

УДК 542.34

ВОЗБУЖДЕНИЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ВЕРТИКАЛЬНОЙ РЕШЕТКОЙ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ В ОКЕАНИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

© 2011 г. И. П. Смирнов, В. Г. Бурдуковская, А. Г. Кошкин, А. И. Хилько

Институт прикладной физики РАН

603950 Н. Новгород, ул. Ульянова 46

E-mail: A.khil@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 9.02.10 г.

Приводятся результаты экспериментов по возбуждению совместных колебаний в системе погруженных в жидкость электромагнитных излучателей, имеющих форму жестких цилиндров с кольцевыми упругими мембранами в торцах. Строится математическая модель антенны, образованной данной совокупностью звуковых излучателей. Взаимодействие излучателей учитывается через добавочные давления, оказываемые на каждую из мембран возбуждаемыми соседними излучателями звуковыми волнами. Учитываются также вариации давлений заполняющих цилиндры газов и их влияние на колебания мембран. Выводится система интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с запаздываниями по времени, описывающая вынужденные совместные колебания излучателей. В гармоническом случае получены решения системы. Для верификации модели и уточнения ее параметров производится сравнение численных расчетов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: излучатели, коллективные колебания, математическое моделирование.

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ЗАДАННОГО АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА РЕШЕТКЕ АКУСТИЧЕСКИХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

При диагностике неоднородностей океана в пределах протяженных акваторий методом гидроакустической (ГА) томографии [1–3] используются низкочастотные импульсные сигналы. Для излучения подобных сигналов применяются вертикально развитые антенные решетки излучателей, на апертуре которых формируются амплитудно-фазовые распределения (АФР), обеспечивающие возбуждение хорошо распространяющихся в океане полевых структур [4–8]. В глубоком море в качестве такого рода структур могут выступать совокупности (пачки) слабо взаимодействующих с поверхностью и дном мод, локализующиеся на тех глубинах океанического волновода, в которых располагаются наблюдаемые неоднородности [6–8]. В мелком море оптимальным вариантом является возбуждение маломодовых импульсов, переносимых небольшой группой относительно слабозатухающих мод волновода (маломодовая импульсная томография — МИТ [9, 10]).

Вопросы выбора оптимальных АФР для излучающих в океанические волноводы решеток рассматривались в целом ряде работ (задача синтеза ГА полей; см., например, [11–15]). В частности, в [11–14] рассматривались задачи синтеза АФР,

обеспечивающих наиболее эффективное возбуждение группы мод, локализованных в заданном интервале глубин волновода. В достаточно общей постановке указанная задача решалась также в [15] методами теории оптимального управления распределенными системами.

Определение силовых воздействий на излучатели, обеспечивающих формирование заданных АФР, представляет собой отдельную непростую задачу, сложность которой обусловлена взаимным влиянием излучателей. Для решения этой задачи на практике часто используются итерационные процедуры [16], осуществляющие последовательную настройку излучателей с помощью датчиков, измеряющих их колебания. В частности, в экспериментальных работах [17, 18] для настройки решетки низкочастотных (НЧ) излучателей электромагнитного типа использовались встроенные в излучатели акселерометры. Сама процедура настройки осуществлялась в три этапа. Сначала измерялись частотные и рабочие характеристики отдельных излучателей, причем измерения производились предварительно, до объединения излучателей в решетку. При этом учитывались различия в условиях, в которых предстояло работать каждому из излучателей, а именно, внешнее статическое давление, определяемое глубиной расчетного погружения. На следующем этапе определялась матрица комплексных коэффициентов взаимодействия излучателей в погружен-

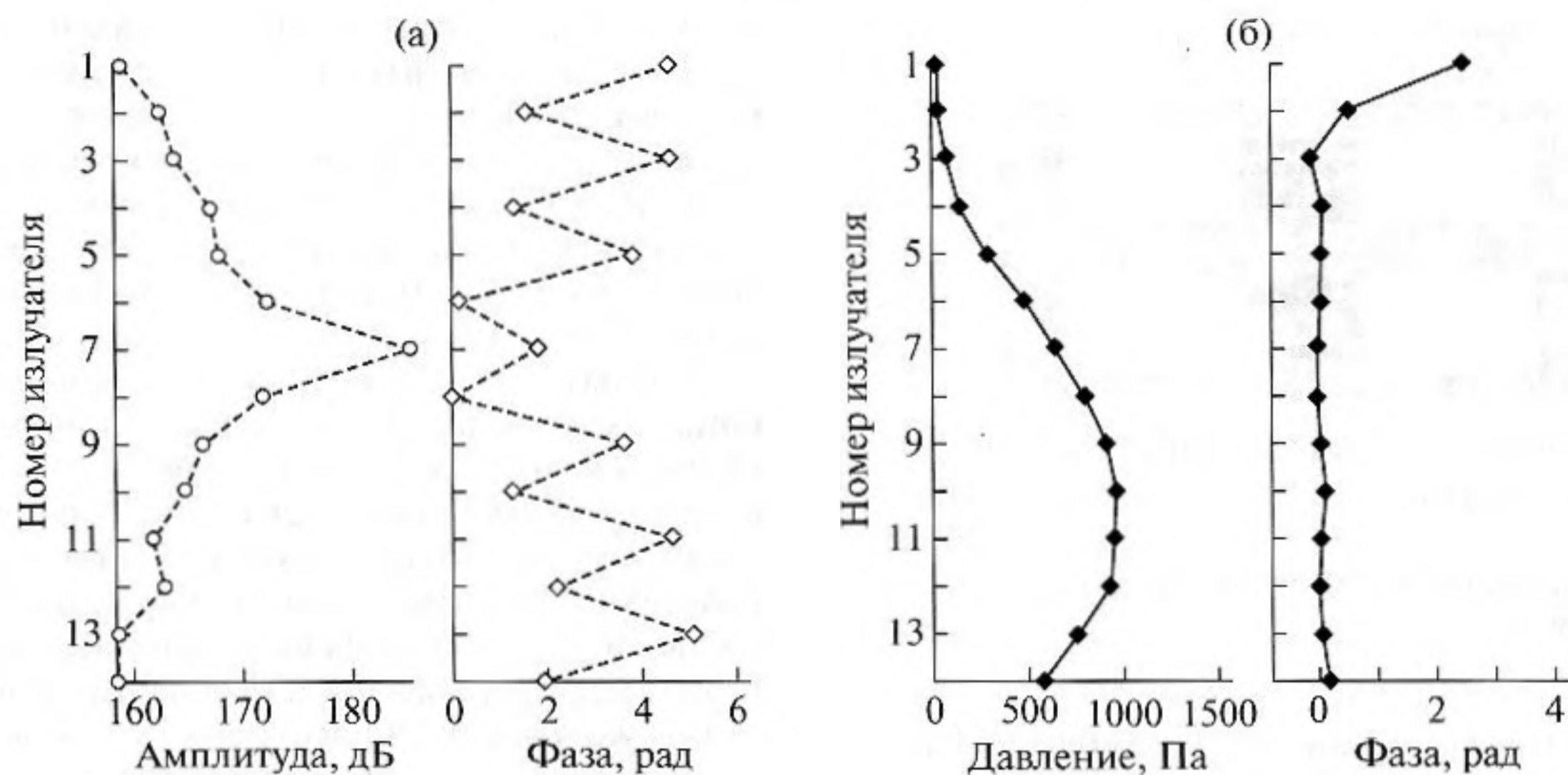


Рис. 1. Результаты экспериментов по настройке вертикальной решетки электромагнитного типа НЧ излучателей при возбуждении соответствующих первой моде ГА импульсов частотой 248 Гц в придонном волноводе (летняя гидрология) в мелком море глубиной 120 м ((а) – распределение амплитуд и фаз колебаний мембран излучателей при включении лишь одного излучателя с номером семь; (б) – распределения давлений и фаз в результате настройки решетки излучателей для возбуждения первой моды волновода).

ной в жидкость решетке. Для этого последовательно включался каждый из излучателей, и измерялись возникающие из-за влияния ГА поля колебания остальных излучателей. Наконец, на третьем этапе выполнялся итерационный поиск комплексных коэффициентов возбуждения элементов излучающей решетки, обеспечивающих необходимое АФР. На каждом шаге итерационного поиска измерялась невязка между требуемыми и установившимися колебаниями излучателей, и на следующем шаге поиска выбирались возбуждения, уменьшающие невязку. Останавливался процесс поиска тогда, когда АФР с заданной точностью соответствовало искомому. Сходимость итерационного процесса и скорость сходимости определялись как возможностью формирования заданного распределения на данной решетке, так и близостью начального приближения к нему. Признаком невозможности формирования данного распределения служило обычно закливание или хаотический характер итерационного процесса.

На рис. 1 приведены результаты натурных экспериментов по настройке вертикальной решетки НЧ излучателей электромагнитного типа вышеописанным итерационным методом [17]. В экспериментах осуществлялось возбуждение импульсов с несущей частотой 245 Гц, соответствующих первой моде придонного волновода в мелководной акватории Балтийского моря при глубине места в 120 м. Вертикальная решетка из 14 излучателей выставлялась с борта научно-исследовательского судна. Излучатели располагались в интервале глубин от 60 метров с шагом в

3 метра. Как видно из результатов измерений амплитуд и фаз колебаний мембран излучателей при включении лишь одного (седьмого) излучателя, уровень взаимного влияния излучателей оказался достаточно большим (рис. 1а). Соседние излучатели в решетке возбуждались практически в противофазе. В результате настройки излучающей решетки на возбуждение первой волноводной моды и выполнения условий компенсации взаимного влияния излучателей в экспериментах были получены распределения амплитуд и фаз колебаний, представленные на рис. 1б. При этом для обеспечения 5%-й точности амплитудно-фазовой настройки излучающей решетки потребовалось от 50 до 100 шагов итерационного поиска необходимых сигналов управления. Эксперименты показали также, что точность настройки зависит от мощностей, подаваемых на излучатели, то есть от положений точек на рабочих характеристиках. Поскольку характеристики излучателей становятся нелинейными при малых и больших амплитудах колебаний мембран, управление излучателями оказывалось неустойчивым при таких амплитудах. В частности, для возбуждения первой моды часть излучателей должна была работать на малой мощности. При этом управление фазами излучателей оказывалось неустойчивым, и необходимой точности настройки фазы добиться не удавалось (излучатели малых номеров на рис. 1б). Аналогично этому потеря устойчивости управления проявлялась при увеличении мощности, когда на другие излучатели должна была подаваться слишком большая мощность [17–21].

