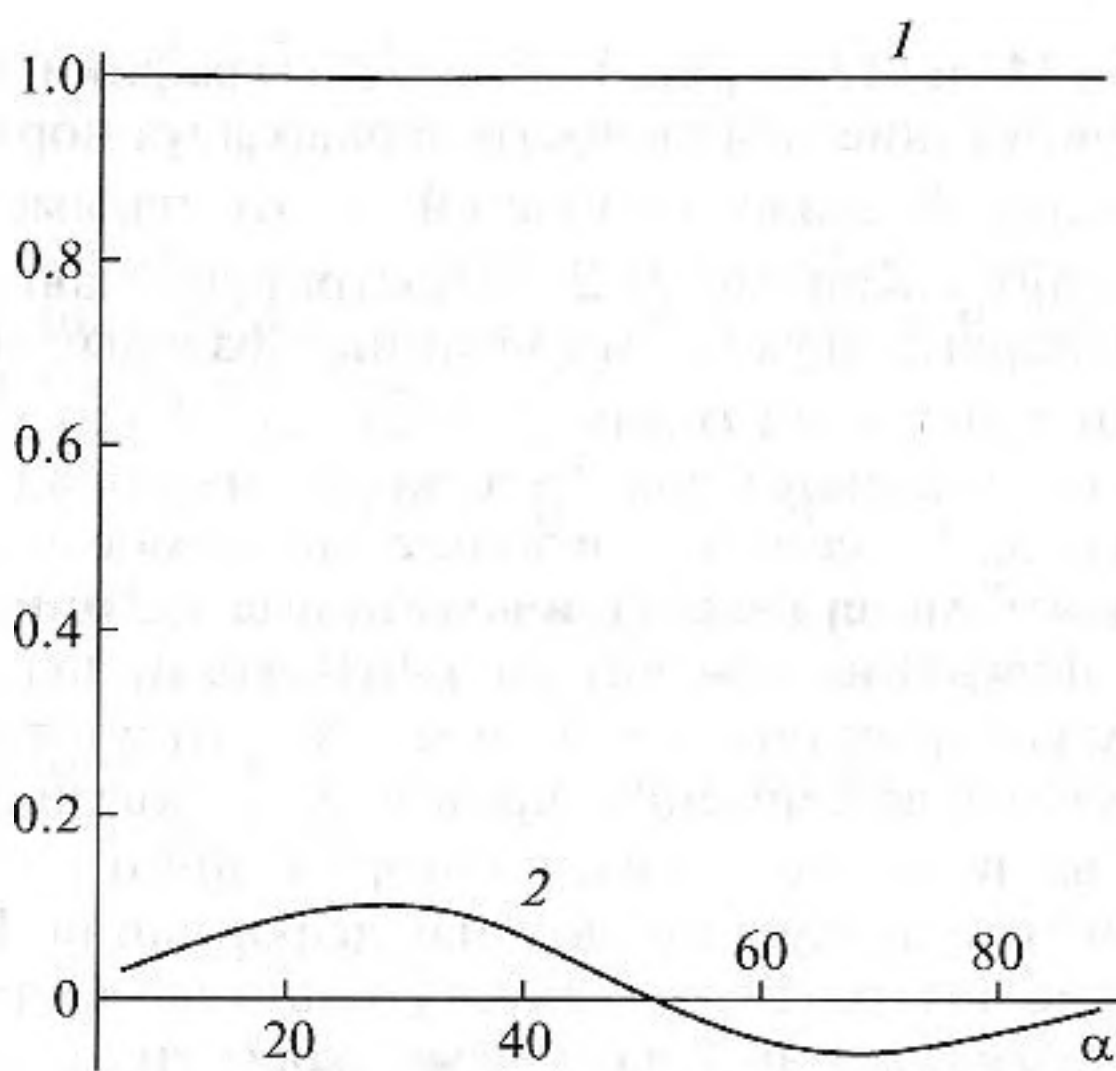


Рис. 2.

зом, для трех значений $\alpha = 0, \alpha = \alpha^*, \alpha = 90^\circ$ элементарные волны распадаются на чисто продольные и чисто крутильные.

На рис. 3 приведены графики первых двух дисперсионных кривых, полученных на основе численного интегрирования спектрального уравнения (7) “методом пристрелки” для М2 с параметрами $\xi_1 = 0.1, \xi_2 = 1, \alpha = 45^\circ$. Кривая 1 отвечает квазипродольным модам, кривая 2 — квазикрутильным модам.

