

УДК 551.466.8

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ НАД НАКЛОННЫМ ДНОМ: НАБЛЮДЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИМ ПРОФИЛОМЕТРОМ

© 2011 г. С. А. Рыбак, А. Н. Серебряный

*Акустический институт имени ак. Н.Н. Андреева*

*117036 Москва, ул. Шверника 4*

*E-mail: rybak@akin.ru; serebryany@hotmail.com*

Поступила в редакцию 26.04.10 г.

Представлены и анализируются экспериментальные данные о распространении уединенных внутренних волн на шельфе Японского моря, полученные с помощью акустического доплеровского профилометра течений (ADCP). Обсуждается процесс их распространения над наклонным дном до подхода волн в прибрежную зону, когда пикноклин удален от дна больше, чем от поверхности моря. В рамках приближения адиабатического инварианта показывается, что высота внутренней волны возрастает по мере подхода к “точке переворота”. Обнаруживается качественное сходство экспериментальных данных с теоретическим результатом.

*Ключевые слова:* акустический доплеровский профилограф течений, обратно рассеянный акустический сигнал, нелинейные внутренние волны, уравнение Кортевега де Вриза, адиабатический инвариант.

Внутренние волны – важнейший фактор, влияющий на значительную изменчивость звукового поля в океане. В последние годы путем проведения обширных натурных экспериментов в шельфовой зоне океана активно исследуется их влияние на распространение акустических сигналов в мелком море [1–3]. Процессы зарождения над материковым склоном и дальнейшего распространения внутренних волн над наклонным дном на шельфе океана к берегу – давно известные явления, которые, несмотря на большое количество посвященных им работ [4–10], в силу своей сложности до сих пор до конца не исследованы. Остаются вопросы как по самому механизму генерации внутренних волн, так и по распространению и разрушению волн. Задача об эволюции внутренних волн, распространяющихся над наклонным дном, решалась многими авторами и в существенной степени проработана с использованием численного моделирования (например, [11–13]). В данной работе мы ставим задачу продемонстрировать возможность исследования динамики нелинейных внутренних волн относительно небольших амплитуд, движущихся по шельфу к берегу на основе натурного эксперимента, с помощью акустического доплеровского профилометра течений. Принимая во внимание небольшие амплитуды наблюдавшихся нами внутренних волн по сравнению с глубиной, с применением адиабатического инварианта, нами также будет предпринята попытка вывода аналитического соотношения для амплитуды распростра-

няющейся внутренней волны, в зависимости от глубины для простой геометрической модели в общих чертах описывающей реальную ситуацию натурного эксперимента.

Относительно недавно нами были получены новые экспериментальные данные о распространении внутренних волн на шельфе (измерения были проведены в Японском море в октябре 2003 г.). Основным инструментом для исследования внутренних волн был акустический доплеровский профилометр течений (ADCP) “Rio Grande 600 kHz”, которым можно проводить измерения не только в штатном режиме сбора информации о течениях в море, но и измерять положение слоя скачка плотности, хорошо видимого на сигналах обратного акустического рассеяния, а следовательно, собирать информацию непосредственно о внутренних волнах. Первые опыты измерений данным прибором различных гидрофизических характеристик и процессов в прибрежной зоне российских морей, а также описание основных принципов работы прибора и его параметров, приводятся в [14].

Нами был осуществлен проход на яхте, оборудованной ADCP, от прибрежной зоны до места на шельфе, где глубина составляла 60 м. Затем яхта развернулась и прошла таким же прямолинейным галсом в обратном направлении. Длина галса составила около 7 км, затраченное время на его прохождение в один конец – более одного часа. Скорость продвижения была по возможности равномерной и лежала в пределах 1.7–2 м/с. Период

