

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.16

СТОЯЧИЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ
В РЕЗОНАТОРЕ С НЕОДНОРОДНОЙ РЕЗИНОПОДОБНОЙ СРЕДОЙ

© 2011 г. В. Г. Андреев, Т. Б. Крит, В. В. Костиков, А. В. Шанин, С. И. Шиндерук

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра акустики
119991 Москва, Ленинские горы 1, стр. 2

E-mail: timofey@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 29.07.10 г.

Описана модификация метода конечных элементов, позволяющая рассчитывать стоячие сдвиговые волны в резонаторе, заполненном несжимаемой упругой средой, с учетом конечных размеров резонатора и неоднородностей сдвигового модуля. Рассчитаны резонансные кривые для резонатора с неоднородностями в виде полостей и упругих включений. Численные расчеты сравниваются с результатами измерений.

Ключевые слова: резиноподобные материалы, метод конечных элементов, сдвиговые волны, резонатор с неоднородностью сдвигового модуля, резонатор неправильной формы.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] исследованы сдвиговые волны в одномерном резонаторе в виде слоя однородной резиноподобной среды, на верхней поверхности которого закреплялась пластина конечной массы, а нижняя поверхность совершала гармонические колебания с заданным ускорением. Теоретически и экспериментально показано, что в такой системе резонансы возникают на частотах, значения которых зависят от массы верхней пластины и сдвигового модуля слоя. По измеренным резонансным кривым были определены модуль сдвига и коэффициент сдвиговой вязкости резиноподобного материала в области низких частот. В [2] одномерная модель использована для анализа стоячих волн в резонаторе, в котором модуль сдвига среды изменяется только вдоль направления, перпендикулярного сдвиговым смещениям.

В данной работе исследуются волновые процессы в резонаторе конечных размеров с неоднородностями сдвигового модуля различного типа. Резонатор представляет собой параллелепипед, изготовленный из резиноподобного материала, который закреплен без проскальзывания на горизонтальной пластине. Верхняя грань параллелепипеда либо свободна, либо на ней находится пластина конечной массы. Моделирование проводилось методом конечных элементов (МКЭ) [3].

МКЭ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ
РЕЗИНОПОДОБНОЙ СРЕДЫ

Пусть x_i обозначает координаты частиц резонатора до деформации, u_i — смещение частиц в резуль-

тате деформации. В линейном приближении деформации описываются тензором $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$,

где $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, 3$. Внутренние напряжения, возникающие при деформации, описываются тензором σ_{ij} . Уравнение движения запишется в виде:

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{i,j,j} + b_i, \quad (1)$$

где $\sigma_{i,j,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, 3$, ρ — плотность материала, b_i — внешняя объемная сила. Связь между напряжением и деформацией зададим в виде:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (2)$$

где λ и μ — параметры Ламе, η — коэффициент сдвиговой вязкости.

В реализации метода конечных элементов мы следуем классическому руководству [4]. Здесь мы воспроизводим основные шаги метода.

Параллелепипед толщиной L , длиной a и шириной b был разбит на конечные элементы в виде треугольных призм, как показано на рис. 1, а. Размер призм выбирался таким образом, чтобы погрешность определения резонансных частот не превышала 1%, что соответствует экспериментальным условиям. В этом случае оптимальным является разбиение параллелепипеда на 5–10 элементов по толщине, 10–15 по длине и 4–6 по ширине. Уменьшение размера конечного элемента, в особенности вблизи вершин слоя и неоднородностей, позволяет точнее рассчитывать резонанс-

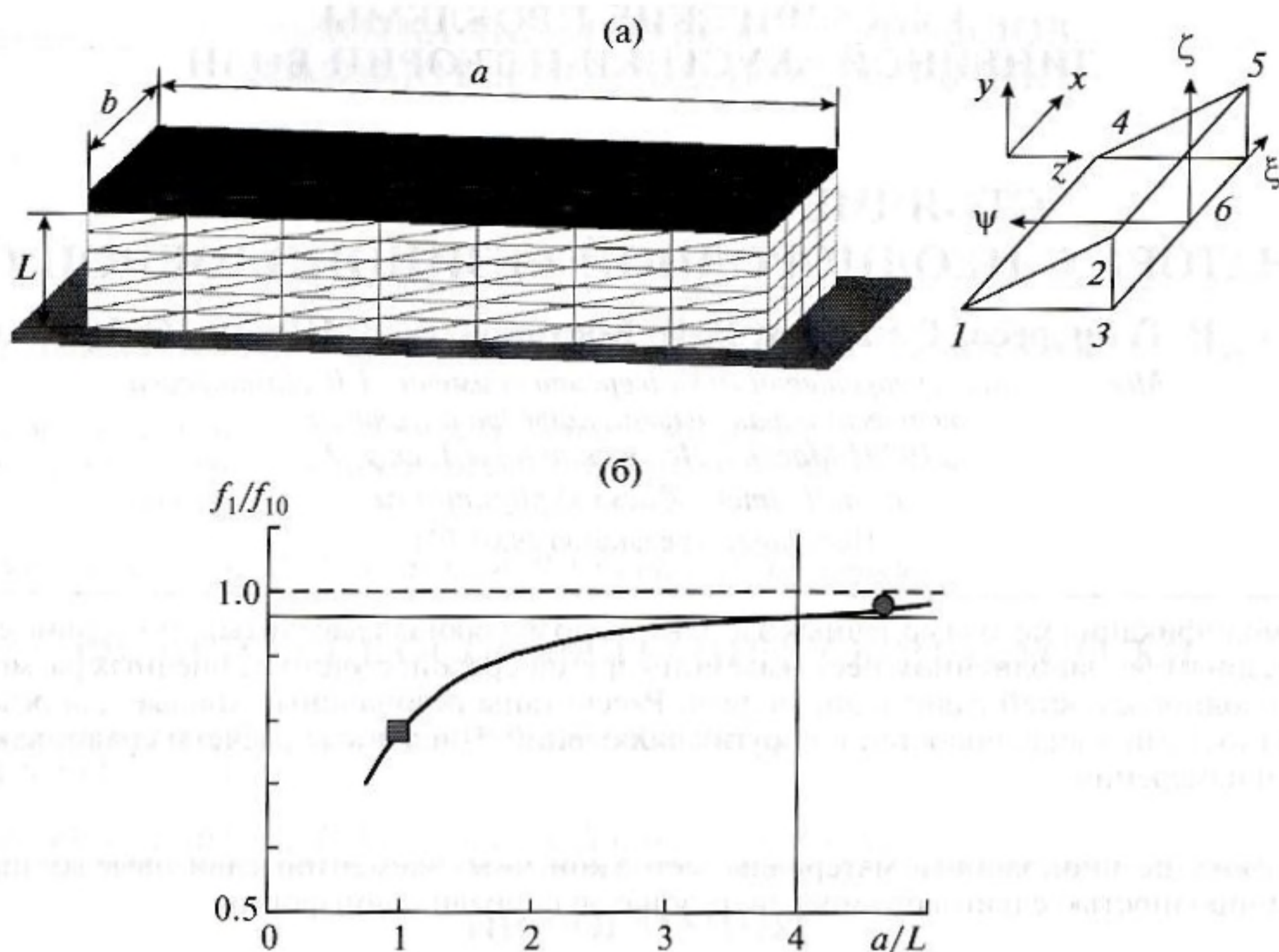


Рис. 1. Схема метода конечных элементов (а). Зависимость первой резонансной частоты от отношения длины резонатора к его толщине (б). f_{10} — резонансная частота, вычисленная для одномерной модели. Сплошной горизонтальной прямой показано отношение $f_1/f_{10} = 0.96$. Символами показаны экспериментальные данные: точка — резонатор с отношением $a/L = 4.7$, квадрат — резонатор в виде кубика ($a/L = 1$).