Для реализации метода эта задача была преобразована в краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\xi} &= G_{11}a + G_{12}b, & \frac{db}{d\xi} &= G_{21}a + G_{22}b, \\ b(\xi_1) &= 0, & b(\xi_2) &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

где $b = \xi b_r$. Выражения для матриц G_{ij} здесь не приводятся ввиду очевидности способа их построения на основе выше приведенных формул.

Эти графики позволяют получить некоторое представление об области применимости прикладной теории продольно-крутильных колебаний, основанной на соотношениях (17). Так, например, прямолинейный участок первой дисперсионной кривой принадлежит области $0 \leq \gamma \leq \gamma^*$ ($\gamma^* = 1.5$), $0 \leq \Omega \leq \Omega^*$ ($\Omega^* = 1$), второй дисперсионной кривой $0 \leq \gamma \leq \gamma_1^*, \gamma_1^* = 3, 0 \leq \Omega \leq \Omega_1^*$ ($\Omega_1^* = 1.5$). Из этих неравенств можно сделать вывод о том, что для цилиндра с выбранными параметрами прикладная теория будет давать удовлетворительные результаты, если круговая частота $\omega < c_1 \Omega^* / a$. Прикладная теория привлекательна еще тем, что

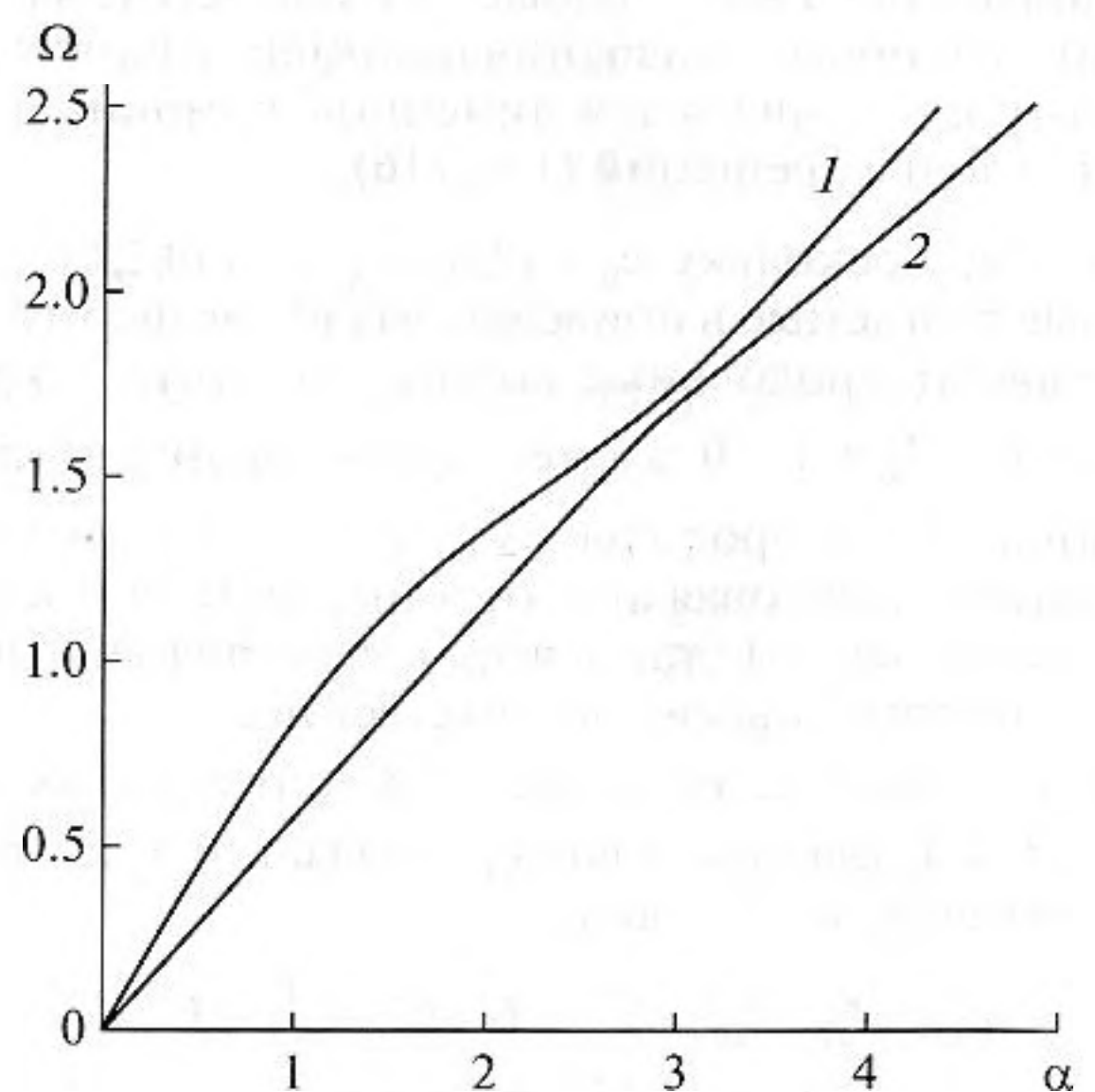


Рис. 3.

позволяет сравнительно простыми средствами определять собственные частоты и собственные формы продольно-крутильных колебаний цилиндров конечной длины. Поскольку множество собственных частот $\Omega_n (n = 1, \dots)$ не ограничено и принадлежит дисперсионным кривым, то данная прикладная теория может претендовать на достаточно точное определение только тех частот, значения которых принадлежат интервалам $0 \leq \Omega_n \leq \Omega^*$, $0 \leq \Omega_n \leq \Omega_1^*$.

КРИТИЧЕСКИЕ ЧАСТОТЫ И ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Из общей теории волноводов [22] и конкретных исследований [4] волновых процессов в упругих цилиндрах из изотропных материалов известно, что спектральные задачи вида (6) для каждого фиксированного значения параметра ω имеют счетное неограниченное множество собственных значений (СЗ) k_n , симметрично