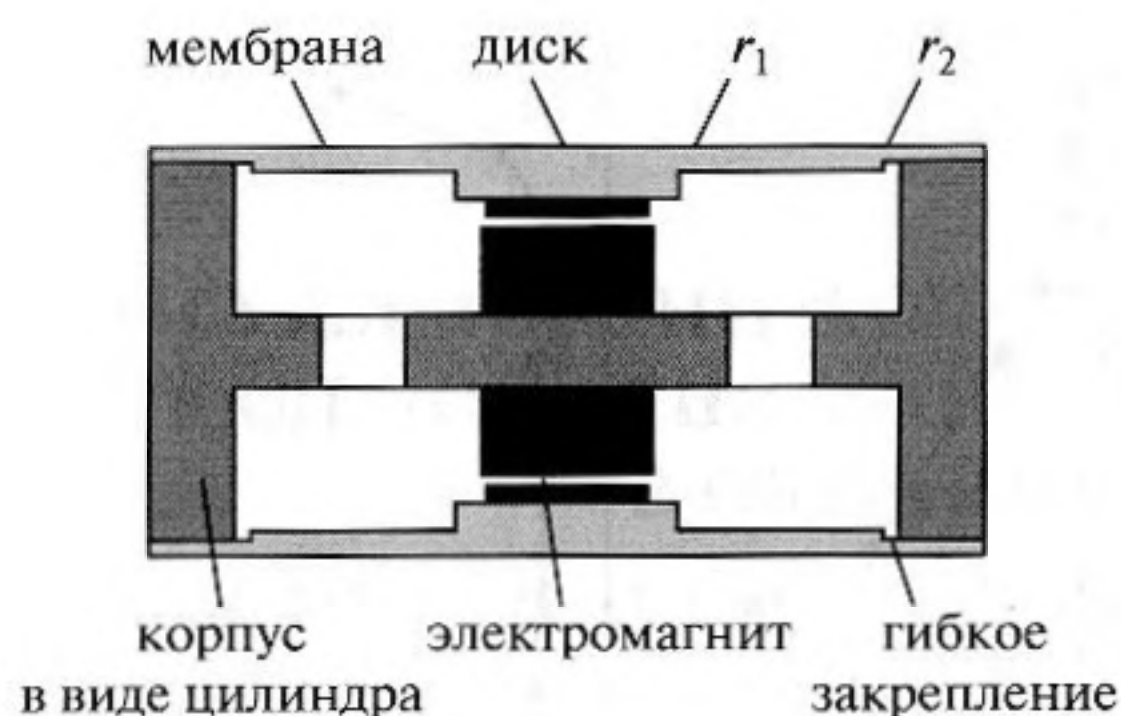


Рис. 2. Схема акустического излучателя электромагнитного типа.

Эксперименты выявили еще один фактор, учет которого необходим при селективном возбуждении зондирующих сигналов в океанических волноводах. Он связан с вариациями формы решетки, возникающими из-за подводных течений. При постановке стационарной решетки на дно вертикальность ее формы обеспечивается с помощью донного груза и естественной плавучести излучателей. В результате подводных течений решетка отклоняется от вертикали и принимает произвольную форму. Кроме того, она медленно вращается вокруг вертикальной оси [22, 23]. В зависимости от длины и конструктивных особенностей решетки и скорости течений отклонения излучателей в горизонтальной плоскости могут составлять 5–10 м, а в вертикальной – 2–3 метра. Вариации положений излучателей приводят к изменению их взаимного влияния. Кроме того, при колебаниях решетки эффективность селективного возбуждения различных мод становится функцией азимутального угла [24–26], так что оптимальное АФР можно сформировать только для одного из горизонтальных углов зондирования. Поэтому для качественного согласования колеблющейся излучающей решетки с океаническим волноводом необходимо периодически ее перенастраивать. При этом должны использоваться данные о текущей форме решетки и взаимодействии ее элементов. Для получения подобной информации в реальном времени необходимо использовать специальные методы и оборудование, например, ВЧ акустическую подсистему позиционирования, либо систему инклинометров. Для измерения коэффициентов взаимодействия излучателей наклоненной решетки необходимо осуществлять их попеременное включение и измерение колебаний остальных. При этом процедура настройки становится сложной и длительной.

Возбуждение согласованных с океаническими волноводами НЧ ГА импульсов наиболее эффективно при использовании вертикально ориентированных решеток излучателей, перекрывающих

большую часть волновода. Однако в этом случае излучатели находятся на разных глубинах и подвергаются различному сжатию статическим давлением жидкости. В излучателях электромагнитного типа это вызывает уменьшение зазоров между катушками и магнитами, смещает рабочие точки на частотных характеристиках и приводит к смещению резонансных частот. Для устранения указанных явлений осуществляется соответствующая компенсация давлений газа в излучателях. Однако при этом заполняющие излучатели газы изменяют свои плотности, что в свою очередь смещает резонансные частоты. Излучатели электромагнитного типа обычно имеют высокую добротность на центральной частоте. Вследствие этого смещения резонансных частот могут привести к существенной расстройке частотных характеристик излучателей и к падению мощности импульсов, излучаемых решеткой. Устранение указанных явлений достигается использованием в каждом излучателе специального клапана, который регулирует давление в излучателе. Для компенсации влияния изменчивости плотности газа в излучателях регулирующие давление клапаны должны располагаться на определенном расстоянии по глубине от излучателя. Такого рода регулировку решетки излучателей достаточно сложно осуществить, поскольку необходимо иметь устройство перемещения клапанов по глубине относительно излучателей.

Анализ наблюдаемых при работе решетки НЧ ГА излучателей эффектов может быть осуществлен с помощью математического моделирования совместных колебаний излучателей в жидкости с учетом конструктивных особенностей излучающих элементов антенны. С практической точки зрения результаты такого моделирования могут быть использованы при выборе оптимальных параметров излучающих решеток. Кроме того, использование модели для выбора начальных приближений при итеративном поиске распределений, необходимых для возбуждения заданных полей, может привести к существенному ускорению сходимости итерационных процессов.

РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ РЕШЕТКИ

Излучатель электромагнитного типа представляет собой заполненный газом цилиндр с жесткими боковыми стенками, на торцах которого крепятся упругие кольцевые мембраны (рис. 2). Внутренние границы мембран закреплены на жестких центральных дисках, а внешние – на цилиндрической оболочке излучателя. Излучатель помещается в жидкость и испытывает на себе гидростатическое давление, зависящее от глубины погружения. Для его нормальной работы требует-

ся компенсация давления окружающей жидкости, что осуществляется посредством заполнения цилиндров газом под соответствующим давлением. Колебания торцевых мембран инициируются колебаниями центральных дисков, которые, в свою очередь, обеспечиваются пространственно неоднородным электромагнитным полем, формирующимся располагающимися внутри цилиндра катушками с переменным током, сердечники которых притягивают диски. Колебания мембран возбуждают акустические волны в окружающей водной среде и в заполняющем излучатель газе. Исследованию колебаний подобных излучателей посвящен ряд как теоретических, так и экспериментальных работ [16–20, 27–31].

При изучении коллективных колебаний излучателей часто ограничиваются приближением взаимодействующих монополей, характеризуя взаимное влияние излучателей эмпирической матрицей взаимодействия [16, 31]. Мы построим более сложную модель, рассматривая отдельный излучатель как жесткий цилиндр с закрепленными в торцах тонкими кольцевыми мембранами, колебания которых инициируются движением жестких центральных дисков. В реальных условиях взаимодействие излучателей в процессе их работы происходит как через их взаимное облучение, так и через общую схему электропитания, но в предлагаемой ниже модели учитывается только первый фактор. Полагая, что излучатели в решетке располагаются на достаточно больших расстояниях от поверхности и дна океана, будем пренебрегать влиянием границ, а также считать, что скорость распространения звука в пределах антенной решетки постоянна.

Уравнения совместных колебаний излучателей. В качестве колеблющихся элементов НЧ электромагнитного излучателя выступают его торцы, состоящие из центральных жестких дисков и соединяющих их с корпусом упругих мембран. Рассмотрим колебания торцов в условиях их погружения в неограниченную жидкую среду, оказывающую сопротивление, пропорциональное скорости (вязкое трение). Помимо вязкости учтем также такие реакции среды на колебания как возникновение со-колеблющейся (присоединенной) массы жидкости и отвод части энергии колебаний возбуждаемыми ими в жидкости акустическими волнами (сопротивление излучения).

Уравнение радиально симметричных колебаний помещенной в вязкую жидкость тонкой мембраны имеет вид [32]

$$\rho_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_m D^2 u - p_{(vis)} - p_{(rct)} \quad (1)$$

Здесь $u(r, t)$ – отклонения в момент времени t от положения равновесия точек мембраны, удаленных от ее центра на расстояние r , D^2 – линейный

однородный дифференциальный оператор второго порядка по радиальной переменной r , определяемый поперечным профилем толщины мембраны, $\rho_m(r)$ – поверхностная плотность массы мембраны, T_m – натяжение мембраны, $p_{(vis)}(r, t) = R_{(vis)}(r) \frac{\partial}{\partial t} u(r, t)$ – поверхностная плотность силы вязкого трения, $p_{(rct)}(r, t)$ – поверхностная плотность силы реакции среды, которую можно записать в спектральной форме [33]

$$p_{(rct)}(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (R_{(ac)m}(r, \omega) + i\omega \rho_{(in)m}(r, \omega)) i\omega u(r, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2)$$

где i – мнимая единица, $R_{(ac)m}(r, \omega)$, $\rho_{(in)m}(r, \omega)$ – соответственно активная и реактивная (инерционная) составляющие поверхностной плотности акустического импеданса мембраны, $u(r, \omega)$ – спектральная плотность $u(r, t)$.