ные характеристики предложенным методом. Вместе с тем уменьшение размера конечного элемента приводит к увеличению времени расчета резонансных характеристик.

Рассмотрим единичную треугольную призму, показанную на вставке к рис. 1, а. Узлы призмы пронумерованы от 1 до 6; в основаниях, образованных узлами 1–2–3, 4–5–6, находятся прямоугольные треугольники. При вычислении элементарных матриц для призмы, имеющей произвольный размер, будем выполнять отображение реальной призмы на единичную. Координаты единичной призмы (ξ, ψ, ζ) будем называть естественными (или локальными) координатами элемента в отличие от глобальных координат (x, y, z).

Пусть в узлах призмы заданы значения некоторой функции $\Phi(\xi, \psi, \zeta)$. Тогда значение Φ во внутренних точках призмы вычисляется путем интерполяции

$$\Phi(\xi, \psi, \zeta) = \sum_{i=1}^6 \Phi_i N_i(\xi, \psi, \zeta), \quad (3)$$

где Φ_i — значение Φ в i -м узле, $N_i(\xi, \psi, \zeta)$ — интерполяционные функции [3].

Для отображения произвольной призмы на единичную будем использовать формулу (3), полагая в ней Φ равной последовательно x, y и z . Для

простоты будем считать, что узлы 1–2–3 лежат в плоскости yz . Тогда формулы преобразования координат упрощаются:

$$\begin{cases} x = x_1 \frac{1-\xi}{2} + x_4 \frac{1+\xi}{2}, \\ y = y_1 \psi + y_2 \zeta + y_3 (1-\psi-\zeta), \\ z = z_1 \psi + z_2 \zeta + z_3 (1-\psi-\zeta). \end{cases} \quad (4)$$

Определитель матрицы Якоби преобразования (4) равен

$$\det J = \frac{1}{2} x_{41} (y_{13} z_{23} - y_{23} z_{13}), \quad (5)$$

где $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$, $z_{ij} = z_i - z_j$. Заметим, что значение выражения (5) равно объему призмы V .

Если на верхней границе параллелепипеда имеется жесткая пластина конечной массы, то добавляется еще один ряд треугольных призм по толщине (верхний ряд на рис. 1, а). Призмам этого ряда приписываются параметры Ламе и коэффициент сдвиговой вязкости, соответствующие материалу, из которого изготовлена верхняя пластина. Плотность призм рассчитывается как отношение массы верхней пластины к объему добавленного ряда. Фактически это соответствует резонатору в виде двухслойной структуры, за-

крепленной на горизонтальной пластине. Таким образом, предложенный метод позволяет также исследовать стоячие сдвиговые волны в резонаторах в виде структур из параллельных слоев с плоскими границами раздела [2].

Разобьем границу параллелепипеда Γ на два непересекающихся участка Γ_u и Γ_f . Участок Γ_u соответствует нижней границе, которая закреплена на пластине, а участок Γ_f — остальной границе. Пусть на участке Γ_u заданы смещения точек \hat{u}_i , а на участке Γ_f задано внешнее поверхностное напряжение \hat{t}_i . Тогда граничные условия будут иметь вид:

$$u_i|_{\Gamma_u} = \hat{u}_i = A \sin 2\pi ft, \quad (6)$$

$$\sigma_{ij}n_j|_{\Gamma_f} = \hat{t}_i = 0, \quad (7)$$

где f — частота колебаний. Условие (6) соответствует смещению нижней границы по гармоническому закону с частотой f и заданной амплитудой A . Условие (7) означает, что остальные границы параллелепипеда свободны, то есть внешние напряжения на них равны нулю. Условие (7) справедливо и для резонатора с нагруженной верхней границей слоя, поскольку в таком случае верхняя граница пластины, закрепленной на слое, по-прежнему свободна.

Домножим уравнение (1) на произвольную функцию δu_i , которая обращается в нуль на участке границы Γ_u , и проинтегрируем по всему объему Ω :

$$\int_{\Omega} \delta u_i (\rho \ddot{u}_i - \sigma_{i,j,j} - b_i) d\Omega = 0.$$

В результате интегрирования по частям получим выражение:

$$\int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{i,j,j} d\Omega = \int_{\Omega} (\delta u_i \sigma_{i,j}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{i,j} d\Omega,$$

в правой части которого первое слагаемое равно нулю. Действительно, по теореме Остроградско-Гаусса оно преобразуется в интеграл по замкнутой поверхности Γ , которая ограничивает объем Ω . В силу (7) и поскольку $\delta u_i = 0$ на участке границы Γ_u , этот интеграл равен нулю. Окончательно получим выражение принципа виртуальной работы:

$$\int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} (\delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega = 0, \quad (8)$$

в котором $\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$.

Чтобы применить МКЭ для решения уравнения (8), выполним дискретизацию всего объема Ω на призмы объемами Ω^e и разобьем интегралы в этом уравнении на суммы интегралов по эле-

ментам. В частности, (2) для каждой призмы перепишем в виде:

$$\sigma = E\varepsilon + G\dot{\varepsilon}, \quad (9)$$

где E и G — матрицы упругих модулей и коэффициентов вязкости соответственно.

Здесь симметричные тензоры σ и ε записаны в виде векторов размерности 6. Первые три компоненты соответствуют парам индексов xx, yy, zz , а последние три — парам индексов xy, xz, yz . Такая векторная запись весьма удобна и часто применяется в вычислительной теории упругости.

Переход от вектора деформаций призмы к вектору смещений ее частиц осуществляется по формуле $\varepsilon = Su$, в которой вектор смещений $u = [u_x, u_y, u_z]^T$, а S — оператор симметричного градиента:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}^T.$$

Компоненты вектора смещений в каждой точке связаны с компонентами вектора смещений узлов по формуле (3). Окончательно получаем: $\varepsilon = SNU \equiv BU$, где U — вектор смещений узлов, а N — матрица интерполяционных функций. Тогда уравнение (9) примет вид $\sigma = BEU + BG\dot{U}$.