Параметры внутренних волн на двух последовательных сечениях

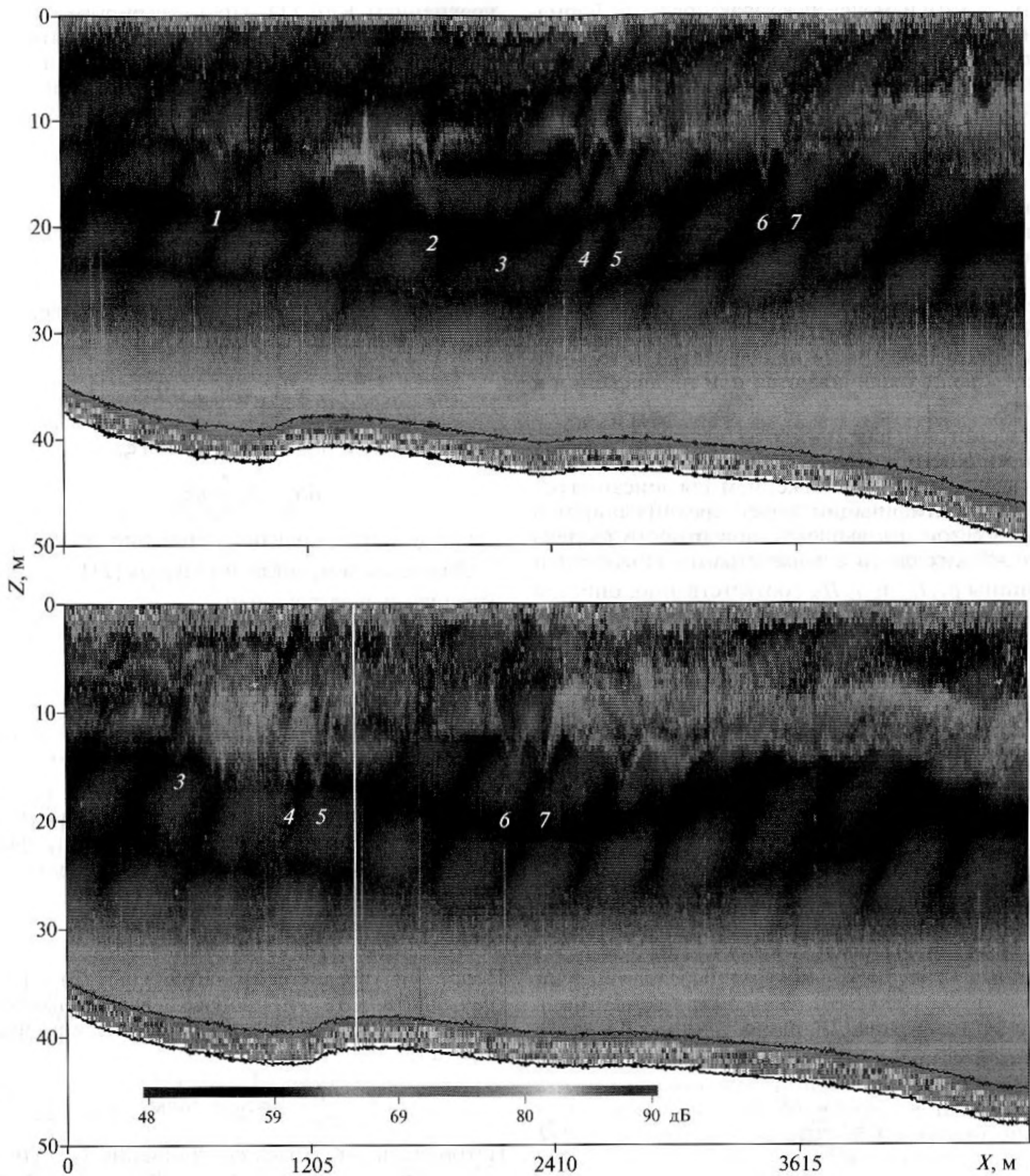
№ волны	$X_1$ , м, положение волны начальное	$X_2$ , м, положение волны конечное	$X_1 - X_2$ , м	Интервал времени между конечным и начальным положением волны, сек.	Скорость волны, м/с	Высота начальная, м	Высота конечная, м
1	807					5	
2	1880					5	
3	2230	531	1699	6032	0.23	4.5	4.5
4	2652	1032	1620	5366	0.24	5	4
5	2829	1179	1650	5203	0.25	4.5	5
6	3549	2148	1401	4897	0.25	4.5	6.5
7	3702	2297	1405	4463	0.26	4	6

посылки сигнала ADCP был 2.86 с, что позволяло иметь разрешение измеряемых параметров среды по горизонтали в 5 м. Разрешение по вертикали ограничивалось вертикальным размером ячейки 0.5 м, в пределах которой в данном ADCP осредняются измеряемые параметры среды.

Прохождение с ADCP на всем галсе выявило наличие хорошо выраженного слоя скачка плотности, расположенного над всем шельфом в приповерхностном слое моря на глубине около 12 м. На галсе были встречены внутренние волны, локализованные около внешнего края шельфа и на шельфе ближе к прибрежной зоне. Внутренние волны в группе у края шельфа имели высоту около 10 м, в то время как волны, распространяющиеся над шельфом ближе к прибрежной зоне, имели высоты 5–7 м. Поскольку встреченные у края шельфа внутренние волны были пересечены нами на галсе и контргалсе последовательно за относительно короткий промежуток времени, то они, естественно, практически не претерпели значительных изменений. В контексте исследования эволюции внутренних волн при их распространении на шельфе, обсуждаемых в данной статье, эта часть экспериментальных данных не представляет большого интереса и не будет обсуждаться. Рассмотрим данные о внутренних волнах, встреченных ближе к берегу. На рис. 1 приведены фрагменты картины записи обратно рассеянного акустического сигнала (коэффициента объемного обратного рассеяния) от поверхности до дна моря для сечений над шельфом на галсе и контргалсе. На обоих сечениях мы видим группу нелинейных внутренних волн – углублений, с заостренными подошвами и выглаженными гребнями. Эта вертикальная асимметрия профилей внутренних волн – широко распространенное свойство интенсивных внутренних волн на приповерхностных термоклинах морей, указывающая на их нелинейную природу [15–17]. На первом сечении видна последовательность из семи уединенных внутренних волн, причем первые три