расположенное в комплексной плоскости γ , и конечные множества вещественных СЗ $\pm k_s, k_s \geq 0, s = 1, \dots, N(\omega)$. Вещественным СЗ отвечают однородные элементарные волны, которые переносят волновую энергию вдоль оси цилиндра. Направление потока энергии через поперечное сечение цилиндра определяется средним за период значением проекции на ось цилиндра вектора Умова-Пойтинга [4], [22], который в рассматриваемом случае может быть вычислен по формуле:

$$P_{zs} = \pi \omega \operatorname{Im}(b_{zs} a_s).$$

Здесь a_s — собственный вектор задачи (6), отвечающей спектральной паре (k_s, ω) , $b_{zs} = (ik_s A_z + B_z) a_s$.

Знак этого вектора определяет направление распространения волновой энергии и является одним из критериев классификации элементарных решений (принцип Мальденштама [22], [25]).

Однако применение этого принципа, как и других [22], [26], наталкивается на определенные трудности в случае “критических частот”. Под “критическими частотами” в данном случае понимается множество СЗ $\omega_l (l = 1, \dots)$ самосопряженной спектральной задачи

$$L(0, \omega) a \equiv (A_0 + r \rho \omega^2 I) a = 0$$

$$\text{при } r = r_\beta : B_r a = 0,$$

которая является частным случаем задачи (6), если в последней положить $k = 0$. Множество собственных векторов, отвечающих спектральным парам $(0, \omega_l)$ обозначим a_l^0 . Известно [22], что данным спектральным парам кроме собственных векторов отвечают цепочки присоединенных векторов a_l^1, \dots, a_l^p . Как показано в [22], обычно суще-

ствует только один присоединенный вектор, который определяется решением следующей задачи:

$$A_0 a_l^1 + r \rho \omega_l^2 I a_l^1 - i A_l a_l^0 = 0,$$

$$\text{при } r = r_\beta : B_r a_l^1 + i A_r a_l^0 = 0.$$

Если волновое число $k = 0$, то существует пара элементарных решений вида

$$u_l^\pm = (\pm z a_l^0 + a_l^1) e^{-i \omega_l t}.$$

При этом проекции вектора Умова-Пойтинга $P_z(u^+) > 0, P_z(u^-) < 0$.

Волновые процессы с круговой частотой $\omega \geq \omega_1$ условно будем называть высокочастотными.