Матрица массы одной призмы определяется выражением

$$M^e = \rho \int_{\Omega^e} N^T(x, y, z) N(x, y, z) dx dy dz = \\ = \rho V \int_{\varpi} N^T(\xi, \psi, \zeta) N(\xi, \psi, \zeta) d\xi d\psi d\zeta$$

Интеграл по $\varpi = \{(\xi, \psi, \zeta) : -1 \leq \xi \leq 1; 0 \leq \psi \leq 1; 0 \leq \zeta \leq 1 - \psi\}$ определяется только видом интерполяционных функций и не изменяется от элемента к элементу.

Существенным недостатком стандартного МКЭ в задачах расчета деформаций в несжимаемых средах является так называемый эффект объемной блокировки [3–4]. Условие несжимаемости в стандартном МКЭ выражается в постоянстве объема каждой призмы. Это приводит к слишком большому числу связей по сравнению с числом степеней свободы системы, полученной в результате дискретизации непрерывного поля смещений. Жесткость сетки становится значительно выше реальной жесткости материала, и деформации, рассчитанные МКЭ, оказываются заметно меньше реальных. Влияние отношения числа степеней свободы к числу узлов на характер

деформации несжимаемой среды проанализировано в [5]. Показано, что при отношении меньшем и равном 1 происходит объемная блокировка. Так, для плоской области, разбитой на треугольники, число треугольников почти вдвое больше числа узлов (с точностью до числа узлов на границе области). При этом число степеней свободы ровно вдвое больше числа узлов (это смещения узлов по двум координатам). Если площади треугольников фиксируются, число оставшихся степеней свободы делается порядка числа узлов на границе, чего недостаточно для описания деформации тела. На практике это приводит к появлению "легких" и "тяжелых" направлений сдвиговой деформации, причем ситуация не изменяется при измельчении сетки (т.е. сходимости не имеет места). Поэтому в данной работе использован модифицированный МКЭ, а именно, метод с усреднением изменения объема по узлам [6]. В этом методе фиксируется не объем каждого конечного элемента, а средний объем, относящийся к каждому узлу. Таким образом, число фиксируемых степеней свободы равно числу узлов, что позволяет адекватно описывать деформации резиноподобного тела.

Для учета несжимаемости использован следующий алгоритм вычисления жесткости системы. Сдвиговая и объемная жесткость вычислялись отдельно.

Полагая $\lambda = 0$, вычислим матрицу сдвиговой жесткости. Она определяется интегралом

$$K_s^e = \int_{\Omega^e} B^T(x, y, z) E(x, y, z) B(x, y, z) dx dy dz,$$

который вычисляется аналогично предыдущему.

Матрицу объемной жесткости в каждой вершине будем вычислять как среднюю в группе элементов с данной вершиной. Для этого найдем среднюю объемную деформацию группы элементов, примыкающих к заданной вершине

$$\langle \varepsilon_v \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \varepsilon_v d\Omega = \frac{1}{V} \sum_e \int_{\Omega^e} \varepsilon_v d\Omega = \sum_e \frac{V_e}{V} \langle \varepsilon_v^e \rangle = \sum_e w^e \langle \varepsilon_v^e \rangle,$$

где $V = \sum_e V_e$ — суммарный объем группы,

$w^e = V_e/V$ — удельный объем элемента, $\langle \varepsilon_v^e \rangle$ — средняя по элементу объемная деформация, равная

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_v^e \rangle &= \langle \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e \rangle = \langle N(B_1 + B_2 + B_3)U \rangle = \\ &= \langle N \rangle (B_1 + B_2 + B_3)U \equiv \bar{B}_v U. \end{aligned}$$

Для треугольной призмы значение оператора

$$\bar{B}_v = \frac{1}{6}(B_1 + B_2 + B_3).$$

Теперь для вычисления матрицы объемной жесткости выразим энергию объемной деформации через смещения узлов:

$$H_v = \frac{\kappa}{2} V \langle \varepsilon_v \rangle^2 = \frac{\kappa}{2} V w^{eT} \langle \varepsilon_v^e \rangle^2 w^e = \frac{\kappa}{2} V U^T w^{eT} B_v^T B_v w^e U,$$

где κ — объемный модуль. Отсюда $K_v^e = w^{eT} B_v^T B_v w^e$.

Построенная таким образом матрица объемной жесткости обеспечивает равенство нулю средней деформации в окрестности узла. Эффект объемной блокировки при таком подходе отсутствует. Полная матрица жесткости вычисляется как сумма матриц сдвиговой и объемной жесткости.

Матрицы затухания и внешних сил вычисляются по формулам

$$C^e = \int_{\Omega^e} B^T G B d\Omega, \quad F^e = \int_{\Omega^e} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma^e} N^T \hat{t} d\Gamma.$$

После построения глобальных матриц по описанному алгоритму приходим к системе линейных дифференциальных уравнений в матричном виде:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F. \quad (10)$$

Для численного решения системы (10) использована схема Ньюмарка. Обозначим посредством u_n значение u в момент $t = n\Delta t$, где Δt — шаг по времени. Связь между величинами на текущем и следующем временном шаге дается формулами

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - \beta_2)\ddot{u}_n + \beta_2 \ddot{u}_{n+1}], \quad (11)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t [(1 - \beta_1)\ddot{u}_n + \beta_1 \ddot{u}_{n+1}],$$

где $0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1$ — параметры, определяющие тип разностной схемы. Уравнения (11) задают явную схему, когда эти параметры равны нулю, а при других значениях параметров схема будет неявной.

ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ

На рис. 1,б показана рассчитанная МКЭ зависимость первой резонансной частоты f_1 от отношения длины резонатора к его толщине a/L для однородного резонатора со свободной верхней границей. Частота f_1 нормирована на первую резонансную частоту f_{10} , вычисленную для одномерного резонатора [1]. При длине резонатора a значительно большей толщины L первый резонанс наблюдается на частоте f_{10} , и резонатор хорошо описывается одномерной моделью. При $a \geq 4L$ первая резонансная частота отличается от f_{10} не более чем на 4%. Это отношение можно условно считать границей применимости одно-

мерной модели. При длине резонатора, меньшей чем $4L$, следует применять МКЭ. Для кубика со свободной верхней гранью ($a = L$) резонансная частота $f_1 = 0.78f_{10}$, что соответствует результату измерений, показанному на графике квадратом. Кружком отмечена первая резонансная частота ($f_1 = 0.98f_{10}$), измеренная для резонатора с $a = 4.7L$, нагруженного пластиной массой 10.34 г. Видно, что результат измерения хорошо соответствует расчетам, выполненным МКЭ и по формулам для одномерной модели. Расчеты также показали, что резонансная частота практически не зависит от отношения ширины резонатора к его толщине b/L для $b \geq L$. Для меньших значений b расчеты не проводились. Отметим, что если при расчетах зафиксировать плотность верхней пластины, т.е. изменять ее массу пропорционально изменению ее длины a , то для таким образом нагруженного резонатора получим зависимость, представленную на рис. 1,б. Однако если зафиксировать массу верхней пластины, то резонансная частота будет спадать еще быстрее с уменьшением отношения a/L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРА И ПОЛОЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПО СДВИГУ РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЫ

С практической точки зрения представляет интерес рассмотреть поведение стоячих сдвиговых волн в резонаторе с неоднородностями сдвигового модуля. В работе анализируются резонансные характеристики для неоднородностей в виде одиночного включения в объем резонатора и в виде ряда из нескольких однотипных включений, расположенных на различных расстояниях от границ резонатора. В жестких неоднородностях сдвиговый модуль превышает сдвиговый модуль тела резонатора; для мягких неоднородностей ситуация обратная. Мы рассмотрели предельные случаи мягких неоднородностей в виде жидкого включения и виде пустой полости. В обоих случаях сдвиговый модуль равен нулю, однако для жидкого включения масса резонатора остается практически постоянной, поскольку плотность выбираемой жидкости практически совпадала с плотностью материала резонатора. При наличии пустой полости масса резонатора уменьшается, что и определяет отличия этих двух случаев. Отметим, что размер неоднородностей во всех рассмотренных случаях был значительно меньше длины волны.