волны (номера 1, 2, 3) разнесены на большее расстояние друг от друга, чем последующие (номера 4, 5, 6, 7). Последние четыре волны объединены в две характерные пары уединенных внутренних волн (волны обозначены номерами 4, 5 и 6, 7). На втором сечении, которое проводилось спустя почти 2 ч после измерений на первом, количество наблюдаемых нами волн сократилось до пяти: первые две волны за период съемки ушли к берегу за пределы нашего разреза. Остальные пять волн также существенно продвинулись к берегу: они сместились на дистанцию от 1400 до 1700 м. Параметры внутренних волн, полученные на основании разрезов с помощью ADCP, приведены в таблице. По моментам времени встречи каждого значительного волнового образования на двух последовательных галсах и их местоположений, была вычислена средняя скорость передвижения каждой отдельной внутренней волны. При этом принималось во внимание следующее. Направление нашего сечения совпадало с осью север-юг, и таким образом оно совпадало с генеральным направлением движения внутренних волн к берегу. Однако на основании длительных измерений пространственных спектров внутренних волн в прибрежной зоне этого района, проведенных ранее [18], мы знаем о среднестатистическом направлении движения цугов. Оно составляет  $325^\circ$  отн. N. Учитывая это, мы ввели поправку на измеренную скорость движения волн, а также определили длину внутренних волн, вернее, горизонтальный размер волны (поскольку мы имеем дело с уединенными волнами). Как видно из приведенных в таблице данных о скорости, волны, приближаясь к мелководью, уменьшают свою скорость с 0.26 м/с до 0.23 м/с. Горизонтальный размер волн лежит в пределах 90–180 м. Кажущийся период внутренних волн составлял 60–90 с.

Теперь обратимся к наиболее интересующему нас параметру – высоте волн. Следует признать, что высоты движущихся к берегу внутренних волн не претерпели значительных изменений –



**Рис. 1.** Картина эхолокационных контрастов ADCP на двух последовательных разрезах (контргалсах) на шельфе Японского моря: (а) — галс от берега; (б) — галс к берегу. Эхолокационные контрасты (значения коэффициента объемного обратного рассеяния) показаны с использованием шкалы серого цвета, приведенной внизу рисунка. Цифры от 1 до 7 обозначают отдельные внутренние волны. Заметно продвижение нелинейных внутренних волн к берегу (берег слева) за время, прошедшее между сечениями.

вариации высот лежали в пределах 2 м. В волнах в относительно глубокой части разреза прослеживается увеличение высот при их продвижении к берегу (для волны 7 увеличение высоты от 4 м до 6 м, для волны 6 — с 4.5 м до 6.5 м). Для волн в бо-

лее мелководной части разреза эта закономерность слабо выражена: (для волны 5 — увеличение высоты от 4.5 м до 5 м, волна 4, наоборот, уменьшила высоту с 5 м до 4 м, а волна 3 прошла без изменения высоты 4.5 м). Мы можем предполо-

жить, что эти изменения в характере трансформации высот внутренних волн в относительно мелководной части разреза связаны здесь с небольшим увеличением глубины дна в прибрежной зоне по сравнению с остальной частью шельфа. Напоминаем, что разрешение по высоте волны, измеряемое данной модификацией ADCP, составляет 0.5 м, поэтому полученные нами оценки высот наблюдаемых волн хотя и находятся на грани возможностей прибора, тем не менее, достаточно доказательны, в первую очередь, для более глубоководной части разреза, где изменение высоты волны достигало 1.5–2 м, и где мы имеем качественное подтверждение теории, изложенной в следующей части нашей статьи, о том, что высоты волн увеличиваются при их движении к берегу.