Введем линейные операторы $P_{(ac)m}$, $P_{(in)m}$, действующие на произвольную функцию времени $v(\cdot)$ по правилам

$$\begin{aligned} P_{(ac)m}[v(\cdot)](r, t) &= F^{-1} [R_{(ac)m}(r, \cdot) F[v(\cdot)]], \\ P_{(in)m}[v(\cdot)](r, t) &= F^{-1} [\rho_{(in)m}(r, \cdot) F[v(\cdot)]], \end{aligned} \quad (3)$$

где F , F^{-1} – операторы прямого и обратного преобразования Фурье по переменной t , соответственно. Используя (3), запишем давление (2) в операторной форме

$$p_{(rct)}(r, t) = P_{(ac)m} \left[\frac{\partial}{\partial t} u \right] + P_{(in)m} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} u \right]. \quad (4)$$

Колебания торцов считаем зеркально симметричными относительно плоскостей, проходящих через центры излучателей параллельно основаниям. В этом случае для описания колебаний набора n излучателей в решетке достаточно составить систему из n уравнений, описывающих колебания одного из торцов каждого излучателя. Вводя операторы

$$\begin{aligned} P_1^{(i)}[\cdot] &\equiv R_{(vis)}^{(i)} + P_{(ac)m}^{(i)}[\cdot], \\ P_2^{(i)}[\cdot] &\equiv \rho_m^{(i)} + P_{(in)m}^{(i)}[\cdot], \end{aligned}$$

запишем уравнение колебаний i -й мембраны в форме

$$\begin{aligned} P_2^{(i)} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} u^{(i)} \right] &= T_m^{(i)} D_{(i)}^2 u^{(i)} - \\ &- P_1^{(i)} \left[\frac{\partial}{\partial t} u^{(i)} \right] + Q_{(in)}^{(i)}(t) - Q_{(out)}^{(i)}(t). \end{aligned}$$

В этом уравнении, в дополнение к (1), учтены как вариации давления заполняющего излучатель га-

за $Q_{(in)}^{(i)}(t)$, так и суммарное давление $Q_{(out)}^{(i)}(t)$ приходящих от других излучателей звуковых волн.

Объем излучателя в момент времени t представим в форме

$$V^{(i)}(t) = V_0^{(i)} + 4\pi V_i[u^{(i)}(\cdot, t)],$$

где $V_0^{(i)} = \pi(r_2^{(i)})^2 h^{(i)}$ — невозмущенный объем цилиндра, $h^{(i)}$ — его высота, $V_i[\cdot]$ — пропорциональный вариациям объема излучателя линейный функционал, действующий на функцию $u(r)$ по правилу

$$V_i[y(\cdot)] \equiv \int_{r_1^{(i)}}^{r_2^{(i)}} r y(r) dr + \frac{(r_1^{(i)})^2}{2} y(r_1^{(i)}).$$

Согласно [34, стр. 512], в том случае, когда отношение скорости распространения звука a_g в заполняющем цилиндр газе к скорости a_i поперечных колебаний мембраны $a_g/a_i > 1$, приращение давления заполняющего газа пропорционально уменьшению объема излучателя, и потому

$$Q_{(in)}^{(i)}(r, t) = \rho_{ii} V_i[u^{(i)}(\cdot, t)], \quad (5)$$

где $\rho_{ii} \equiv 4\pi\rho_g a_g^2/V_0^{(i)}$, ρ_g — объемная плотность газа.

Получим выражения для давления $Q_{(out)}^{(i)}(t)$, считая размеры излучателей $l^{(i)}$ малыми в сравнении со средней длиной звуковых волн λ_0 в жидкости. Численное моделирование и эксперименты [20, 29, 30] показывают, что в этом случае на расстояниях между излучателями свыше $\lambda_0/2$ можно с достаточной точностью ограничиться лишь монопольными компонентами ближних полей излучателей. Как показано в [35, стр. 396], потенциал скорости, который создает около мембраны i колеблющийся объем j -го излучателя, на расстояниях $L^{(ij)} \gg l^{(j)}$ равен

$$\psi^{(ij)} = -\frac{\partial V^{(j)}(t-t^{(ij)})}{4\pi L^{(ij)}} = -\frac{1}{L^{(ij)}} V_j \left[\frac{\partial u^{(j)}(\cdot, t-t^{(ij)})}{\partial t} \right],$$

а дополнительное давление, которое создает приходящая звуковая волна,

$$p^{(ij)} = -\rho_0 \frac{\partial \psi^{(ij)}}{\partial t} = -\rho_{ij} V_j \left[\frac{\partial^2 u^{(j)}(\cdot, t-t^{(ij)})}{\partial t^2} \right].$$

Здесь $\rho_{ij} \equiv \rho_0/L^{(ij)}$, $L^{(ij)}$ — расстояние, а $t^{(ij)} = L^{(ij)}/c_0$ — время прохождения звука между мембранами, ρ_0 — объемная плотность жидкости, c_0 — скорость распространения звуковых волн в жидкости.

Суммарное по всем излучателям внешнее звуковое давление, оказываемое на мембрану i ,

$$Q_{(out)}^{(i)}(t) \equiv \sum_{j:j \neq i} p^{(ij)} = \sum_{j:j \neq i} \rho_{ij} V_j \left[\frac{\partial^2 u^{(j)}(\cdot, t-t^{(ij)})}{\partial t^2} \right]. \quad (6)$$

В итоге в указанных приближениях получаем, что совместные радиально симметричные колебания n мембран удовлетворяют следующей системе линейных функциональных уравнений в частных производных с запаздыванием по времени:

$$\begin{aligned} P_2^{(i)} \left[\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial t^2} \right] &= T_m^{(i)} D_{(i)}^2 u^{(i)} - \\ &- P_1^{(i)} \left[\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t} \right] - \rho_{ii} V_i [u^{(i)}(\cdot, t)] - \\ &- \sum_{j:j \neq i} \rho_{ij} V_j \left[\frac{\partial^2 u^{(j)}(\cdot, t-t^{(ij)})}{\partial t^2} \right], \\ t > 0, \quad r_1^{(i)} < r < r_2^{(i)}, \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (7)$$

Для полного описания колебаний мембран необходимо еще задать условия на их границах. На внешних границах $r = r_2^{(i)}$ это (в простейшем случае) условия жесткого закрепления:

$$u^{(i)}(r_2^{(i)}, t) = 0, \quad t > 0. \quad (8)$$

На внутренних границах $r = r_1^{(i)}$, жестко закрепленных на центральных дисках, имеем условие

$$u^{(i)}(r_1^{(i)}, t) = u_i(t), \quad t > 0, \quad (9)$$

где $u_i(t)$ — это отклонение диска в момент времени t .

Согласно второму закону Ньютона, колебания i -го диска описываются уравнением

$$\begin{aligned} M_i \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + \beta_i \frac{d u_i(t)}{dt} &= \\ &= F_{(cl)}^{(i)}(t) + F_{(mb)}^{(i)}(t) + S^{(i)} (f_{(rct)}^{(i)}(t) + f_{(g)}^{(i)}(t) + f_{(mp)}^{(i)}(t)), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$F_{(cl)}^{(i)}(t) \equiv F^{(i)}(t, u_i(t))$$

— сила, действующая на диск со стороны электромагнита,

$$F_{(mb)}^{(i)}(t) = 2\pi r_1^{(i)} T_m^{(i)} \frac{\partial u^{(i)}(r_1^{(i)}, t)}{\partial r}$$

— сила со стороны мембраны,

$$f_{(rct)}^{(i)}(t) = -P_{(ac)d}^{(i)} \left[\frac{d u_i}{dt} \right] - P_{(in)d}^{(i)} \left[\frac{d^2 u_i}{dt^2} \right]$$

— плотность силы реакции со стороны жидкости,

$$f_{(g)}^{(i)}(t) = -\rho_{ii} V_i [u^{(i)}(\cdot, t)]$$

— давление заполняющего излучатель газа,

$$f_{(mp)}^{(i)}(t) = -\sum_{j:j \neq i} \rho_{ij} V_j \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} u^{(j)}(\cdot, t - t^{(ij)}) \right]$$

– давление звука, приходящего от других излучателей, M_i – масса диска, $\beta_i = R_{(vis)} S^{(i)}$ – коэффициент силы вязкого трения диска в жидкости, $S^{(i)} \equiv \pi(r_1^{(i)})^2$ – площадь поверхности диска.

Определяющие реакцию жидкости операторы $P_{(ac)d}^{(i)}$, $P_{(in)d}^{(i)}$ задаются аналогично (3) с заменой активной и инерционной плотностей акустического импеданса мембраны на соответствующие параметры диска $R_{(ac)d}(\omega)$, $\rho_{(in)d}(\omega)$ (последние для упрощения модели считаем не зависящими от r). Для сил притяжения дисков электромагнитами будем использовать модельные приближения [19], учитывающие зависимость сил от смещений дисков:

$$F^{(i)}(t, u) = \frac{F_0^{(i)}(t)}{1 + \delta_i u^{\gamma_i}}, \quad (11)$$

где $F_0^{(i)}(t)$ – заданные функции времени, а δ_i, γ_i – постоянные параметры.

Задав функции $F_0^{(i)}(t)$ для $t > 0$, можно далее решать задачу определения совместных колебаний излучателей, вынуждаемых указанными силами со стороны электромагнитов. Колебания найдутся как результат совместного решения системы уравнений (7)–(11) с нулевыми начальными отклонениями и скоростями. Указанная система в общем случае является нелинейной вследствие наличия нелинейности в (11).