На рис. 2 представлены резонансные кривые, рассчитанные МКЭ вблизи первого резонанса для резонатора с размерами $L = 15$ мм, $a = 70$ мм, $b = 40$ мм, нагруженного пластиной массой $M = 19.5$ г. Неоднородность, показанная черным цветом на вставке к рис. 2, располагалась в центре резонатора и была сквозной, т.е. проходила по

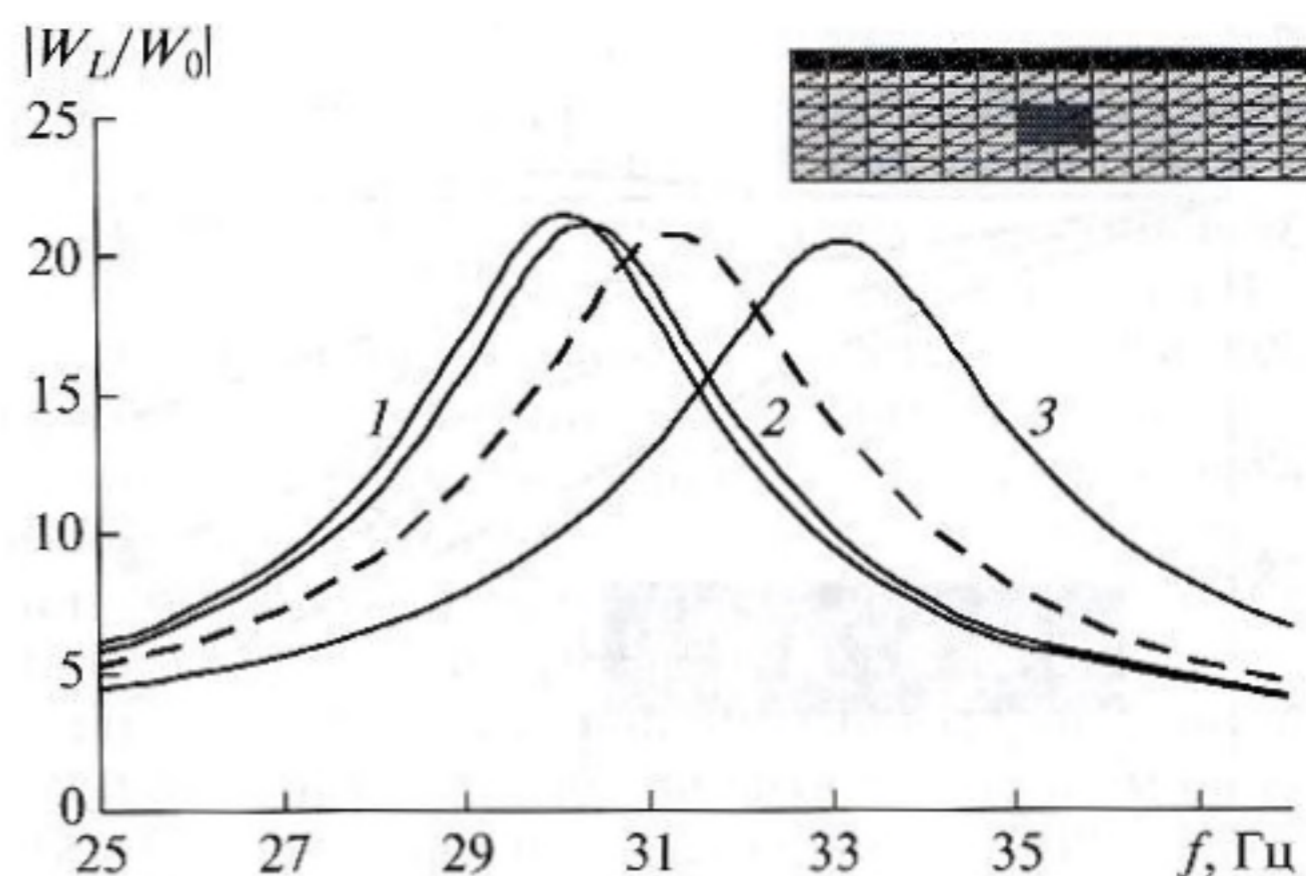


Рис. 2. Рассчитанные МКЭ резонансные кривые для резонатора с неоднородным включением (сплошные линии) и однородного резонатора (пунктирная линия). 1 — полость, заполненная жидкостью, 2 — пустая полость, 3 — твердое включение с модулем сдвига, в 10 раз превышающим модуль сдвига тела резонатора.

всей его ширине. Резонатор разбивался на 672 конечных элемента (к.э.) с размерами: высота 2.5 мм, длина 5 мм и ширина 10 мм. Неоднородность состояла из 32 элементов и имела размеры: высота 5 мм (размер двух конечных элементов), длина — 10 мм (2 к.э.) и ширина — 40 мм (4 к.э.), что составляло 4.76% объема резонатора. В расчетах использовались следующие параметры резиноподобного материала, составляющего основную часть резонатора: плотность $\rho = 0.98$ г/см³; параметры Ламе $\mu = 7.5$ кПа, $\lambda = 2.25 \cdot 10^7$ Па; коэффициент сдвиговой вязкости $\eta = 3.8$ Па · с. Пунктиром показана резонансная кривая для однородного резонатора с приведенными параметрами. Частота первого резонанса в однородном резонаторе составила 31.3 Гц, при этом амплитуда ускорения верхней пластины в 22 раза превышала амплитуду ускорения нижней пластины резонатора. Кривая 1 рассчитана для резонатора с неоднородностью в виде полости, заполненной жидкостью, где $\mu = 0$ и $\eta = 0$, $\rho = 1$ г/см³. Резонансная частота уменьшилась по сравнению с однородным резонатором и составила 30.1 Гц. Столь существенное различие (4%) позволяет детектировать неоднородность по сдвигу частоты. Вместе с тем, чтобы отличить полость с жидкостью от пустой полости, требуется более точное измерение частоты. Резонансная кривая 2 рассчитана для резонатора с пустой полостью ($\rho = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$, $\eta = 0$). Резонансная частота составила 30.3 Гц, что всего на 0.2 Гц больше, чем в резонаторе с жидким включением. Метод, описанный в работе [1], позволяет измерять резонансную частоту с точностью до 0.1 Гц, а значит, отличить полость с жидкостью от пустой полости. Наличие в слое неоднородности более жесткой, чем основная матрица, приво-