Рассмотрим для простоты двухслойную модель жидкости, которая во многих случаях является адекватным приближением для описания реальной стратификации морей средних широт в летний сезон. Возвышение поверхности раздела двух жидких слоев с параметрами плотности и толщины  $\rho_1, H_1$  и  $\rho_2, H_2$ , соответственно, опишем уравнением КдВ [19, 20]:

$$\eta_t + c\eta_x + \alpha\eta\eta_x + \beta\eta_{xxx} = 0. \quad (1)$$

Введем новые переменные:

$$\alpha\eta = \zeta, \quad x - ct - wt = \xi,$$

в этом случае

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{d\zeta}{d\xi}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{d\zeta}{d\xi}(c + w);$$

и из уравнения (1) следует уравнение в полных производных:

$$-w\frac{d\zeta}{d\xi} + \zeta\zeta_\xi + \beta\zeta_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) при постоянных  $\beta$  и  $w$ :

$$\begin{aligned} \zeta(\xi) &= \zeta_0 \operatorname{ch}^{-2}[\gamma\xi]; \\ \gamma &= \left(\frac{\zeta_0}{12\beta}\right)^{1/2}; \\ w &= \frac{\zeta_0}{3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение (3) запишем для истинного возвышения  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= \eta_0 \operatorname{ch}^{-2}[\sigma\xi]; \\ \sigma &= (\alpha\eta_0/12\beta)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

При медленно меняющихся коэффициентах уравнения (1), согласно теории Уизема [21], сохраняется адиабатический инвариант  $I$ . Определим его для волновых процессов, описываемых

уравнением КдВ (1). Проинтегрируем один раз уравнение (2) по  $\xi$ , полагая коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  константами, затем приравняем постоянную интегрирования к нулю (следуя теории солитонов), получим уравнение типа уравнения квазиосциллятора с потенциалом вида:

$$\begin{aligned} \Pi &= \alpha\frac{\eta^3}{6} - w\frac{\eta^2}{2}; \\ \beta\eta_{\xi\xi} + \alpha\frac{\eta^2}{2} - w\eta &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Динамическому уравнению (5) соответствует лагранжиан

$$L = \beta\frac{\eta_\xi^2}{2} - \alpha\frac{\eta^3}{6} + w\frac{\eta^2}{2}. \quad (6)$$

Варьируя интеграл действия  $S$  по  $\xi$ ,

$$\delta S_\xi = \delta_\xi \int L d\xi, \quad (7)$$

мы, разумеется, получим уравнение (5).

Далее, введем, согласно Уизему [21], усредненный лагранжиан

$$\langle L \rangle = \int_0^\varphi L d\theta, \quad \theta = \sigma\xi. \quad (8)$$

При этом параметры  $\alpha$  и  $\beta$  продолжаем считать константами.

Подчеркнем, что для периодических процессов  $\eta(\xi)$  верхний предел интегрирования в (8) равен  $2\pi$ . В данном же случае масштаб интегрирования может определяться размером солитона.

$$\langle L \rangle = \beta\sigma^2\frac{\eta_0^2}{2} - \frac{\eta_0^3}{6} + w\frac{\eta_0^2}{2}, \quad \sigma = \frac{\partial\theta}{\partial\xi}. \quad (9)$$

Подставив усредненный лагранжиан (9) в интеграл действия  $S$  (7) и, произведя варьирование по  $\theta$ , получим выражение для адиабатического инварианта  $I$ :

$$I = \frac{\partial L}{\partial \sigma} = \beta\sigma\eta_0^2 = \text{const}. \quad (10)$$

Нетривиальный смысл соотношения (10) состоит, как известно, в том, что параметры  $\beta$  и  $\sigma$  могут теперь медленно меняться вдоль  $\xi$ , что приводит к эволюции амплитуды солитона  $\eta_0$ . Критерий “медленности” изменения указанных параметров можно определить следующим образом:

$$L_0 = \left(\frac{1}{\beta\sigma} \frac{\partial\beta\sigma}{\partial\xi}\right)^{-1}, \quad L_0 \gg d, \quad (11)$$

где  $d$  – характерный размер солитона:

$$d \approx \frac{1}{\sigma}.$$

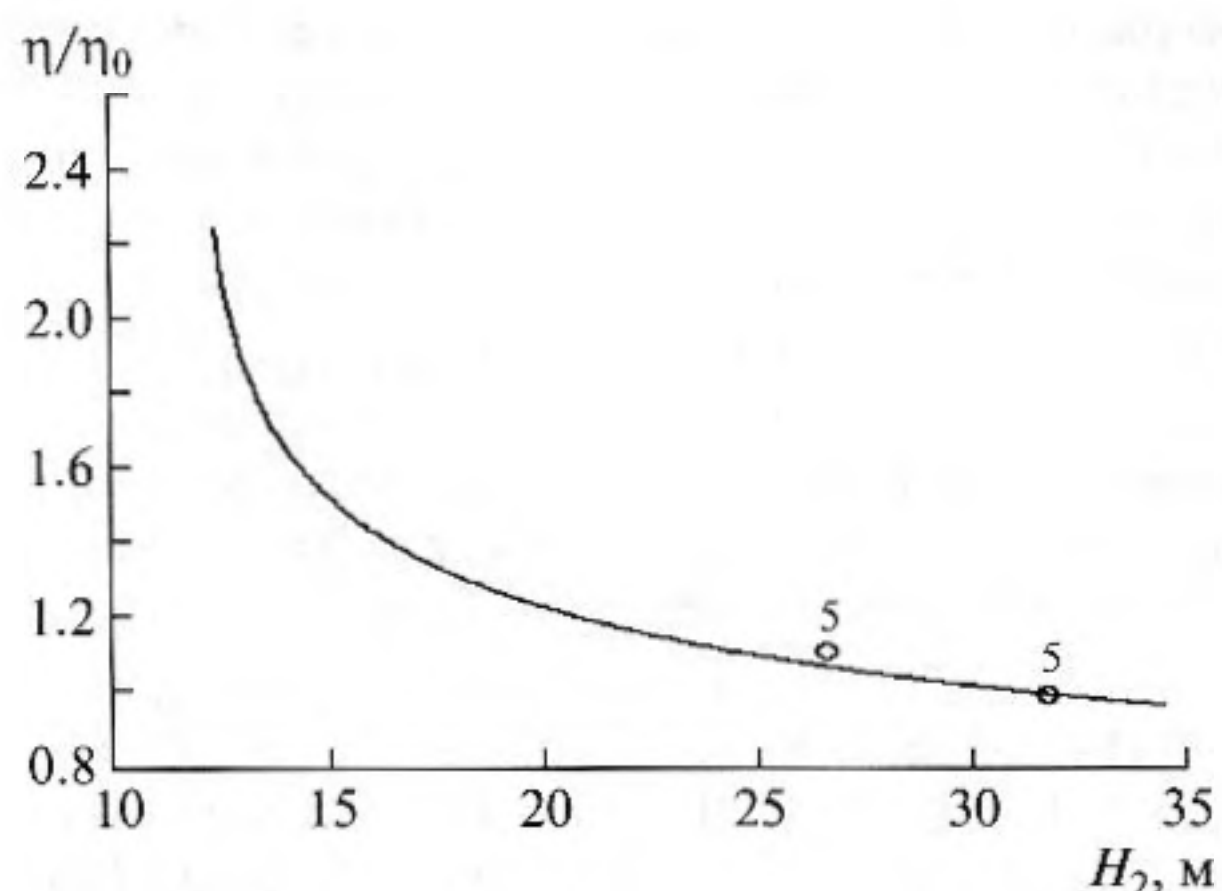


Рис. 2. Зависимость высоты волны от глубины моря (толщины слоя  $H_2$ ) до точки переворота и сопоставление с экспериментальными данными для волны 5.