В случае вынуждающих сил (11), не зависящих от расстояний между закрепленными на дисках катушками и электромагнитами (то есть при $\delta_i = 0$), система (7)–(10) является линейной. Установившееся решение системы в случае гармонического воздействия $F_0^{(i)}(t) \equiv A_i \sin(\omega t + \varphi_i)$, где A_i, ω, φ_i – постоянные параметры, можно искать в виде

$$\begin{cases} u^{(i)}(r, t) = \text{Im} [U^{(i)}(r) \exp(i\omega t)], \\ u_i(t) = \text{Im} [U_i \exp(i\omega t)], \end{cases} \quad (12)$$

где $U^{(i)}(r)$ – комплексная амплитуда колебания точки r мембраны, $U_i = U^{(i)}(r_1)$ – комплексная амплитуда колебания центрального диска.

Подстановка (12) в систему (7)–(10) приводит (после исключения U_i) к следующей краевой за-

даче с граничными условиями смешанного типа для амплитуды $U^{(i)}(r)$:

$$D_{(i)}^2 U^{(i)} + \mu_i^2 U^{(i)} = \mu_i^2 \sum_{j=1}^n q^{(ij)} V_j [U^{(j)}(\cdot)], \quad (13)$$

$$r_1^{(i)} < r < r_2^{(i)},$$

$$\zeta_i U^{(i)}(r_1^{(i)}) + \xi_i \frac{\partial}{\partial r} U^{(i)}(r_1^{(i)}) +$$

$$+ S^{(i)} \sum_{j=1}^n Q^{(ij)} V_j [U^{(j)}(\cdot)] = \bar{A}_i, \quad (14)$$

$$U^{(i)}(r_2^{(i)}) = 0, \quad (15)$$

где

$$\mu_i \equiv \frac{\omega}{a_i} \sqrt{1 - \mathbf{i} \frac{v_i}{\omega}}, \quad a_i^2 \equiv \frac{T_m^{(i)}}{\rho_i},$$

$$v_i \equiv \frac{R_{(ac)m}^{(i)} + R_{(vis)}}{\rho_i}, \quad \rho_i \equiv \rho_m^{(i)} + \rho_{(in)m}^{(i)},$$

$$Q^{(ij)} \equiv \begin{cases} -\omega^2 \rho_{ij} \exp(-\mathbf{i}\omega t^{(ij)}), & i \neq j, \\ \rho_{ii}, & i = j, \end{cases}$$

$$q^{(ij)} \equiv \frac{Q^{(ij)}}{\mu_i^2 T_m^{(i)}}, \quad \xi_i \equiv -2\pi r_1^{(i)} T_m^{(i)}, \quad \bar{A}_i \equiv A_i \exp(\mathbf{i}\varphi_i),$$

$$\zeta_i \equiv \mathbf{i}\omega(\beta_i + S^{(i)} R_{(ac)d}^{(i)}) - \omega^2 (M_i + S^{(i)} \rho_{(in)d}^{(i)}).$$

Если пренебречь зависимостью параметров v_i, ρ_i от r , то и μ_i от r не зависит, а общее решение уравнения $D_{(i)}^2 U + \mu_i^2 U = 0$ можно записать в виде линейной комбинации

$$U_0^{(i)}(r) \equiv C_i^{(1)} \chi_1^{(i)}(\mu_i r) + C_i^{(2)} \chi_2^{(i)}(\mu_i r), \quad (16)$$

где $\{\chi_1^{(i)}, \chi_2^{(i)}\}$ – фундаментальная система решений уравнения $D_{(i)}^2 U + U = 0$, $C_i^{(1,2)}$ – произвольные комплексные постоянные. При тех же предположениях правые части уравнений (13) постоянны, поэтому решение уравнений можно искать в форме

$$U^{(i)}(r) = U_0^{(i)}(r) + U_1^{(i)}, \quad (17)$$

где $U_1^{(i)}$ – постоянные, удовлетворяющие линейной алгебраической системе

$$U_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n q^{(ij)} V_j [U_0^{(j)}(\cdot)] + \sum_{j=1}^n q^{(ij)} V_j [1] U_1^{(j)}, \quad (18)$$

где $V_j[1] = (r_2^{(j)})^2 / 2$.

Введем векторы $C^{(1,2)} = \text{col}\{C_i^{(1,2)}\}$, $U_1 = \text{col}\{U_1^{(i)}\}$, $\bar{A} = \text{col}\{\bar{A}_i\}$, вектор-функцию $U(r) = \text{col}\{U^{(i)}(r)\}$ и матрицы $s^{(0)}, p^{(1,2)}$ с компонентами

$$s_{ij}^{(0)} \equiv \delta_{ij} - q^{(ij)} V_j[1], \quad p_{ij}^{(1,2)} \equiv q^{(ij)} V_j[\chi_{1,2}^{(i)}(\mu_j \cdot)],$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. С помощью (16) систему (18) записываем в матричной форме

$$s^{(0)} U_1 = p^{(1)} C^{(1)} + p^{(2)} C^{(2)},$$

откуда получаем

$$U_1 = s^{(1)} C^{(1)} + s^{(2)} C^{(2)}, \quad (19)$$

где $s^{(1,2)} \equiv (s^{(0)})^{-1} p^{(1,2)}$. Подставляя (19) и (16) в (17), выразим решение краевой задачи (13)–(15) через неизвестные векторы $C^{(1,2)}$:

$$U(r) = (\chi_1(\mu r) + s^{(1)}) C^{(1)} + (\chi_2(\mu r) + s^{(2)}) C^{(2)}, \quad (20)$$

где $\chi_{1,2}(\mu r)$ – это матрицы с компонентами $(\chi_{1,2}(\mu r))_{ij} \equiv \chi_{1,2}^{(i)}(\mu_j r) \delta_{ij}$. После подстановки (20) в граничные условия (14), (15) получаем линейную систему для определения векторов $C^{(1,2)}$:

$$\begin{cases} m^{(11)} C^{(1)} + m^{(12)} C^{(2)} = \bar{A}, \\ m^{(21)} C^{(1)} + m^{(22)} C^{(2)} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

где $m^{(kl)}$ – квадратные матрицы порядка $n \times n$. Решив систему (21), представим решение краевой задачи (13)–(15) в следующей окончательной форме:

$$U(r) = W(r) \bar{A}, \quad (22)$$

где

$$W(r) \equiv (\chi_1(\mu r) + s^{(1)}) K^{(1)} + (\chi_2(\mu r) + s^{(2)}) K^{(2)},$$

$$K^{(1)} \equiv \left(m^{(11)} - m^{(12)} (m^{(22)})^{-1} m^{(21)} \right)^{-1},$$

$$K^{(2)} \equiv - (m^{(22)})^{-1} m^{(12)} K^{(1)}.$$

В случае идентичных излучателей все числа μ_i одинаковы, матрицы $s^{(1,2)}, K^{(1,2)}$ и W – симметрические. Однако и в этом случае при одинаковых амплитудах сил \bar{A}_i амплитуды колебаний отдельных излучателей $U^{(i)}(r)$ могут отличаться друг от друга, так как они зависят еще и от взаимного расположения излучателей в пространстве.

Используя представление решения (22), легко решить задачу о нахождении такого вектора возбуждающих сил \bar{A} , при котором значения ампли-

туд $U^{(i)}(r)$ для заданных “точек приведения” $r = \bar{r}_i$ совпадают с заданными \bar{U}_i . Искомый вектор

$$\bar{A} = \bar{W}^{-1} \bar{U}, \quad (23)$$

где $\bar{W}_{ij} = W_{ij}(\bar{r}_i)$, $\bar{U} \equiv \text{col}\{\bar{U}_i\}$.

Колебания одинаковых излучателей могут обладать симметрией, возникающей вследствие особого расположения излучателей в пространстве. Например, это случай, когда излучатели с номерами от 1 до n расположены последовательно вдоль прямой на равных расстояниях l_0 друг от друга (модель линейной антенны). При этом

$$L^{(ji)} = l_0 |i - j|, \quad t^{(ji)} = t_0 |i - j|, \quad \rho_{ij} = \frac{\rho_0}{l_0} |i - j|^{-1},$$

где $t_0 = l_0/c_0$ – время распространения звука между соседними излучателями. Как легко видеть, элементы матриц $s_{ij}^{(1,2)}$ зависят в этом случае только от $|i - j|$. Если возбуждающие силы одинаковы для равноудаленных от центра цепочки излучателей, то и амплитуды колебаний соответствующих мембран будут совпадать между собой: $U^{(i)}(r) \equiv U^{(n-i+1)}(r)$. Другим частным случаем является колебание одинаковых, одинаково возбуждаемых, одинаково расположенных по отношению друг к другу в пространстве излучателей (симметричное расположение). Примером подобной пространственной конфигурации служит набор из двух одинаковых излучателей, а также излучателей, расположенных в вершинах правильного многогранника в пространстве или в вершинах плоского правильного многоугольника. Во всех случаях для обеспечения симметрии все вершины должны быть заполнены. В этом случае краевая задача (13)–(15) допускает симметричное решение:

$$U^{(i)}(r) \equiv U(r) \equiv \left(J_0(\mu r) + s^{(1)} \right) C^{(1)} + \left(Y_0(\mu r) + s^{(2)} \right) C^{(2)}, \quad (24)$$

где, в отличие от (20), $\mu, U(r), C^{(1,2)}, s^{(1,2)}$ – скаляры, не зависящие от номера мембраны

$$s^{(1)} = \gamma V[\chi_1(\mu \cdot)], \quad s^{(2)} = \gamma V[\chi_2(\mu \cdot)],$$

$$\gamma \equiv \frac{q}{1 - qV[1]}, \quad q \equiv \sum_{j=1}^n q^{(ji)},$$

причем суммы q в силу симметрии от i не зависят. Если при этом еще и расстояния между всеми излучателями совпадают, то $q = q_{11} + (n-1)q_{12}$. Формально (24) можно использовать также и для описания колебаний одиночного излучателя, полагая $n = 1$.