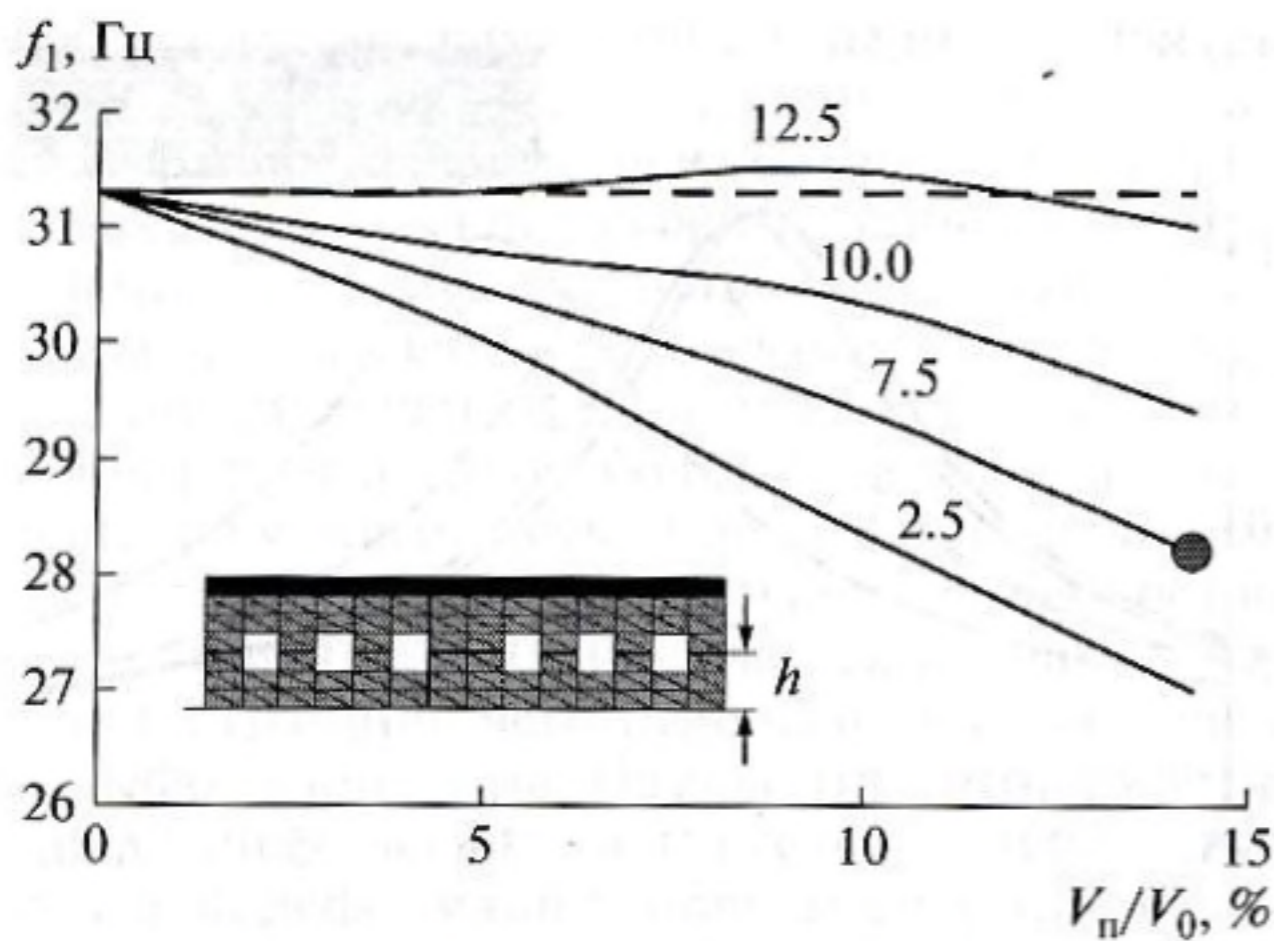


Рис. 3. Рассчитанные зависимости первой резонансной частоты в резонаторе с неоднородностями в виде горизонтального ряда пустых полостей от их относительного объема. Цифры у кривых соответствуют высоте положения центров полостей h в мм. Пунктиром показана первая резонансная частота в однородном резонаторе (31.3 Гц), кружком — измеренная частота в резонаторе с шестью полостями ($V_n/V_0 = 14.28\%$), расположенными на высоте $h = 7.5$ мм.

дит к росту резонансной частоты. Кривая 3 соответствует неоднородности, модуль сдвига которой $\mu = 75$ кПа, при этом резонансная частота получилась равной 33.1 Гц.

На рис. 3 показаны рассчитанные зависимости первой резонансной частоты в резонаторе с размерами, приведенными выше, при наличии в нем нескольких неоднородностей в виде пустых полостей, от их относительного объема. Каждая из сквозных полостей имела размер: высота 5 мм (2 конечных элемента), длина — 5 мм (1 к.э.) и ширина — 40 мм (4 к.э.), что составляло 2.38% объема резонатора. Неоднородности располагались в ряд на одинаковой высоте h , число полостей N в ряду изменялось попарно от 2 до 6, симметрично относительно оси, проходящей через центр резонатора. При этом их относительный объем увеличивался от 4.76% до 14.28%. Цифры у кривых соответствуют высоте положения центров полостей h в мм: при $h = 2.5$ мм полости граничили с нижней пластиной, а при $h = 12.5$ мм — с верхней пластиной резонатора. Параметры резиноподобного материала имели прежние значения: $\rho = 0.98$ г/см³, $\mu = 7.5$ кПа, $\lambda = 2.25 \times 10^7$ Па, $\eta = 3.8$ Па с. Пунктиром показана резонансная частота в однородном образце (31.3 Гц). Наличие полостей снижает резонансную частоту колебаний. Наибольшее уменьшение частоты наблюдается для резонатора с полостями, расположенными вблизи его нижней границы (кривая, соответствующая $h = 2.5$ мм). При этом увеличение числа полостей приводит к соответствующему уменьшению резонансной частоты. Наличие небольшого