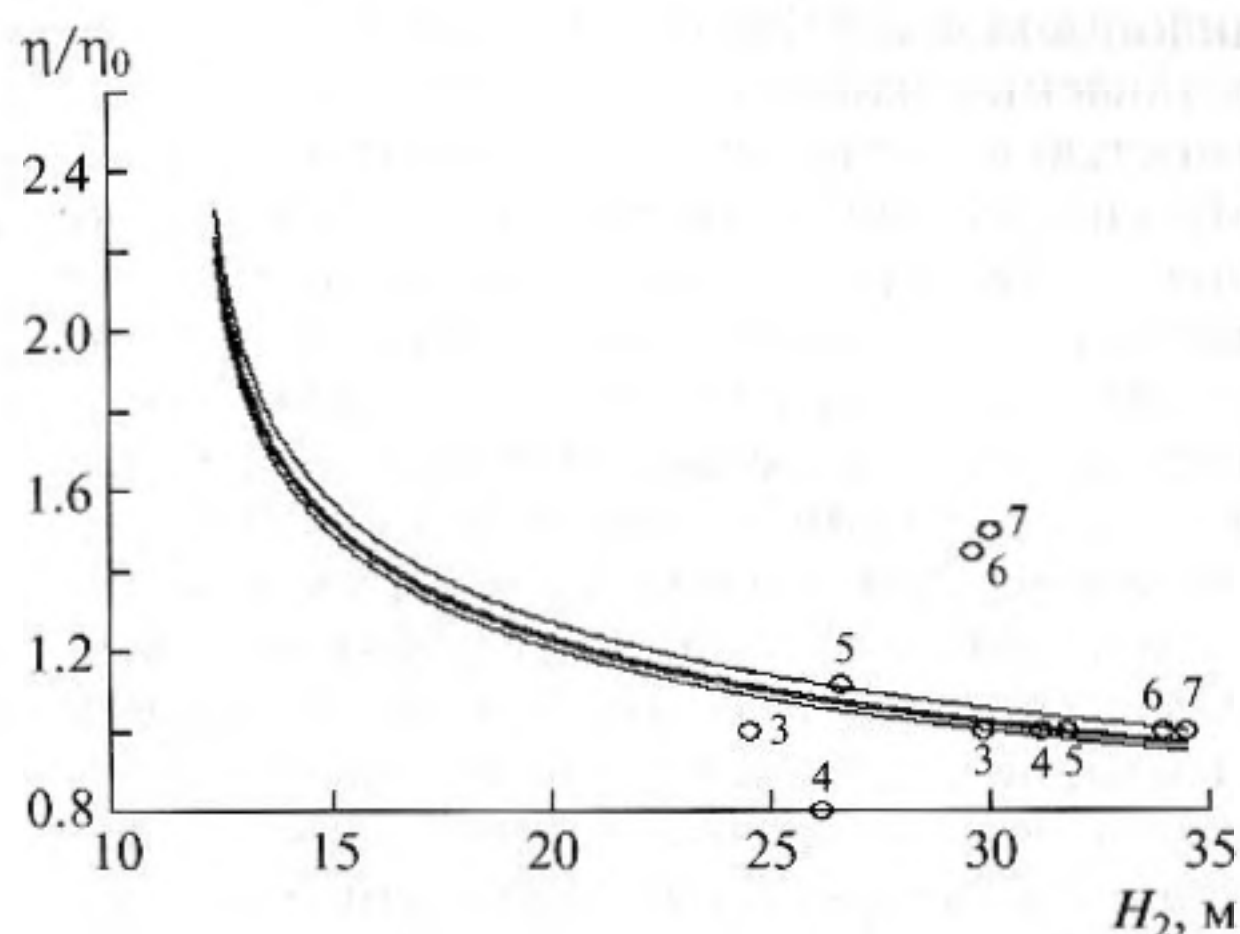


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для всех волн, наблюдавшихся на разрезах (волны 3–7).

Следовательно, условие (11) принимает вид:

$$\frac{1}{\beta\sigma^2} \frac{\partial(\beta\sigma)}{\partial\xi} \ll 1. \quad (12)$$

Для внутренней волны в двухслойной жидкости [19–20, 22]:

$$\alpha = \frac{3c\Delta H}{2H_1H_2}, \quad \beta = c \frac{H_1H_2}{6}, \quad c = \left( g_1 \frac{H_1H_2}{H_1 + H_2} \right)^{1/2}, \quad (13)$$

$$g_1 = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\langle \rho \rangle}, \quad \Delta H = \frac{\rho_2 H_2 - \rho_1 H_1}{\langle \rho \rangle} \approx H_2 - H_1.$$

Из соотношений (2–13) следует важное соотношение для эволюции амплитуды солитона внутренней волны в шельфовой зоне:

$$\eta_0(\xi)/\eta_0(0) \propto S(\xi)/S(0), \quad S = \left[ g_1 \frac{(H_1 + H_2)}{\Delta H(H_1H_2)} \right]^{1/5}. \quad (14)$$

Критерием применимости адиабатического приближения (12) является, очевидно, выполнение условия

$$\frac{1}{\sigma(\xi)\eta_0(0)} \frac{\partial\eta_0(\xi)}{\partial\xi} = \frac{1}{\sigma(\xi)S(0)} \frac{\partial S(\xi)}{\partial\xi} \ll 1. \quad (15)$$

Несложный анализ показывает, что этот критерий нарушается при приближении к точке изменения полярности солитона – точке “переворота”, когда

$$\Delta H = 0. \quad (16)$$

В указанной области шельфовой зоны классическое уравнение КдВ (1) неприменимо и необходим учет дополнительных членов, что корректнее осуществить, обратившись к исходным уравнениям гидродинамики. В то же время в области, где выполняется условие (16), нелинейность становится пренебрежимо малой, что облегчает решение задачи.

Для частного случая поверхностного солитона в водоеме с медленно меняющейся глубиной  $h(x)$  и постоянной плотностью, согласно [19] получим:

$$\alpha = \frac{3c}{2h}; \quad \beta = \frac{ch^2}{6}; \quad c = \sqrt{gh} \quad (17)$$

$$\sigma = \left( \frac{\alpha\eta_0}{12\beta} \right)^{1/2}.$$

Применив критерий адиабатичности (10), получим:

$$\eta_0 \propto h^{-2/5}. \quad (18)$$

Полученная зависимость не совпадает с известной зависимостью  $h^{-1}$  из работы [23], в связи с тем, что обратно пропорциональная зависимость амплитуды поверхностной волны от глубины работает для поверхностных волн с амплитудами, сопоставимыми с глубиной.