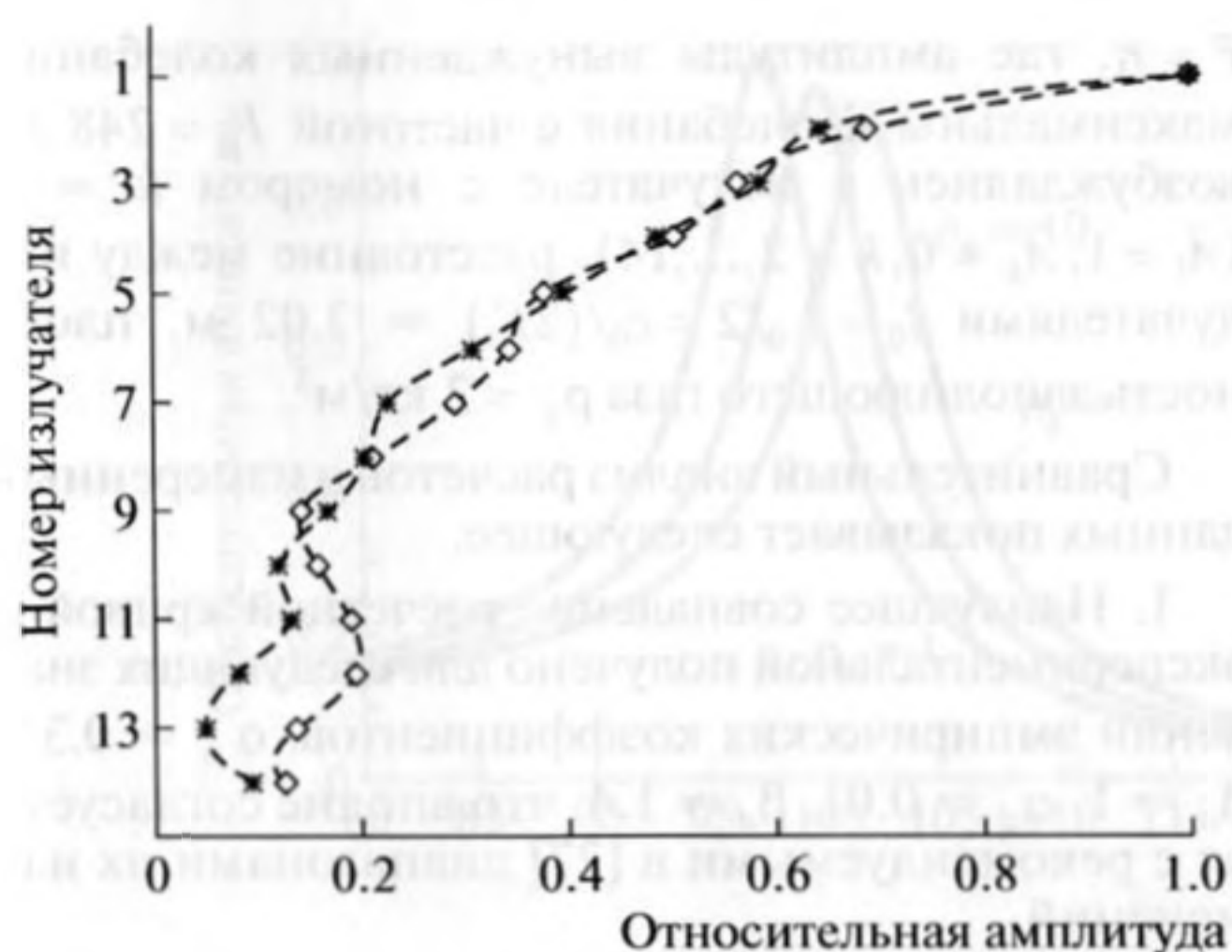


Рис. 3. Сравнение теоретических (звездочки) и экспериментально измеренных (ромбики) относительных амплитуд колебаний при возбуждении только излучателя с номером 1.

Верификация модели. Оценим эффективность построенной выше модели, сравнивая рассчитанные с ее помощью колебания с измеренными в экспериментах [17, 18]. Используем при этом для торцевой мембраны излучателя простейшую модель тонкой однородной кольцевой мембраны [32]: $D^2 = \Delta$, где Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным. Необходимые для расчетов физические параметры подбираем в соответствии с условиями эксперимента [17].

Вязкостью жидкости в расчетах пренебрегаем: $R_{(vis)} = 0$ кг/(см²), $\beta = 0$ кг/с.

Эффективные параметры – плотности $R_{(ac)m}(r, \omega)$, $\rho_{(in)m}(r, \omega)$ распределенного акустического импеданса мембраны – считаем не зависящими от r и определяем по справочным формулам [27, стр. 28, п. 6], отвечающим “закрепленной по внешнему краю в жестком корпусе круглой гибкой пластине радиуса r_2 ”:

$$R_{(ac)m}(\omega) = \alpha_m \frac{1}{9} \frac{\rho_0 \omega^2 r_2^2}{c_0}, \quad \rho_{(in)m} = \beta_m \frac{1}{2\pi} \rho_0 r_2^2 \quad (25)$$

Для аналогичных параметров центрального диска используем справочные формулы [27, стр. 27, п. 5], соответствующие “жесткому диску радиуса r_1 ”:

$$R_{(ac)d} = \alpha_d \rho_0 c_0, \quad \rho_{(in)d} = \beta_d \rho_0 r_1 \quad (26)$$

Формулы (25), (26) определяют эффективные плотности с точностью до безразмерных эмпирических коэффициентов $\alpha_m, \beta_m, \alpha_d, \beta_d$, зависящих от формы колебаний, волновых размеров излучателей и их конструктивных особенностей. Указанные коэффициенты подбираем далее для наилучшего соответствия расчетных и эксперименталь-

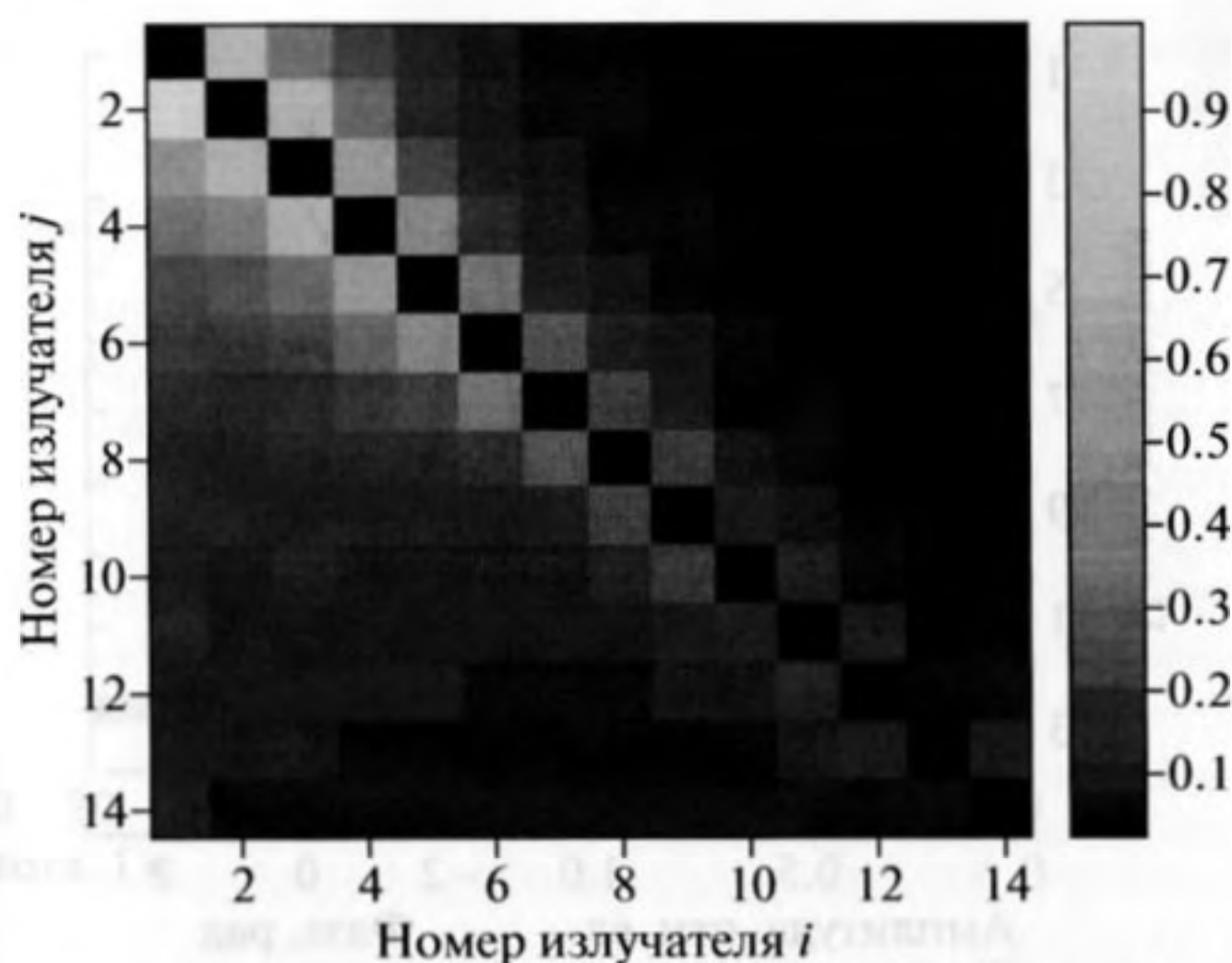


Рис. 4. Расчетное распределение величин, пропорциональных давлениям, оказываемым излучателями друг на друга в режиме установившихся колебаний (матрица взаимодействия). Столбец i : относительные значения давлений волн, приходящих от излучателя i на прочие излучатели.