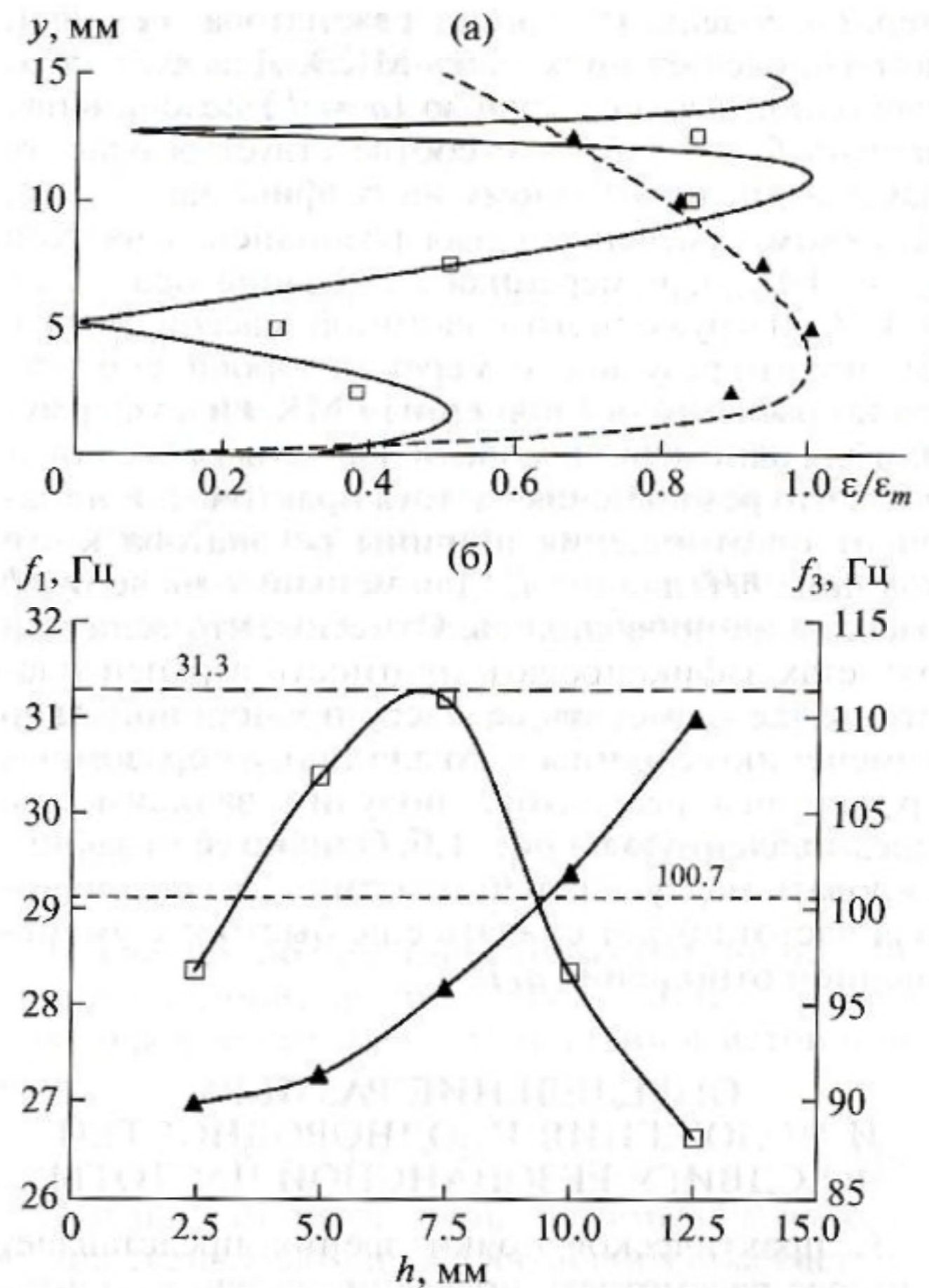


Рис. 4. Распределение сдвиговой деформации по высоте резонатора на первой (штриховая линия) и второй (сплошная линия) резонансной частоте (а). Деформация, усредненная по высоте полости, на первой резонансной частоте показана треугольниками, на второй — квадратиками. Зависимость первой (треугольники) и второй (квадратики) резонансных частот от высоты расположения полостей в резонаторе (б). Число полостей $N = 6$.

числа полостей ($N \leq 5$) непосредственно под верхней пластиной приводит сначала к небольшому возрастанию резонансной частоты, но, начиная с $N = 6$, резонансная частота начинает снижаться (кривая, соответствующая $h = 12.5$ мм). Такой же эффект был качественно получен и при использовании одномерной модели [2], когда резонатор был представлен в виде трехслойной структуры. Слой с полостями представлялся в виде однородного слоя с эквивалентными упругостью и плотностью, вычисляемыми по формулам: $\mu_{\text{eff}} = \mu_0 \left(1 - \frac{N}{14}\right)$, $\rho_{\text{eff}} = \rho_0 \left(1 - \frac{N}{14}\right)$ где μ_0 и ρ_0 — модуль упругости и плотность материала резонатора. Снижение резонансной частоты при наличии полостей в резонаторе может быть объяснено уменьшением эквивалентной упругости резонатора. При этом наличие полостей в области с наибольшей сдвиговой деформацией приводит к бо-

лее выраженному эффекту. На рис. 4,а штриховой линией представлено распределение деформации по высоте однородного резонатора, рассчитанное по профилю стоячей волны на первой резонансной частоте. Максимум деформации достигается на высоте 4 мм от нижней границы. Значения деформации, усредненной по высоте полостей, отмеченные на рис. 4,а треугольниками, качественно соответствуют штриховой кривой. Вблизи верхней границы резонатора, где усредненная деформация минимальна, резонансная частота слабо зависит от числа полостей. В то время как в области максимальных деформаций вблизи нижней границы резонатора наблюдается сильная зависимость резонансной частоты от числа полостей (см. рис. 3). Зависимость первой и второй резонансных частот резонатора с шестью полостями от высоты h показана на рис. 4,б треугольниками. Первая резонансная частота монотонно растет с увеличением высоты расположения полостей и достигает своего максимума при $h = 12.5$ мм, когда полости граничат с верхней пластиной. Для второй резонансной частоты, которая примерно в три раза превышает первую, усредненная деформация имеет минимум на высоте примерно 5 мм (квадратики на рис. 4,а). Соответственно изменяется зависимость второй резонансной частоты от высоты (квадратики на рис. 4,б): ее величина растет, достигает максимального значения при $h = 7.5$ мм и затем уменьшается до своего минимального значения при положении полостей на высоте 12.5 мм, где усредненная деформация максимальна. Отметим, что максимальное значение второй резонансной частоты при $h = 7.5$ мм более чем на 10% превышает частоту однородного резонатора (100.7 Гц), отмеченную на рис. 4,б штриховой линией.

Измерения проводились в резонаторе с неоднородностями в виде ряда из шести сквозных полостей, расположенного на высоте 7.5 мм от нижней пластины. Для изготовления полостей с квадратным сечением использовались стальные стержни, которые устанавливались в форму для заливки пластисола на нужную высоту. Форма заполнялась жидким пластисолом, нагретым до температуры 177°C. После полимеризации пластисола и остывания его до комнатной температуры стержни удалялись. Получившиеся сквозные полости имели квадратное сечение со стороной 5 мм. Измеренная первая резонансная частота (28.2 Гц) показана кружком на рис. 3. Она с большой точностью совпала с частотой, рассчитанной для неоднородности такого типа и размера.