Таким образом, полученное аналитическое решение (14) задачи для случая двухслойной жидкости над наклонным дном указывает на рост амплитуды внутренней волны при ее движении от больших глубин к меньшим. Особенно значительным должен быть рост амплитуды внутренней волны при ее подходе к точке переворота, месту, где слой скачка плотности равноудален как от поверхности, так и от дна моря.

Теперь обратимся к экспериментальным результатам и сопоставим их с полученным аналитическим решением. Сначала, используя формулу (14), оценим, насколько значительными, согласно теории, должны были быть изменения высоты волны для нашего конкретного случая. При этом, основываясь на наших экспериментальных данных, мы задаем параметры модели следующими: толщина верхнего слоя  $H_1 = 12$  м;

наклон дна = 0.0078. На рис. 2 и 3 приведено сопоставление наблюдений с теоретической зависимостью высоты внутренней волны от пройденного ей расстояния по горизонтали (от глубины моря). Также приведены точки, соответствующие нашим наблюдениям в море. Первое, что мы отмечаем, это хорошее совпадение увеличения высоты волны 5 с теоретическим предсказанием (рис. 2). Дальнейшее сопоставление (см. рис. 3) обнаруживает, что наблюдаемое возрастание высот внутренних волн в более глубоководной части шельфа (волны 7 и 6) существенно больше предсказываемого теорией. В то же время, согласно теоретическому предсказанию, наибольшее возрастание амплитуд волн происходит в более мелководной части разреза, но в наблюдаемых нами данных (волны 3 и 4) эта закономерность не отмечается. Причину этого мы связываем с отличием реального профиля дна от рассматриваемого в модели. В частности, как уже указывалось, в мелководной части шельфа, куда распространяются внутренние волны, отмечается небольшое углубление. В заключение отметим, что в данной работе мы рассмотрели случай распространения над наклонным дном внутренних волн, для которых справедливо приближение адиабатического инварианта, т.е. для волн относительно небольших амплитуд. В реальной среде возможны выходы на океанский шельф внутренних волн больших амплитуд и в этом случае ситуация меняется кардинальным образом. Так в работе [24] было показано, что уединенная внутренняя волна большой амплитуды (высота 14 м при глубине места 33 м), распространяясь со стороны материкового склона к берегу, при подходе к точке переворота уменьшает амплитуду. Детальное численное моделирование процесса распространения над наклонным дном внутренних уединенных волн малых и больших амплитуд, выполненное в работах [25, 26], также подтверждает основную закономерность о том, что волны относительно небольших амплитуд при подходе к точке переворота увеличивают свою амплитуду, в то время как волны больших амплитуд, наоборот, ее уменьшают. Подтверждение данного свидетельства можно найти также в работе [27].

Итак, на примере измерений на шельфе Японского моря нами была продемонстрирована возможность исследования процессов распространения над наклонным дном нелинейных внутренних волн с помощью акустического доплеровского профилометра. Также была рассмотрена идеализированная модель распространения над наклонным дном слабонелинейных внутренних волн, описывающая движущиеся на шельфе в сторону берега внутренние волны-углубления до их подхода к точке переворота. В рамках применения адиабатического инварианта аналитически показано, что в этом случае внутренние волны

при распространении в мелководную зону увеличивают свою амплитуду. Приведенные данные наблюдений внутренних волн, зарегистрированных на морском шельфе, качественно подтверждают выведенную теоретическую зависимость.

В заключение отметим, что близкие к рассмотрению в настоящей статье проблемы, связанные с ролью внутренних волн в акустике мелкого моря, уже обсуждались на страницах Акустического журнала (см., например, [28], [29]).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты № 08-02-00505, № 08-02-00952) и № 07-02-92003\_ННС, а также Программы поддержки ведущих научных школ России (грант НШ-745.2008.2). Фирма TRD Instruments-Europe оказала нам неоценимую поддержку, безвозмездно выделив прибор "Rio Grande 600 kHz" на время проведения экспедиционных работ в море.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Apel J.R., Badiéy M., Berson J. et al.* An overview of the 1995 SWARM shallow-water internal wave acoustic scattering experiment // *IEEE Journ. Oceanic Engineering*. 1997. V. 22. P. 465–500.
2. *Lynch J.F., Ramp S.R., Chiu C.-S. et al.* Research highlights from the Asian Seas International Acoustics Experiment in the South China sea // *IEEE Journ. Oceanic Engineering*. 2004. V. 29. № 4. P. 1067–1074.
3. *Lynch J.F., Tang D.* Overview of Shallow Water 2006 // *JASA EL Special Issue*. 2008. V. 124. № 3. P. EL63–EL65.
4. *Holloway P.E.* Internal hydraulic jumps and solitons at a shelf break region on the Australian North West shelf // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 92(C5). P. 5405–5416.
5. *Иванов В.А., Коняев К.В., Серебряный А.Н.* Группы интенсивных внутренних волн в шельфовой зоне моря // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1981. Т. 17. № 12. С. 1302–1309.
6. *Иванов В.А., Серебряный А.Н.* Короткопериодные внутренние волны в прибрежной зоне бесприливного моря // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1985. Т. 21. № 6. С. 648–656.
7. *Серебряный А.Н.* Внутренние волны над шельфом и вблизи материкового склона по данным буксируемого распределенного датчика температуры // *Океанология*. 1987. Т. 27. № 2. С. 225–226.
8. *Сабинин К.Д., Серебряный А.Н.* "Горячие точки" в поле внутренних волн в океане // *Акуст. журн.* 2007. Т. 53. № 3. С. 410–436.
9. *Colosi J.A., Beardsley R.C., Lynch J.F.* 2001. Observations of nonlinear internal waves on the outer New England continental shelf during summer Shelfbreak Primer study // *J. Geophys. Res.* Vol. 106(C5). P. 9587–9601.
10. *Liu A.K., Chang Y.S., Hsu M.-K., Liang N.K.* Evolution of nonlinear internal waves in the East and South China Seas // *J. Geophys. Res.* 1998. V. 103 (C4). P. 7995–8008.