ных данных (рис. 3) [17]. Натяжение мембраны T_m выбираем в расчетах таким, чтобы минимальная резонансная частота колебаний погруженного в жидкость излучателя f_{min} была близка заданной частоте F_0 . Учитывая, что масса центрального диска M мала в сравнении с полной массой мембраны, используем в качестве оценки для f_{min} минимальную собственную частоту $f_{min}^{(0)}$ колебаний однородной кольцевой мембраны со свободной внутренней и закрепленной внешней границами:

$$f_{min}; \quad f_{min}^{(0)} = a \mu_{min} / 2\pi, \quad (27)$$

где a – скорость распространения поперечных колебаний в мембране, μ_{min} – минимальный положительный корень дискриминанта

$$D_0(\mu) = J_1(\mu r_1) Y_0(\mu r_2) - J_0(\mu r_2) Y_1(\mu r_1),$$

$J_{0,1}, Y_{0,1}$ – функции Бесселя первого и второго родов, соответственно. Отсюда находим приближенно требуемые скорость a ; $2\pi F_0 / \mu_{min}$ и натяжение мембраны $T_m = a^2 \rho$, где $\rho = \rho_m + \rho_{(in)m}$ – эффективная плотность массы мембраны в жидкости.

Таблица

c_0 , м/с	ρ_m , кг/м	ρ_g , кг/м ³	a_g , м/с
1500	20	1–10	330
M , кг	r_1 , м	r_2 , м	h , м
0.5	0.05	0.5	0.4

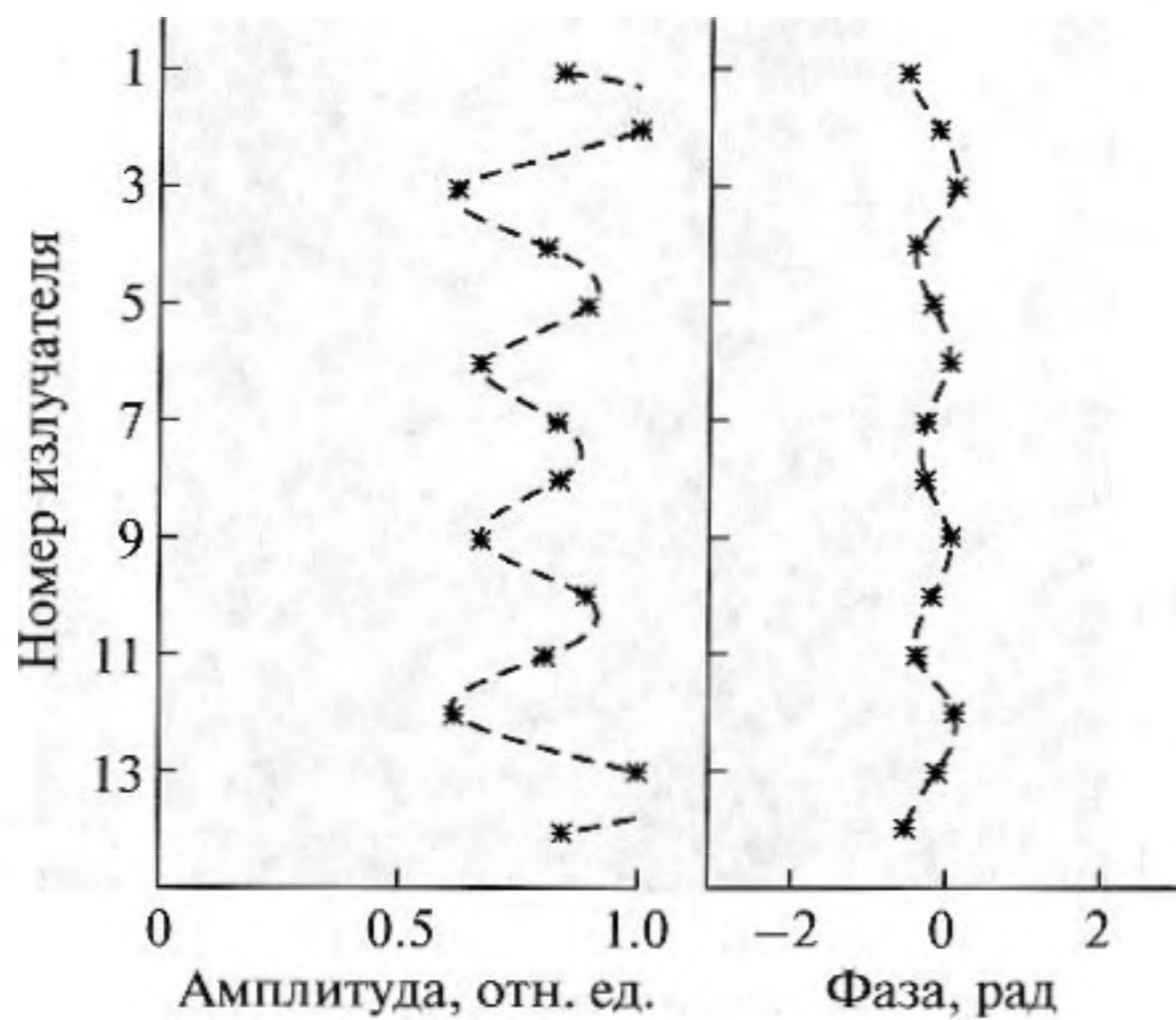


Рис. 5. Относительные амплитуды (слева) и фазы (справа) колебаний центральных дисков при возбуждении излучателей линейной антенны одинаковыми силами.

На рис. 4 сравниваются измеренные в [17] относительные амплитуды колебаний $V_k/\max_k V_k$ линейной цепочки из 14 излучателей и рассчитанные по формуле (22) относительные амплитуды $|U_k| \equiv |U_k(\bar{r})|/\max_k |U_k(\bar{r})|$ колебаний точек приведения. В качестве последних здесь и всюду далее выбирались точки внутренних границ мембран

$\bar{r} = r_1$, где амплитуды вынужденных колебаний максимальны. Колебания с частотой $F_0 = 248$ Гц возбуждались в излучателе с номером $k = 1$ ($\bar{A}_1 = 1, \bar{A}_k = 0, k = 2, \dots, 14$), расстояние между излучателями $l_0 = \lambda_0/2 = c_0/(2F_0) \approx 3.02$ м, плотность заполняющего газа $\rho_g = 2$ кг/м³.

Сравнительный анализ расчетов и измеренных данных показывает следующее.

1. Наилучшее совпадение расчетной кривой с экспериментальной получено для следующих значений эмпирических коэффициентов: $\alpha_m \approx 0.33$, $\beta_m \approx 1$, $\alpha_d \approx 0.01$, $\beta_d \approx 1.4$, что вполне согласуется с рекомендуемыми в [27] диапазонами их изменений.

2. Относительное распределение амплитуд колебаний \bar{U}_k практически не зависит от параметров заполняющего газа: плотности ρ_g и скорости распространения звука a_g . Это означает, что, несмотря на предельный характер выполнения условия применимости приближения (5) для силы реакции газа на данной частоте возбуждения ($a_g/a \approx 1.05$), хорошее совпадение результатов расчетов с измеренными в эксперименте данными позволяет считать найденные выше значения эмпирических коэффициентов приемлемыми для дальнейшего их использования при анализе эффективности модели.