ИЗМЕРЕНИЯ В РЕЗОНАТОРЕ НЕПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ

Метод конечных элементов позволяет рассчитать резонансные кривые для резонатора непра-

вильной формы. В качестве примера мы использовали резонатор в форме параллелепипеда с впадиной примерно конической формы на одной из его граней. Такие дефекты формы возникают в процессе изготовления упругого резонатора. Нагретый жидкий полимер наливается в форму требуемой конфигурации, где он полимеризуется и становится упругим. В процессе полимеризации и остывания полимера в форме с открытой верхней границей в полимере возникают внутренние напряжения, которые приводят к неоднородной усадке и появлению впадины примерно конической формы с максимальным углублением в центре. Объем впадины составляет 7–10% объема жидкого полимера, который заливался в форму.

Измерения проводились с резонатором в виде параллелепипеда из пластисола с размерами $36 \times 40 \times 40$ мм, нагруженного пластиной массой $M = 11$ г. На одной из граней размером 40×40 мм находилась впадина неправильной формы с максимальной глубиной 4 мм вблизи центра грани. Для измерения профиля впадины, ее поверхность покрывалась тонкой алюминиевой фольгой, которая подсоединялась к одному из проводов тестера, включенного в режим измерения сопротивления. Другой провод тестера соединялся с пробным металлическим конусом, закрепленным на микрометрической подаче. Касание пробного конуса с фольгой контролировалось по звуковому сигналу тестера, после чего производилось измерение глубины. Конус перемещался вдоль впадины с переменным шагом 0.1–0.5 мм в зависимости от степени неоднородности профиля. Диаметр конуса в точке касания с фольгой составлял 1 мм, что обеспечивало достаточно хорошую точность измерения профиля. Профиль измерялся в трех сечениях на расстояниях 10, 20 и 30 мм от края. На рис. 5,а точками показаны результаты измерения профиля впадины в одном из сечений. При численном моделировании резонатор разбивался на 1800 равнобедренных треугольных призм со стороной 4 мм. На одной из граней 40×40 мм выделялась область в виде прямоугольного параллелепипеда размером $4 \times 32 \times 32$ мм, содержащая 128 конечных элементов. Всем элементам в этой области присывались нулевые значения модуля сдвига и плотности. Профиль впадины, использованный при расчетах, показан на рис. 5,а сплошной линией. По объему (7.1%) впадина, использованная при расчетах, примерно соответствовала реальной впадине.

На рис. 5,б различными символами показаны измеренные резонансные кривые, соответствующие различным ориентациям грани с впадиной по отношению к направлению колебаний. Положение грани с впадиной при измерении соответствующей резонансной кривой показано на рис. 5,б справа. Стрелками указано направление

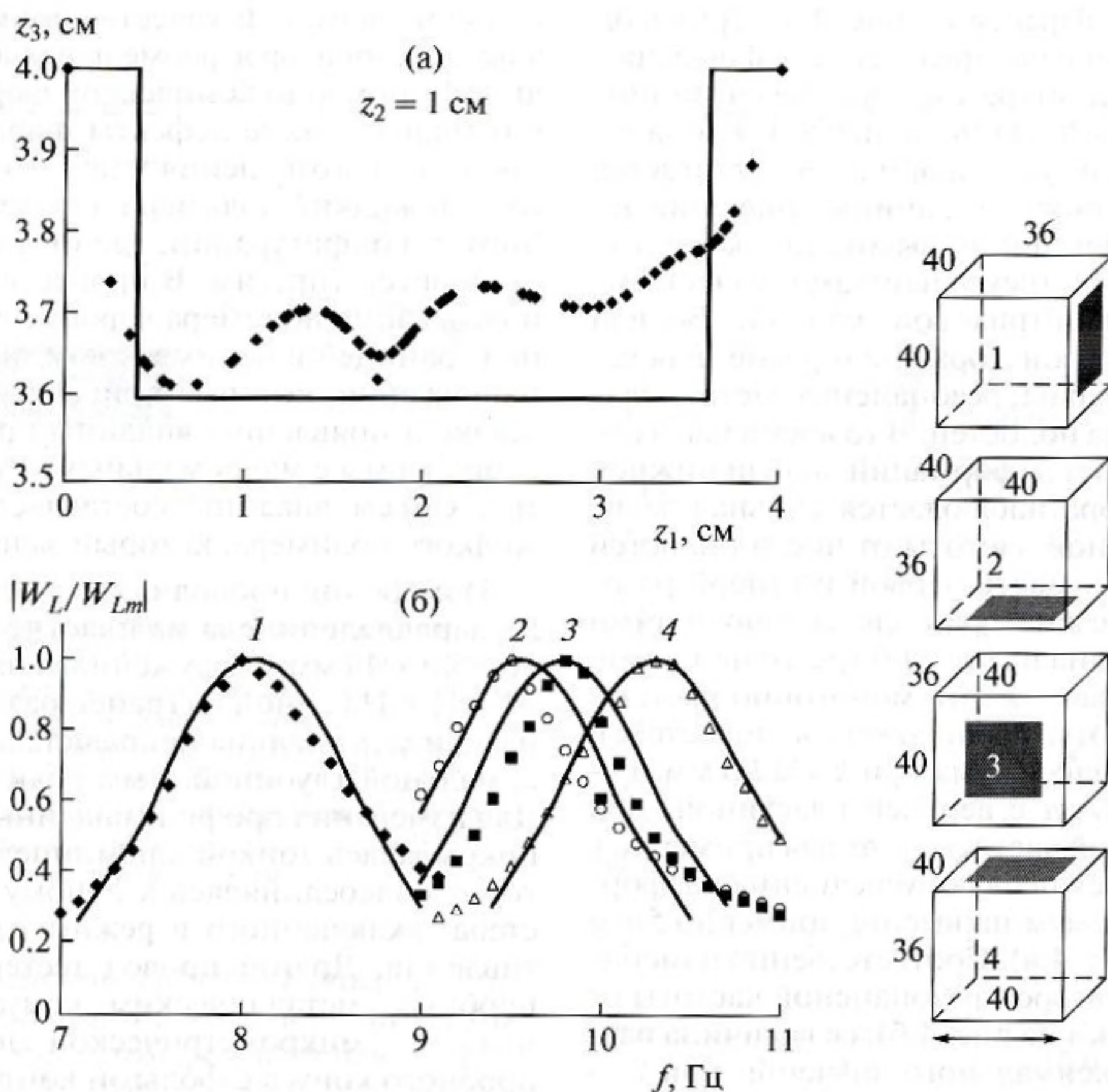


Рис. 5. Профиль впадины в одном из сечений (а). Точки — измеренные значения, линия — модельное представление. Резонансные кривые, полученные для резонатора в виде прямоугольного параллелепипеда с впадиной на одной из граней (б). Цифры у кривых соответствуют различной ориентации грани с впадиной, отмеченной серым цветом, по отношению к направлению колебаний, показанному стрелками. Результаты расчета показаны сплошными линиями, экспериментальные данные — символами. Числами у ребер указаны их длины в мм.