11. *Helfrich K.R., Mellville W.K.* On long nonlinear internal waves over slope-shelf topography // *Journal of Fluid Mechanics*. 1986. V. 167. P. 285–308.
12. *Holloway P.E., Pelinovsky E.N., Talipova T.G.* A generalized Korteweg-de Vries model of internal tidal transformation in the coastal zone // *J. Geophys. Res.* 1999. V. 104 (C8). P. 18338–18350.
13. *Small J.R., Hornby R.P.* A comparison of weakly and fully non-linear models of the shoaling of a solitary internal wave // *Ocean Modelling*. 2005. V. 8. P. 395–416.
14. *Серебряный А.Н.* Опыт использования акустического доплеровского измерителя течений // *Акустика неоднородных сред. Ежегодник Российского акустического общества. Труды научной школы проф. С.А. Рыбака. М.: МФТИ, 2003. С. 155–167.*
15. *Серебряный А.Н.* Эффекты нелинейности во внутренних волнах на шельфе // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1990. Т. 26. № 3. С. 285–293.
16. *Серебряный А.Н.* Проявление свойств солитонов во внутренних волнах на шельфе // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 1993. Т. 29. № 2. С. 244–252.
17. *Serebryany A.N.* Steepening of the leading and back faces of solitary internal waves-depressions and its connections with tidal currents // *Dyn. Atmos. Oceans*. 1996. V. 23. № 1–4. P. 2075–2091.
18. *Серебряный А.Н.* Внутренние волны в прибрежной зоне приливного моря // *Океанология*. 1985. Т. 25. № 5. С. 744–751.
19. *Osborne A.R., Burch T.L.* Internal solitons in the Andaman Sea // *Science*. 1980. V. 208. P. 451–460.
20. *Ostrovsky L.A., Stepanyants Yu.A.* Do internal solitons exist in the ocean? // *Rev. Geophys.* 1988. V. 27. P. 293–310.
21. *Whitham G.B.* *Linear and Nonlinear Waves*. 1974. Wiley, NY, 636 p.
22. *Коняев К.В., Сабинин К.Д.* *Волны внутри океана*. С-Петербург: Гидрометеоиздат. 1992. 272 с.
23. *Островский Л.А., Пелиновский Е.Н.* Трансформация волн на поверхности жидкости переменной глубины // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1970. Т. 6. № 9. С. 934–939.
24. *Серебряный А.Н., Пао Ш.П.* Прохождение нелинейной внутренней волны через точку переворота на шельфе // *Доклады РАН*. 2008. Т. 420. № 4. С. 543–547.
25. *Small J.* A nonlinear model of the shoaling and refraction of internal solitary waves in the ocean. Part I: development of the model and investigations of the shoaling effect // *J. Phys. Oceanogr.* 2001. V. 31. P. 3163–3183.
26. *Small J.* Refraction and shoaling of nonlinear internal waves at the Malin shelf break // *J. Phys. Oceanogr.* 2003. V. 33. P. 2657–2674.
27. *Vlasenko V., Ostrovsky L., Hutter K.* Adiabatic behavior of strongly nonlinear internal solitary waves in slope-shelf areas // *J. Geophys. Res.* 2005. V. 110, C04006, doi:10.1029/2004JC002705.
28. *Белов А.Н., Журавлев В.А., Серебряный А.Н.* Особенности вариаций звукового поля, вызванных интенсивными внутренними волнами в мелком море со слабым термоклином // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 2. С. 165–171.
29. *Рыбак С.А., Серебряный А.Н.* О генерации звука внутренним бором // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 6. С. 773–775.