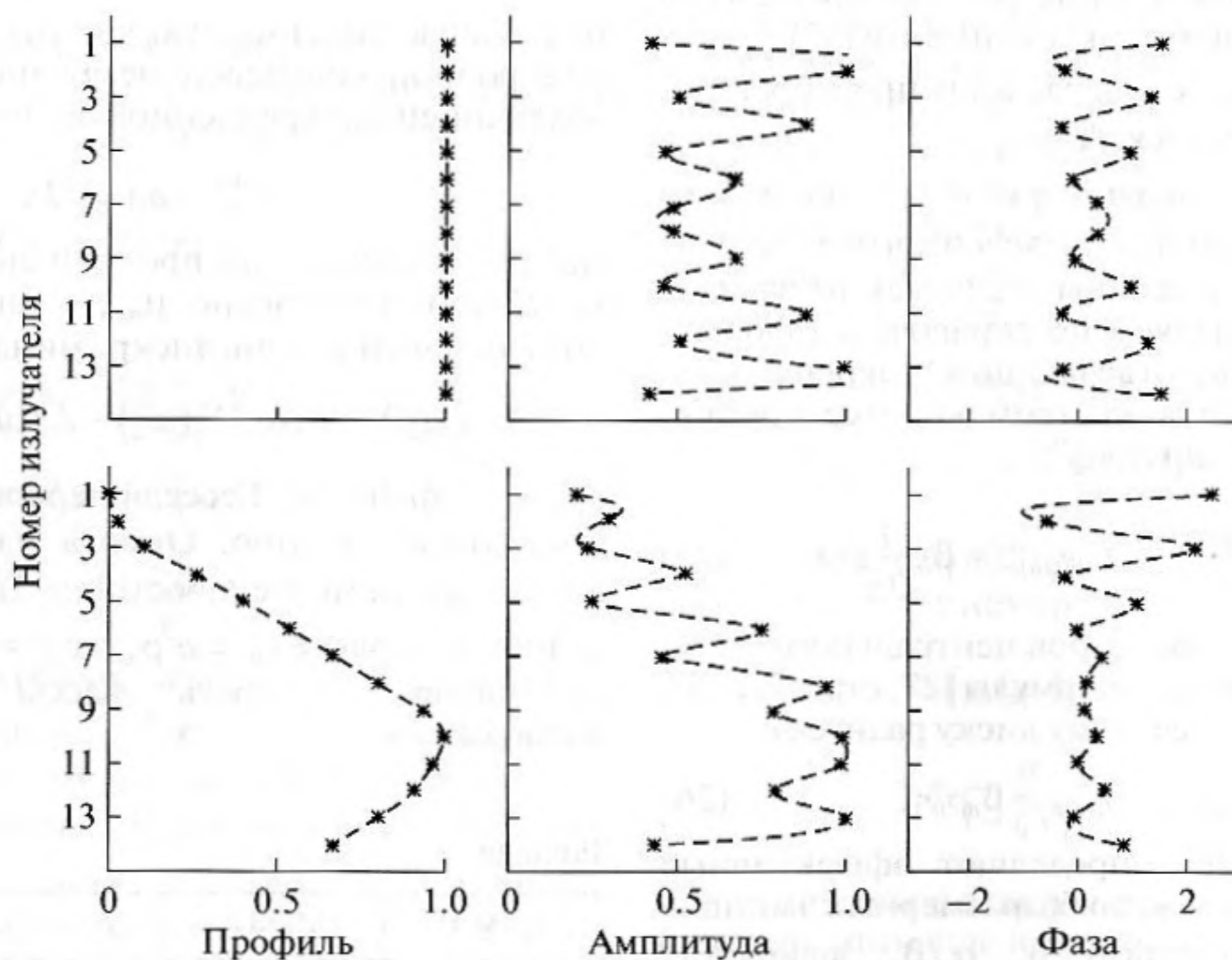


Рис. 6. Решения двух задач по определению сил \bar{A}_k , обеспечивающих заданные профили распределения амплитуд U_k : равномерный (верхний ряд) и пропорциональный первой волноводной моде (нижний ряд). Первый столбец – распределения U_k , второй столбец – амплитуды сил $|\bar{A}_k|$, третий столбец – фазы сил $\arg \bar{A}_k$.

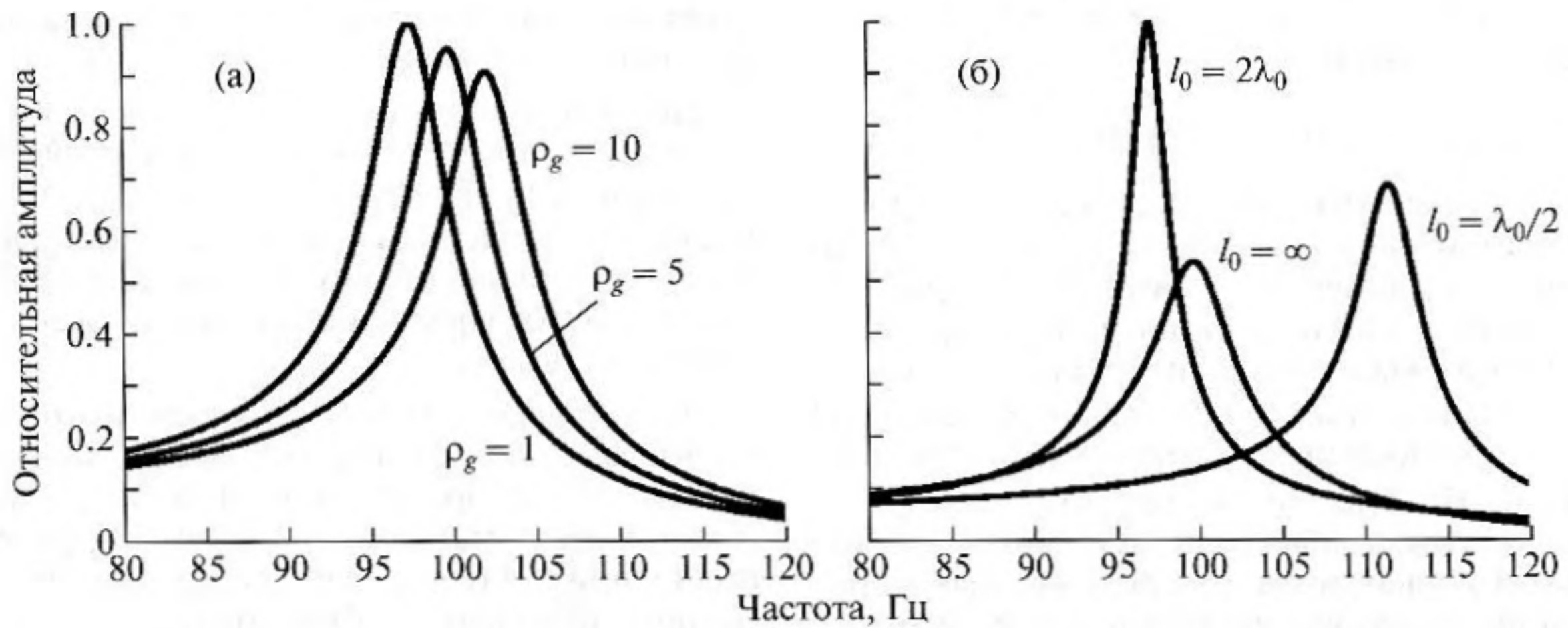


Рис. 7. Резонансные кривые: (а) — одиночного излучателя при различных плотностях ρ_g заполняющего газа; (б) — симметричной группы трех взаимодействующих излучателей при различных расстояниях l_0 между ними.

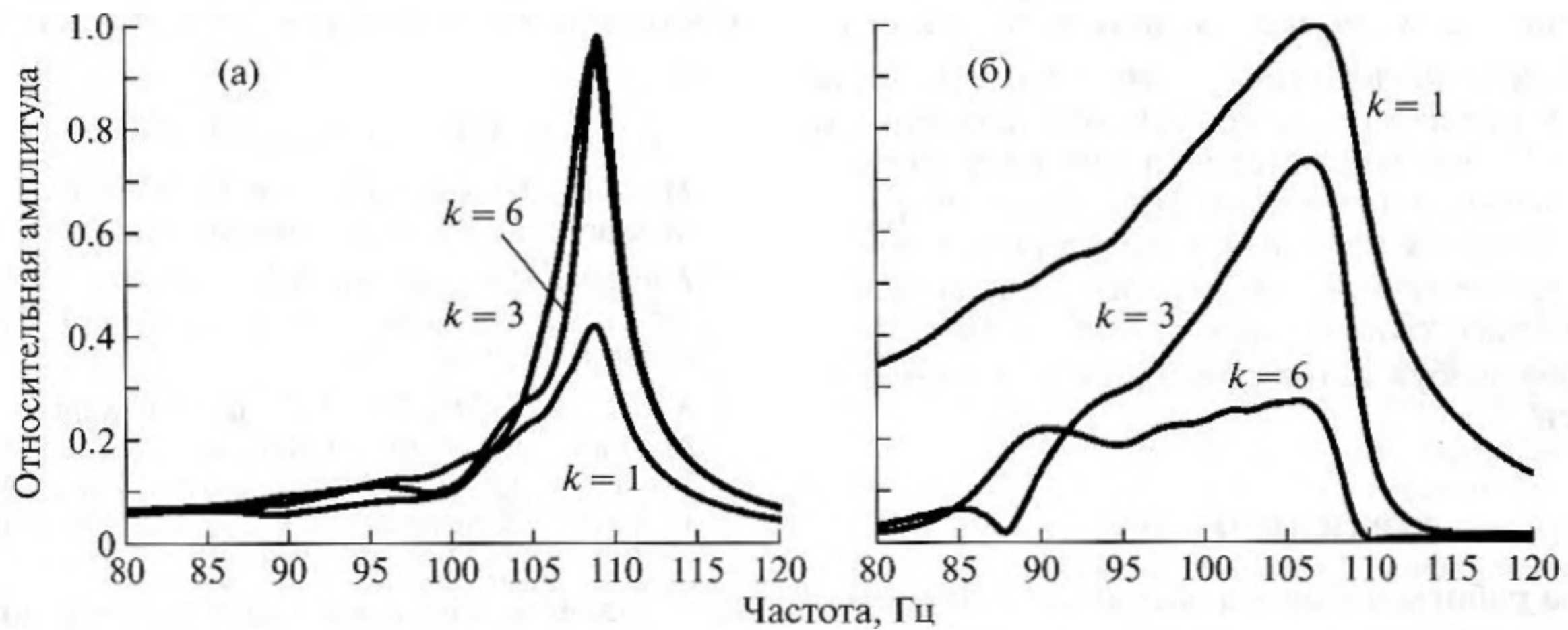


Рис. 8. Резонансные кривые для излучателей с номерами $k = 1, 3, 6$ линейной решетки из 14 элементов: (а) — при одинаково возбужденных излучателях; (б) — при возбуждении только первого излучателя.

Чаще всего вследствие технических ограничений все излучатели линейной антенны возбуждаются одинаково. Однако из-за различия в пространственном положении отдельных излучателей и их взаимодействия (рис. 4) установившиеся амплитуды и фазы колебаний (точек приведения) отдельных мембран при этом различны; соответствующий расчет по формуле (22) представлен на рис. 5. С другой стороны, необходимые распределения сил $\{\bar{A}_k\}$, обеспечивающие заданные апертурные распределения амплитуд колебаний $\{U_k\}$, можно найти как результат решения обратной задачи (формула (23)). Видно (рис. 6), что вследствие указанных причин необходимые распределения амплитуд сил могут существенно отличаться по форме от распределений амплитуд колебаний.