колебаний. Кривая 1 с минимальной резонансной частотой (8.1 Гц) получена для случая положения впадины на боковой грани, ориентированной перпендикулярно направлению колебаний. Максимальное (10.3 Гц) значение резонансной частоты получилось при положении грани с впадиной наверху (4). Кривые 2 и 3 были измерены, когда впадина располагалась соответственно на нижней грани и на боковой грани, ориентированной параллельно направлению колебаний. По резонансной кривой 3 были определены значения сдвигового модуля полимера (5 кПа) и коэффициента сдвиговой вязкости (3 Па с). Это было сделано в соответствии с тем фактом, что резонансная частота очень слабо зависит от ширины резонатора. Указанные значения сдвигового модуля и коэффициента сдвиговой вязкости были использованы при вычислениях методом конечных элементов резонансных кривых, показанных на рис. 5,б сплошными линиями. Неполное совпадение измеренных и рассчитанных кривых можно объяснить неточной геометрией модельной впадины. Для достижения лучшего совпаде-

ния следует использовать сетку с меньшим размером элементов, что требует существенно большего времени на вычисление. Следует отметить, что реальная впадина несимметрична, поэтому измеренные значения резонансной частоты получаются немного различными даже в случае одинаковой ориентации грани с впадиной по отношению к направлению колебаний. Так, если поворачивать резонатор с впадиной на верхней грани (положение 4) вокруг вертикальной оси, то резонансная частота изменяется в пределах 5%.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

В [1] было показано, что по измерениям резонансных кривых резонатора из резиноподобного полимера можно получить достоверную информацию о значениях сдвигового модуля и коэффициента сдвиговой вязкости полимера в области низких частот. Это в свою очередь позволяет определить спектр времен релаксаций и построить адекватную реологическую модель полимера,

что важно для определения его внутренней структуры. В [2] данный подход был применен для резонаторов со слоистыми структурами. Однако полученные результаты базировались на использовании одномерной модели, когда толщина резонатора считалась значительно меньшей его поперечных размеров. При проведении измерений мы всегда имеем дело с резонаторами конечных размеров, поэтому было важно определить область применимости одномерной модели. В настоящей работе показано, что если толщина однородного резонатора в четыре и более раз меньше его длины, то его резонансная частота отличается не более чем на 4%, что можно условно считать границей применимости одномерной модели. Отметим, что измерения в [1] были выполнены с резонатором, у которого толщина в 5 раз меньше его длины, поэтому результаты вычислений в рамках одномерной модели с хорошей точностью соответствовали экспериментальным данным.

Вычисления стоячих волн в резонаторе конечных размеров выполнялись с использованием метода конечных элементов, который был модифицирован для случая несжимаемых сред. Модификация заключалась в снятии ограничения на сохранение объема отдельно взятого конечного элемента при его деформации. Вместо этого требовалось, чтобы объем сохранялся у группы конечных элементов. Это позволило обойти проблему объемной блокировки. Тестирование реализованного алгоритма вычислений производилось по соответствию результатов, полученных МКЭ с аналитическими результатами для резонатора в виде слоя и экспериментальными данными. Метод конечных элементов позволяет рассчитать резонансные характеристики резонаторов произвольной формы и при наличии в них неоднородностей сдвигового модуля.

Современные методы эластографии мягких биологических тканей решают задачи нахождения пространственного распределения неоднородностей сдвигового модуля по смещению частиц под действием низкочастотных вибраций. При этом рассматриваются неоднородности типа кисты, представляющей собой пузырек, заполненный жидкостью, либо твердые опухоли (solid tumors в англоязычной литературе), как правило, более жесткие, чем окружающая здоровая ткань. Представляется интересным изучить влияние такого типа неоднородностей на резонансные частоты резонатора. Оказалось, что жесткие включения повышают, а полости, заполненные жидкостью, снижают резонансные частоты. Пустые полости могут как снижать, так и повышать резонансную частоту в зависимости от их положения и относительного объема. Если полость находится в области больших сдвиговых деформаций, то

ее присутствие снижает резонансную частоту, поскольку снижается эффективная упругость резонатора. В области малых деформаций снижение упругости уже не существенно, и больше влияет снижение погонной массы в области расположения неоднородности, что приводит к росту резонансной частоты. Эти эффекты были продемонстрированы на примере первой и второй резонансной частот, на которых пространственное распределение сдвиговой деформации различно. В частности, при расположении полостей вблизи верхней пластины, значение первой резонансной частоты может быть выше, а второй резонансной частоты оказаться ниже соответствующих значений в однородном резонаторе без полостей.

Эффективность модифицированного метода конечных элементов продемонстрирована на примере расчета резонансных кривых резонатора неправильной формы. Резонатор имел форму прямоугольного параллелепипеда с выемкой на одной из граней. Относительный объем выемки составлял 7% от объема резонатора, ее профиль имел асимметричный вид. В расчетах использовались значения сдвиговой упругости, полученные из резонансной кривой, измеренной при положении выемки на грани, параллельной направлению колебаний. Наличие выемки на этой грани приводит к вариации ширины резонатора. Однако наши вычисления показали, что резонансная частота слабо зависит от толщины резонатора, поэтому было сделано предположение о слабом влиянии переменной толщины, связанной с наличием выемки, на частоту. Расчет сдвигового модуля проводился для резонатора в виде прямоугольного параллелепипеда без выемки. Сравнение измеренных резонансных кривых с расчетными показало их хорошее соответствие, что подтвердило правомерность такого подхода. Также как и в случае с неоднородностью в виде ряда полостей, резонансная частота при положении полости наверху выше, чем при ее положении внизу. Это находится в соответствии с предложенным выше объяснением зависимости резонансной частоты от положения полости относительно пучности либо узла деформации в стоячей сдвиговой волне. По измерениям резонансных кривых на кратных резонансных частотах можно определить высоту положения неоднородности в виде полости. Еще более точно это можно сделать при плавном изменении резонансных частот путем изменения массы верхней пластины [1].

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 08-02-00368 и НШ-4590.2010.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев В.Г., Крит Т.Б., Сапожников О.А. Стоячие волны в упругом слое, нагруженном конечной массой // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 190–196.
2. Андреев В.Г., Крит Т.Б., Сапожников О.А. Стоячие сдвиговые волны в слоистых резиноподобных средах // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 5. С. 579–586.
3. Hughes T.J.R. The finite element method. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor L.R. The finite element method. Butterworth-Heinemann, 2000.
5. Bell R.W., Houlsby G.T., Burd H.J. Suitability of three-dimensional finite elements for modeling material incompressibility using exact integration // Communications in Numerical Methods in Engineering. 1993. V. 9. № 4. P. 313–329.
6. Joldes J.R., Wittek A., Miller K. Improved linear tetrahedral element for surgery simulation // Proc. MICCAI. 2006. № 1 P. 54–65.