Приведем здесь значения первых трех критических частот, полученных путем численного интегрирования уравнений (18), для М2 при $\alpha = 45^\circ$: $\Omega = (2.07, 2.59, 2.77)$. Для оценки точности результатов, полученных численным методом, поставленная задача (3)–(5) при $(k = 0, \alpha = 0)$ (трансверсально-изотропный материал) была решена аналитически. Сравнительный анализ показал полное совпадение результатов, а также позволил идентифицировать типы колебаний, отвечающих каждой из приведенных частот. При изменении параметра α первая частота порождает ветвь квазипродольных колебаний, вторая — квазирадиальных, третья — квазикрутильных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из проведенного анализа вытекает, что при винтовой анизотропии, как правило, нет чисто продольных или чисто крутильных однородных гармонических волн. Механическая структура цилиндра приводит к тому, что в зависимости от параметров задачи и способа возбуждения все волны можно условно разделить на квазипродольные и квазикрутильные. В цилиндре конечных размеров, возбуждая на одном из его торцов чисто продольные колебания, путем подбора параметров на другом торце можно помимо продольных колебаний получить крутильные со значительной амплитудой. Известны некоторые устройства, которые используют эти особенности волновых процессов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (09-01-00065-а), Южного математического института Владикавказского научного центра РАН, а также в рамках федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pochhammer L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten

- isotropen Kreiscylinder // *J. Reine Angew. Math.* 1876. V. 81. P. 324–336.
2. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar // *J. Quart. Pure Appl. Math.* 1886. V. 21. P. 287–298.
 3. *Rayleigh, Lord.* On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter // *Proc. London Math. Soc.* 1889. V. 20. P. 225–234.
 4. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев.: Наукова думка. 1981. 283 с.
 5. *Вовк А.Е., Гудков В.В., Левченко Е.В., Тютюкин В.В.* Нормальные волны твердого прямоугольного волновода // *Акуст. журн.* 1980. Т. 26. № 3. С. 356–363.
 6. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Распространение волн в поперечно-неоднородных пьезоактивных волноводах // *Акуст. журн.* 1985. Т. 31. № 3. С. 314–319.
 7. *Дьяконов М.Б., Устинов Ю.А.* Сдвиговые волны в упругом полубесконечном слое с разрезами // *Акуст. журн.* 1995. Т. 41. № 3. С. 421–426.
 8. *Дьяконов М.Б., Устинов Ю.А.* Дифракция сдвиговых волн на бесконечной и конечной периодических системах разрезов в упругом слое // *Акуст. журн.* 1997. Т. 41. № 2. С. 176–181.
 9. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
 10. *Победря Б.* Механика композиционных материалов. М.: МГУ, 1984. 335 с.
 11. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир. 1983. 400 с.
 12. *Пурина Б.А., Касьянов В.А.* Биомеханика крупных кровеносных сосудов. Рига: Знание, 1980. 260 с.
 13. *Устинов Ю.А.* Решение задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией // *ПММ.* 2003. Т. 67. № 1. С. 89–98.
 14. *Устинов Ю.А.* Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией // *Успехи механики.* 2003. № 4. С. 37–62.
 15. *Устинов Ю.А.* // *Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров.* М.: Наука, 2003. 128 с.
 16. *Устинов Ю.А.* Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах // *Докл. РАН.* 2004. Т. 398. № 3. С. 344–348.
 17. *Богаченко С.Е., Устинов Ю.А.* Некоторые особенности волновых процессов в цилиндрической оболочке с винтовой анизотропией // *Экологический вестник научных центров ЧЭС.* 2006. № 1. С. 18–21.
 18. *Панфилов И. А., Устинов Ю.А.* Собственные частоты и формы цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией // *Труды XI международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды”.* Ростов-на-Дону: ООО “ЦВВР”, 2007. Т. 2. С. 166–171.
 19. *Панфилов И. А., Устинов Ю.А.* Отражение однородных волн от торца полубесконечной цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией // *Труды XII международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды”.* Ростов-на-Дону: ООО “ЦВВР”, 2008. Т. 2. С. 152–156.
 20. *Панфилов И. А., Устинов Ю.А.* Некоторые динамические задачи для цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией // *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Актуальные проблемы механики. Естественные науки.* 2009. Спецвыпуск. С. 97–105.
 21. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: 1977. 415 с.
 22. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-на-Дону. Ростовский университет. 1993. 144с.
 23. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир, 1962. 96 с.
 24. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* О методах расчета канатов. Задача растяжения-кручения // *ПММ.* 2008. Т. 72. № 1. С. 81–90.
 25. *Мальденштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: 1972. 437 с.
 26. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1973. 320 с.