Развитая модель позволяет также оценить величины смещений резонансных частот при изме-

нении параметров излучающей антенны (плотностей заполняющих излучатели газов, положений излучателей и пр.). На рис. 7а приведены амплитудно-частотные характеристики погруженного в жидкость одиночного излучателя с натяжением мембраны, соответствующим ее минимальной собственной частоте $f_{\min}^{(0)} = F_0 \equiv 100$ Гц. Относительные амплитуды установившихся колебаний V рассчитывались по формуле (24) для $n = 1$ для различных плотностей и давлений заполняющего газа при неизменной скорости распространения звука в газе a_g . Из графиков видно, что приближенная оценка (27) резонансной частоты излучателя верна для плотности заполняющего газа $\rho_g = 5$ кг/м³. При меньших значениях плотности эта оценка завышенная, а при больших заниженная; смещение основной резонансной частоты

при изменении плотности газа можно приближенно оценить формулой:

$$f_{\min} - f_{\min}^{(0)} = 0.6(\rho_g - 5) \text{ (Гц)}. \quad (28)$$

Взаимодействие вносит существенные коррективы в амплитудно-частотные характеристики колебаний отдельных излучателей. На рис. 7б приведены резонансные кривые симметричных колебаний системы из трех излучателей — относительные амплитуды V колебаний каждого из излучателей вблизи центральной частоты $F_0 = 100$ Гц. На рис. 8а, 8б представлены резонансные кривые для излучателей линейной антенны из 14 элементов (расположенных через $\lambda_0/2$) при двух способах возбуждения колебаний: одинаковом возбуждении всех излучателей и возбуждении только первого излучателя. Во всех случаях плотности заполняющего газа считались одинаковыми для всех излучателей: $\rho_g = 5 \text{ кг/м}^3$, а натяжения всех мембран соответствовали их минимальной собственной частоте $f_{\min}^{(0)} = F_0$. Как видно из представленных расчетов, следствием взаимодействия излучателей является деформации и значительные (до 10 Гц) смещения резонансных кривых по оси частот, причем как направления смещений, так и острота кривых зависят как от расстояния l_0 между мембранами, так и от способа возбуждения колебаний в системе излучателей.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью работы являлись обсуждение экспериментов по возбуждению совместных колебаний в системе взаимодействующих излучателей электромагнитного типа и построение математической модели, описывающей подобные колебания. Построенная в работе модель учитывает ряд физических особенностей излучателей и использует достаточно простые приближения для учета взаимодействия их в процессе совместной работы.

В численных расчетах для эффективных параметров модели использовались эмпирические справочные формулы [27] с учетом рекомендуемых для них диапазонов изменений параметров. Верификация модели показала, что она достаточно хорошо описывает реальное распределение относительных амплитуд гармонических колебаний вертикальной решетки излучателей, что дает основания для использования ее при анализе различных аспектов совместной работы излучателей рассматриваемого типа.

В частности, исследовалось влияние плотности заполняющего излучателя газа, а также взаимного положения излучателей и параметров окружающей жидкости на форму амплитудно-ча-

стотных характеристик системы излучателей (резонансных кривых).

Помимо использования модели для теоретического анализа, она может использоваться и в практических целях, например, для ускорения настройки решетки излучателей, поставляя наилучшие начальные приближения для возбуждающих сил и указывая направления движения в пространстве поиска.

Дальнейшее развитие теории потребует использования более сложных моделей для описания колебаний мембран (пластин), полей, обуславливающих взаимодействие излучателей, реакции заполняющих излучатели газов, эффективных параметров, описывающих взаимодействие излучателей с водной средой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-02-00044) и программы ОФН РАН "Фундаментальные основы акустической диагностики искусственных и естественных сред".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Munk W., Worcester P., Wunsch C. Ocean Acoustic Tomography. Cambridge University Press, 1995. 433 p.
2. Гончаров В.В., Зайцев В.Ю., Куртенов В.М. и др. Акустическая томография океана. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997. 254 с.
3. Khil'ko A.I., Caruthers J.W., Sidorovskaja N.A. Ocean Acoustic Tomography. A Review with Emphasis on the Russian Approach. N. Novgorod: IAP RAS, 1998. 195p. Long Underwater Paths // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 68. № 3. P. 941–951.
4. Чупров С.Д. Селекция мод и лучей в подводном звуковом канале // Акустика океанской среды. М.: Наука. 1982. С. 132–141.
5. En-Chen Lo, Ti-Xin Zhou, Er-Chang. Normal Mode Filtering in Shallow Water // J. Acoust. Soc. Amer. 1983. V. 74. № 6. P. 1883.
6. Кравцов Ю.Н., Петников В.Г. О возможностях фазовой томографии океана с использованием нормальных волн // Изв. АН СССР, ФАО. 1986. Т. 22. № 9. С. 992–994.
7. Зайцев В.Ю., Нечаев А.Г., Островский Л.А. Об алгоритме трехмерной модовой томографии океана // Акустический журнал. 1987. Т. 33. № 6. С. 456–462.
8. Нечаев А.Г., Хилько А.И. Дифференциальная акустическая диагностика случайных океанических неоднородностей // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 2. С. 285–289.
9. Лучинин А.Г., Хилько А.И. Низкочастотная акустическая томография мелкого моря с использованием маломодовых импульсов // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 2. С. 124–145.
10. Бурдуковская В.Г., Лучинин А.Г., Хилько А.И., Смирнов И.П. Маломодовая акустическая томография мелкого моря с использованием маломодовых импульсов // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 3. С. 437–450.

11. Таланов В.И. О синтезе антенн в многомодовых волноводах. Известия Вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 7. С. 872–879.
12. Городецкая Е.Д., Малеханов А.И., Таланов В.А., Фикс И.Ш. Синтез и анализ акустических полей в океане. В книге: Формирование акустических полей в океанических волноводах, стр. 9–31. ИПФ РАН СССР, Нижний Новгород, 1991.
13. Смирнов И.П., Хилько А.И., Романова Т.В. Оптимальное выделение модовых сигналов на фоне помех вертикальными решетками в плоскостойких волноводах // Изв. вузов Радиофизика. 2008. Т. 51. № 1. С. 1–13.
14. Григорьев В.А., Кузькин В.М. Управление фокусировкой поля в многомодовых плоскостойких волноводах // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 3. С. 352–359.
15. Данилов В.Я., Кравцов Ю.А., Наконечный А.Г. Математические аспекты управления гидроакустическими полями. В книге: Формирование акустических полей в океанических волноводах, стр. 32–54. ИПФ РАН СССР, Нижний Новгород, 1991.
16. Авербах В.С., Алелеков И.В., Боголюбов Б.Н., Лучинин А.Г. Об управлении группой взаимодействующих акустических монополей: Препринт № 190: ИПФ АН СССР. Н. Новгород, 1988.
17. Лучинин А.Г., Хилько А.И., Стромков А.А. и др. Экспериментальное исследование формирования маломодовых акустических импульсов в мелком море // Акустика океана: Тр. 10-й школы-семинара акад. Л.М. Бреховских, совмещенной с 14-й сессией РАО. М.: ГЕОС, 2004. С. 216–220.
18. Лазарев В.А., Леонов И.И., Бытранов В.Б., Хилько А.И., Кошкин А.Г. Измерение временной когерентности поля низкочастотного гидроакустического излучателя // Тр. 9-й научн. конф. по радиофизике. Н. Новгород: ТАЛАМ, 2005. С. 247–248.
19. Смирнов И.П., Бурдуковская В.Г., Кошкин А.Г., Хилько А.И. Нелинейные колебания кольцевых мембран низкочастотного акустического излучателя // Изв. вузов Радиофизика. 2008. Т. 51. № 3. С. 199–215.
20. Смирнов И.П., Бурдуковская В.Г., Кошкин А.Г., Хилько А.И. Вынужденные колебания взаимодействующих акустических излучателей. Препринт 724: ИПФ РАН. Н. Новгород, 2007.
21. Гринюк А.В., Демкин В.П., Кравченко В.Н., Лучинин А.Г., Хилько А.И., Стромков А.А., Леонов И.И., Кошкин А.Г. Исследование когерентности низкочастотных маломодовых звуковых импульсов при их дальнем распространении в мелком море. Сб. докладов Нижегородской акустической научной сессии 16–17 мая 2005 г. / Ред. А.В. Якимов. Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2005. С. 219–220.
22. Буров В.А., Сергеев О.Н., Сергеевская Н.П. Акустическая томография океана по данным с вертикальной модовой антенны, произвольно искривленной подводными течениями // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 2. С. 350–353.
23. Yang T.C., Yoo K., Yates T. Matched-beam processing: Range tracking with vertical array in mismatched environments // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 104. № 4. P. 2174–2188.
24. Елисеевнин В.А., Тужилкин Ю.И. Направленность излучающей линейной антенны в волноводе при ее слабом отклонении от вертикали // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 5. С. 627–632.
25. Кержаков Б.В., Кулинич В.В., Кошкин А.Г., Хилько А.И. Особенности селективного возбуждения маломодовых сигналов вертикальной антенной решеткой в мелководных волноводах с подводным течением. Сборник докладов X-ой школы-семинара акад. Л.М. Бреховских “Акустика океана”, совмещенный с XIV-й сессией РАО. М.: ГЕОС, 2004. С. 206–210.
26. Кержаков Б.В., Кулинич В.В., Кошкин А.Г., Хилько А.И. Особенности возбуждения маломодового акустического поля вертикальной решеткой в мелком море // Изв. Вуз. Радиофизика 2006. Т. 49. № 9. С. 770–786.
27. Римский-Корсаков А.В., Ямщиков В.С., Жулин В.И., Рехман В.И. Акустические подводные низкочастотные излучатели. Л.: Судостроение, 1984. 232 с.
28. Смаришев М.Д., Добровольский Ю.Ю. Гидроакустические антенны. Л.: Судостроение, 1984. 340 с.
29. Прозоровский К.А., Кошкин А.Г. Особенности взаимного влияния двух близко расположенных низкочастотных гидроакустических излучателей / Сб. докладов Десятой Научной конференции по радиофизике, Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2006. С. 232–234.
30. Лазарев В.А., Леонов И.И., Бытранов В.Б., Хилько А.И., Кошкин А.Г. Измерение временной когерентности поля низкочастотного гидроакустического излучателя // Тр. 9-й научн. конф. по радиофизике. Н. Новгород: ТАЛАМ, 2005. С. 247–248.
31. Чаплин А.Ф. Анализ и синтез антенных решеток. Львов: Высшая школа, 1987.
32. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
33. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976.
34. Будаков Л.И., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. 3 изд. М.: Наука, 1980.
35. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Т. VI. Теоретическая физика. 3 изд. М.: Наука, 1986.